MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE

S. 804. D. 23

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

TOME DIXIÈME

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

M DCCC XLVIII

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE DIXIÈME VOLUME DES SAVANTS ÉTRANGERS.

Page.

Recherches sur le calcul des variations, pièce pour le concours sur la question relative aux maxima et minima des intégrales multiples; par M. Sarrus. 1

Catalogue général des étoiles filantes et des autres météores observés en Chine pendant vingt-quatre siècles, depuis le VII^e^ avant J. C. jusqu'au milieu du XVII^e^ de notre ère, dressé d'après les documents chinois; par M. Éd. Biot. 129

Note supplémentaire au Catalogue des étoiles filantes, etc.; par M. Éd. Biot. 415

Mémoire sur la position géologique des terrains de la partie australe du Brésil et sur les soulèvements qui, à diverses époques, ont changé le relief de cette contrée; par M. A. Pissis. 353

Observations anatomiques et organogéniques sur la Clandestine d'Europe (*Lathræa Clandestina*, L.); par M. Duchartre. 423

Développements sur quelques points de la théorie des surfaces isothermes orthogonales; par M. J. Bertrand. 539

Sur la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques; par M. Hermitte. 563

Nidification des Épinoches et des Épinochettes; par M. Coste. 574

Sur les terrains tertiaires du Nord-Ouest de l'Italie; par M. H. de Collegno. 589

Mémoire sur la balistique; par M. Is. Didion. 619

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

RECHERCHES

SUR

LE CALCUL DES VARIATIONS,

PIÈCE POUR LE CONCOURS

SUR LA QUESTION RELATIVE AUX MAXIMA ET MINIMA DES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. SARRUS.

A force d'étudier un sujet sous toutes sortes de faces, on finit par en déduire quelque chose.

L'Académie des sciences de Paris a proposé de trouver les équations aux limites que l'on doit joindre aux équations indéfinies, pour déterminer complétement les maxima et les minima des intégrales multiples.

Elle a demandé, en outre, des applications relatives aux intégrales triples.

J'ai cru devoir essayer de satisfaire aux vœux de l'Académie; je crois avoir réussi, et je viens lui présenter le résultat de mes recherches.

Convaincu, par une longue expérience, que des points de repos nombreux et convenablement choisis facilitent beaucoup la lecture des recherches scientifiques, j'ai partagé mon travail en plusieurs chapitres, chaque chapitre en plusieurs paragraphes, chaque paragraphe en plusieurs articles.

Dans le premier chapitre, je commence par fixer le sens des notations qui seront employées dans le reste de l'ouvrage; après cela, je donne les moyens de différentier, par rapport à un paramètre, soit une intégrale définie quelconque, soit d'autres expressions qui ont une grande analogie avec ces sortes d'intégrales; je déduis de là certaines formules de transformation qui peuvent rendre de grands services dans le calcul des intégrales définies et les applications du calcul aux sciences physiques, et que je regarde comme indispensables dans les applications du calcul des variations. Je termine ce chapitre par des considérations qui permettent de simplifier, dans un grand nombre de cas, les formules générales précédemment obtenues.

Dans le second chapitre, je développe le calcul direct des variations d'après le mode d'exposition adopté par Lagrange : de cette manière, ce développement devient une simple application des calculs du premier chapitre. Les formules trouvées ainsi sont, sans doute, moins symétriques que celles que l'on pourrait trouver d'une autre manière; elles semblent même différer d'une manière absolue de celles que l'on connaissait déjà pour les cas de deux et trois variables; mais je fais voir que cette différence n'est que de pure apparence, et qu'elle ne provient que de ce qu'on a opéré chemin faisant, et sans s'en apercevoir, certaines transformations nécessaires qu'il faudrait effectuer plus tard.

Dans les applications du calcul des variations, on sait ramener

tous les cas à celui où les variations des inconnues sont indépendantes les unes des autres. Dans le troisième chapitre, je suppose la question ramenée à ce point, et je donne les moyens de parvenir, soit aux équations indéfinies, soit aux équations aux limites, que l'on doit joindre à ces dernières pour avoir toutes les équations nécessaires.

Dans le quatrième chapitre, je développe les formules qui ont lieu lorsque le nombre de variables indépendantes ne dépasse pas trois, et j'indique une traduction géométrique de ces formules qui a l'avantage de les matérialiser.

Dans le cinquième et dernier chapitre, je traite trois questions particulières, et j'indique quelques aperçus sur les moyens d'employer les équations aux limites, sans cependant intégrer les équations indéfinies.

Dans tout le cours de ces recherches, je fais un fréquent usage de deux signes d'opérations η et ∇, que je me suis vu forcé d'adopter. Le premier est un simple signe de substitution ; il peut être extrêmement utile dans les hautes mathématiques, et même dans les parties élémentaires : je crois qu'il serait bon d'introduire dans l'enseignement, soit ce signe même, soit tout autre signe équivalent. Quant au signe ∇, il était moins nécessaire ; mais il m'a permis de concentrer dans quelques formules des résultats dont le nombre eût été rebutant, et dont il eût été presque impossible d'apercevoir la loi. Beaucoup de calculs reposent sur certaines propriétés des signes η et ∇ qui leur sont communes avec ceux d'intégration et de différentiation, et avec lesquelles il convient de se familiariser ; elles se trouvent exposées aux articles 5, 15, 23, 24.

Par inadvertance, le quatrième paragraphe du deuxième chapitre se trouve mal numéroté. Comme aucun renvoi ne se rapporte à ce paragraphe, il n'en résulte aucun inconvénient.

CHAPITRE PREMIER.

1.

1. Pour faciliter la comparaison des intégrales définies multiples, nous supposerons que l'on procède aux intégrations simples dont elles dépendent dans un ordre constant et déterminé, d'après lequel nous classerons les variables indépendantes, de telle manière qu'en désignant les variables par

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_{n-1},\ x_n,$$

les intégrations simples devront être effectuées dans l'ordre indiqué par l'expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-1} \int u dx_n.$$

2. Chacune des variables indépendantes doit être renfermée entre des limites qui dépendent de la question que l'on veut résoudre, et qui sont tantôt connues et tantôt inconnues. Quoi qu'il en soit, nous désignerons les limites inférieures respectives des variables $x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$, par

$$x',\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots\ x'_n,$$

et les limites supérieures par

$$x'',\ x''_1,\ x''_2,\ \ldots\ x''_n.$$

D'ailleurs, d'après la nature des intégrales définies,

Les limites x'_n et x''_n de la variable x_n peuvent être des fonctions de $x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-1}$, mais elles *doivent* être indépendantes de x_n;

Les limites x'_{n-1} et x''_{n-1} de la variable x_{n-1} peuvent être des

fonctions de $x, x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$, mais elles *doivent* être indépendantes de x_{n-1} et de x_n;

Et ainsi de suite, jusqu'aux limites de la variable x, qui doivent être indépendantes de x, x_1, x_2, $\ldots$ x_{n-1} et x_n.

3. Afin de diminuer le nombre de formules, nous désignerons par

$$y, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}, y_n,$$

une suite de fonctions, respectivement, de même nature que les limites du dernier article, de telle sorte que, pour un indice quelconque ρ, y_ρ sera indépendante des variables x_ρ, $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}, \ldots x_n$; mais, à cela près, ces fonctions pourront être quelconques.

Dans les applications, y_ρ devra être remplacée par l'une ou l'autre des limites x'_ρ, x''_ρ.

4. Nous aurons à considérer des expressions que, d'après la notation de Fourrier, nous devrions écrire sous les formes suivantes:

$$\int_{x'}^{x''} u dx, \quad \int_{x'_1}^{x''_1} u dx_1, \quad \int_{x'_2}^{x''_2} u dx_2, \ldots \quad \int_{x'_n}^{x''_n} u dx_n,$$

$$\int_{x'_g}^{x''_g} dx_g \int_{x'_{g+1}}^{x''_{g+1}} dx_{g+1} \int_{x'_{g+2}}^{x''_{g+2}} dx_{g+2} \ldots \int_{x'_h}^{x''_h} u dx_h;$$

mais pour simplifier les écritures, nous nous bornerons à écrire à leur place

$$\int u dx, \quad \int u dx_1, \quad \int u dx_2, \ldots \quad \int u dx_n,$$

$$\int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2}, \ldots \ldots \int u dx_h,$$

et afin d'éviter toute chance d'erreur, nous n'emploierons jamais ces dernières expressions dans une acception différente.

5. Nous emploierons la caractéristique δ dans une acception telle que,

Si dans une fonction quelconque u, dépendant d'une quantité pareillement quelconque p, on vient à remplacer cette dernière

par une nouvelle quantité pareillement quelconque q, l'on obtiendra un certain résultat que nous désignerons par

$$\mathcal{1}_p^q u.$$

De cette manière, nous aurons identiquement

$$(1)\quad \mathcal{1}_p^q f(x, x_1, x_2, \ldots p, \frac{dp}{dx}, \ldots \frac{d^2p}{dx\,dx_1}, \ldots) = f(x, x_1\ x_2, \ldots q, \frac{dq}{dx}, \ldots \frac{d^2q}{dx\,dx}, \ldots),$$

$$(2)\quad \int_{p'}^{p''} \frac{dv}{dp}\, dp = \mathcal{1}_p^{p''} v - \mathcal{1}_p^{p'} v;$$

de plus, si une fonction r ne dépend point de p, nous aurons identiquement

$$(3)\quad \mathcal{1}_p^q ru = r\ \mathcal{1}_p^q u \text{ et } \mathcal{1}_p^q r = r.$$

L'emploi de cette notation $\mathcal{1}$ nous conduira à des expressions de la forme

$$\mathcal{1}_r^{\gamma}\ \mathcal{1}_{r_1}^{\gamma_1} u,\quad \mathcal{1}_r^{\gamma}\ \mathcal{1}_{x_1}^{\gamma_1}\ \mathcal{1}_{x_2}^{\gamma_2} u, \ldots\ldots\ \mathcal{1}_r^{\gamma}\ \mathcal{1}_{x_1}^{\gamma_1}\ \mathcal{1}_{x_2}^{\gamma_2} \ldots \mathcal{1}_{x_n}^{\gamma_n} u,$$

$$\int dx\ \mathcal{1}_{x_1}^{\gamma_1} u,\quad \int dx \int dx_1\ \mathcal{1}_{x_2}^{\gamma_2} \mathcal{1}_{x_3}^{\gamma_3} u,\quad \int dx \int dx_1 \ldots \int dx_h\ \mathcal{1}_{x_{h+1}}^{\gamma_{h+1}} \ldots \mathcal{1}_{x_n}^{\gamma_n} u,$$

$$\mathcal{1}_{x_2}^{\gamma_2} \ldots \mathcal{1}_{x_{h-1}}^{\gamma_{h-1}} \int dx_h \ldots \int dx_{i-1}\ \mathcal{1}_{x_i}^{\gamma_i} \ldots \mathcal{1}_{x_{k-1}}^{\gamma_{k-1}} \int dx_k \ldots \int u dx_h,$$

dont la signification n'a pas besoin d'explication particulière.

6. Afin de pouvoir comprendre sous une forme commune et les intégrales définies et les expressions que nous venons de citer dans notre dernier article, nous aurons recours à une nouvelle caractéristique ∇, que nous emploierons dans une acception telle, qu'en désignant par α_i et β_i deux constantes données, mais d'ailleurs quelconques, l'on ait identiquement

$$(4)\quad \nabla_{x_i}^p u = \alpha_i\ \mathcal{1}_{x_i}^p u + \beta_i \int u dx_i.$$

Dès lors, en faisant $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 1$, on aura, quelle que soit la valeur de p,

$$\nabla^p_{x_i} u = \int u dx_i,$$

tandis qu'en faisant $\beta_i = 0$ et $\alpha_i = 1$, on aura

$$\nabla^p_{x_i} u = \eta^p_{x_i} u, \quad \nabla^{y_i}_{x_i} u = \eta^{y_i}_{x_i} u, \quad \nabla^{x'_i}_{x_i} = \eta^{x'_i}_{x_i} u, \quad \nabla^{x''_i}_{x_i} u = \eta^{x''_i}_{x_i} u.$$

7. Cette nouvelle caractéristique ∇ nous conduira à considérer des expressions telles que

$$\nabla^{y_g}_{x_g} \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \dots \nabla^{y_h}_{x_h} u, \quad \nabla^{y_g}_{x_g} \dots \nabla^{y_{h-1}}_{x_{h-1}} \eta^{y_h}_{x_h} \nabla^{y_{h+1}}_{x_{h+1}} \dots \nabla^{y_k}_{x_k} u,$$

$$\nabla^{y}_{x} \nabla^{y_1}_{x_1} \dots \nabla^{y_{g-1}}_{x_{g-1}} \int dx_g \nabla^{y_{g+1}}_{x_{g+1}} \dots \nabla^{y_{h-1}}_{x_{h-1}} \eta^{y_h}_{x_h} \nabla^{y_{h+1}}_{x_{h+1}} \dots \int dx_k \dots \nabla^{y_n}_{x_n} u,$$

dont la forme indique suffisamment la nature.

8. Telles sont les différentes conventions dont nous supposerons l'admission dans tout le cours de ces recherches; en outre, dans les deux premiers chapitres nous désignerons par t un paramètre indépendant de x, x_1, x_2, ... x_n, et que nous supposerons variable.

D'ailleurs, toutes les fois que nous croirons devoir restreindre la généralité des différentes conventions précédentes, nous aurons le soin d'en avertir d'une manière expresse.

2.

9. Pour un moment, nous désignerons par $F(t, x_i)$ une fonction quelconque du paramètre t, de la variable x_i, et, s'il y a lieu, des autres variables indépendantes; en outre, nous ferons

$$\frac{dF(t, x_i)}{dt} = \varphi(t, x_i);$$

$$\frac{d.F(t, x_i)}{dx_i} = \psi(t, x_i);$$

dès lors nous aurons identiquement

$$\frac{d\varphi(t,x_i)}{dx_i} = \frac{d\psi(t,x_i)}{dt}.$$

$$(7)\quad \frac{d\{F(t,x'_i)-F(t,x_i)\}}{dt} = \varphi(t,x''_i)-\varphi(t,x'_i)+\frac{dx_i}{dt}\psi(t,x''_i)-\frac{dx'_i}{dt}\psi(t,x'_i).$$

Mais les équations 5 et 6, intégrées par rapport à x_i, nous donneront

$$F(t,x''_i) - F(t,x'_i) = \int \psi(t,x_i)\,dx_i,$$

$$\varphi(t,x''_i) - \varphi(t,x'_i) = \int dx_i \frac{d\psi(t,x_i)}{dt}.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation 7, cette dernière changera en

$$(8)\quad \frac{d\int\psi(t,x_i)\,dx_i}{dt} = \int dx_i \frac{d\psi(t,x_i)}{dt} + \frac{dx''_i}{dt}\psi(t,x''_i) - \frac{dx'_i}{dt}\psi(t,x_i).$$

Maintenant, nous ferons pour abréger,

$$\psi(t,x_i) = u;$$

cela nous donnera (article 5):

$$\frac{d\psi(t,x_i)}{dt} = \frac{du}{dt}, \psi(t,x'_i) = 1^{x'_i}_{x_i} u, \psi(t,x''_i) = 1^{x''_i}_{x_i} u,$$

et, par suite, l'équation 8 prendra cette nouvelle forme:

$$(9)\quad \frac{d\int u dx_i}{dt} = \int \frac{du}{dt} dx_i + \frac{dx''_i}{dt} 1^{x''_i}_{x_i} u - \frac{dx'_i}{dt} 1^{x'_i}_{x_i} u,$$

dans laquelle u pourra représenter une fonction quelconque.

10. Après cela, nous remplacerons dans la formule 9, que nous venons de trouver, la fonction u par l'intégrale $\int u dx_{i-1}$. Cela nous donnera d'abord

$$\frac{d\int dx_i \int u dx_{i+1}}{dt} = \int dx_i \frac{d\int u dx_{i+1}}{dt} + \frac{dx''_i}{dt} 1^{x''_i}_{x_i} \int u dx_{i+1} - \frac{dx'_i}{dt} 1^{x'_i}_{x_i} \int u dx_{i-1}.$$

Mais un nouveau calcul semblable à celui du dernier article nous donnerait

$$\frac{d\int u dx_{i+1}}{dt} = \int dx_{i+1}\frac{du}{dt} + \frac{dx''_{i+1}}{dt}\gamma^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}u - \frac{dx'_{i+1}}{dt}\gamma^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}}u;$$

substituant donc cette valeur dans le résultat précédent, il viendra

$$(10)\qquad \frac{d\int dx_i \int u dx_{i+1}}{dt} = \int dx_i \int dx_{i+1}\frac{du}{dt} + \int dx_i \frac{dx''_{i+1}}{dt}\gamma^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}u$$
$$- \int dx_i \frac{dx'_{i+1}}{dt}\gamma^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}}u + \frac{dx''_{i+1}}{dt}\gamma^{x''_i}_{x_i}\int u dx_{i+1} - \frac{dx'_i}{dt}\gamma^{x'_i}_{x_i}\int u dx_{i+1}.$$

11. Après cela, nous pourrons remplacer dans cette dernière formule la fonction u par l'intégrale $\int u dx_{i+2}$, et en continuant de la même manière, nous parviendrons à la formule générale suivante, dans laquelle k exprimera un indice quelconque plus grand que i.

$$(11)\qquad \frac{d\int dx_i \int dx_{i+1}\ldots\int u dx_k}{dt} = \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k \frac{du}{dt}$$
$$+ \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\frac{dx''_k}{dt}\gamma^{x''_k}_{x_k}.u$$
$$+ \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\frac{dx''_{k-1}}{dt}\gamma^{x''_{k-1}}_{x_{k-1}}\int dx_k.u$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int dx_i \int dx_{i+1}\frac{dx''_{i+2}}{dt}\gamma^{x''_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$+ \int dx_i \frac{dx''_{i+1}}{dt}\gamma^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$+ \frac{dx''_i}{dt}\gamma^{x''_i}_{x_i}\int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\frac{dx'_k}{dt}\gamma^{x'_k}_{x_k}.u$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\frac{dx'_{k-1}}{dt}\gamma^{x'_{k-1}}_{x_{k-1}}\int dx_k.u$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1}\frac{dx'_{i+2}}{dt}\gamma^{x'_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$- \int dx_i \frac{dx'_{i+1}}{dt}\gamma^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u$$
$$- \frac{dx'_i}{dt}\gamma^{x'_i}_{x_i}\int dx_{i+1}\int dx_{i+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k.u,$$

dont la forme est on ne peut plus régulière.

12. On peut donner à la formule que nous venons de trouver une forme plus simple, et par là même plus commode.

Nous avons vu (article 5) que si une quantité r ne dépend point de p, on a identiquement

$$\gamma_p^q ru = r\,\gamma_p^q u; \tag{3}$$

Nous avons encore vu que, quelle que soit la valeur de l'indice ρ, les limites x'_ρ et x''_ρ ne dépendaient d'aucune des variables x_ρ, $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}\ldots$

Nous devons donc avoir identiquement

$$\frac{dx'_\rho}{dt}\gamma_{x'_\rho}^{x'_\rho} v = \gamma_{x'_\rho}^{x'_\rho} v\,\frac{dx'_\rho}{dt},\quad \frac{dx''_\rho}{dt}\gamma_{x''_\rho}^{x''_\rho} v = \gamma_{x''_\rho}^{x''_\rho} v\,\frac{dx''_\rho}{dt}. \tag{12}$$

Cela posé, nous remplacerons dans ces deux dernières équations la fonction v par l'intégrale $\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k$, dans laquelle k exprimera un indice quelconque plus grand que ρ, et par là elles se changeront en

$$\frac{dx'_\rho}{dt}\gamma_{x'_\rho}^{x'_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \gamma_{x'_\rho}^{x'_\rho}\frac{dx'_\rho}{dt}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k,$$

$$\frac{dx''_\rho}{dt}\gamma_{x''_\rho}^{x''_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \gamma_{x''_\rho}^{x''_\rho}\frac{dx''_\rho}{dt}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k.$$

Mais les facteurs $\frac{dx'_\rho}{dt}$, $\frac{dx''_\rho}{dt}$, étant indépendants des variables $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}$, $\ldots$ peuvent passer sous les signes d'intégrations relatives à ces variables : nous pouvons donc écrire encore

$$\frac{dx'_\rho}{dt}\gamma_{x'_\rho}^{x'_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \gamma_{x'_\rho}^{x'_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_k\,.\,u\,\frac{dx'_\rho}{dt},$$

$$\frac{dx''_\rho}{dt}\gamma_{x''_\rho}^{x''_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int u dx_k = \gamma_{x''_\rho}^{x''_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_k\,.\,u\,\frac{dx''_\rho}{dt}.$$

Enfin, en désignant par g un indice quelconque moindre que ρ.

nous déduirons de ces deux dernières formules les deux suivantes :

$$\int dx_g \dots \int dx_{\rho-1} \cdot \frac{dx'_\rho}{dt} \gamma^{x'_\rho}_{x_\rho} \int dx_{\rho+1} \dots \int u dx_k = \int dx_g \dots \int dx_{\rho-1} \gamma^{x'_\rho}_{x_\rho} \int dx_{\rho+1} \dots \int dx_k \cdot u \frac{dx'_\rho}{dt},$$

$$\int dx_g \dots \int dx_{\rho-1} \frac{dx''_\rho}{dt} \gamma^{x''_\rho}_{x_\rho} \int dx_{\rho+1} \dots \int u dx_k = \int dx_g \dots \int dx_{\rho-1} \gamma^{x''_\rho}_{x_\rho} \int dx_{\rho+1} \dots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_\rho}{dt},$$

au moyen desquelles l'équation 11 prendra cette nouvelle forme :

$$\begin{aligned}
(13)\quad \frac{d \cdot \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int u dx_k}{dt} = {} & \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \dots \dots \int dx_k \cdot \frac{du}{dt} \\
& + \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \dots \gamma^{x''_k}_{x_k} u \frac{dx''_k}{dt} \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
& + \int dx_i \int dx_{i+1} \gamma^{x''_{i+2}}_{x_{i+2}} \dots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_{i+2}}{dt} \\
& + \int dx_i \gamma^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}} \int dx_{i+2} \dots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_{i+1}}{dt} \\
& + \gamma^{x''_i}_{x_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \dots \int dx_k \cdot u \frac{dx''_i}{dt} \\
& - \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \dots \gamma^{x'_k}_{x_k} u \frac{dx'_k}{dt} \\
& - \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
& - \int dx_i \int dx_{i+1} \gamma^{x'_{i+2}}_{x_{i+2}} \dots \int dx_k u \frac{dx'_{i+2}}{dt} \\
& - \int dx_i \gamma^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}} \int dx_{i+2} \dots \int dx_k u \frac{dx'_{i+1}}{dt} \\
& - \gamma^{x'_i}_{x_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \dots \int dx_k u \frac{dx'_i}{dt}.
\end{aligned}$$

13. Comme chacune des variables $x, x_1 \dots x_{i-1}$ et $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ qui sont différentes de $x_i, x_{i+1}, \dots x_k$, peut donner lieu à un calcul semblable à ceux des articles précédents, on voit qu'en désignant par x_μ une quelconque des variables qui sont différentes de $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots x_k$, on aura encore

$$\begin{aligned}
(14)\quad \frac{d \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int u dx_k}{dx_\mu} = {} & \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \int dx_k \cdot \frac{du}{dx_\mu} \\
& + \int dx_i \int dx_{i+1} \dots \gamma^{x''_k}_{x_k} u \frac{dx''_k}{dx_\mu} \\
& + \dots \dots \dots \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

$$+ \int dx_i \, \mathcal{T}_{x_{i+1}}^{x''_{i+1}} \ldots \int dx_k \cdot u \, \frac{dx''_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \mathcal{T}_{x_i}^{x''_i} \int dx_{i+1} \ldots \int dx_k \cdot u \, \frac{dx''_i}{dx_\mu}$$
$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \mathcal{T}_{x_k}^{x'_k} \; u \; \frac{dx'_k}{dx_\mu}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \int dx_i \, \mathcal{T}_{x_{i+1}}^{x'_{i+1}} \ldots \int dx_k \; u \; \frac{dx_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$- \mathcal{T}_{x_i}^{x'_i} \int dx_{i+1} \ldots \int dx_k \; u \; \frac{dx'_i}{dx_\mu}.$$

Toutefois, il faudra observer que si l'indice μ est plus grand que k, les dérivées

$$\frac{dx'_i}{dx_\mu}, \; \frac{dx'_{i+1}}{dx_\mu}, \; \frac{dx'_{i+2}}{dx_\mu} \ldots \frac{dx'_k}{dx_\mu}, \; \frac{dx''_i}{dx_\mu}, \; \frac{dx''_{i+1}}{dx_\mu}, \ldots \frac{dx''_k}{dx_\mu}$$

seront identiquement nulles, et que, par suite, la formule précédente se réduira à

$$(15) \qquad \frac{d \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int u dx_k}{dx_\mu} = \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int dx_k \cdot \frac{du}{dx_\mu}.$$

3.

14. Nous consacrerons ce paragraphe à l'exposition de quelques propriétés de la caractéristique de substitution $\mathcal{T}$.

D'après ce que nous avons dit (article 5), pour avoir la valeur de

$$\mathcal{T}_p^q u,$$

il faut remplacer dans la fonction u la quantité p par la nouvelle quantité q : dès lors, on voit que pour avoir la valeur de

$$\mathcal{T}_p^q f(u, v, w, \ldots),$$

il suffira de faire une pareille substitution dans chacune des

fonctions composantes $u, v, w; \ldots$ on aura donc identiquement

$$(16) \qquad \tau_p^q f(u, v, w, \ldots) = f\left(\tau_p^q u, \tau_p^q v, \tau_p^q w, \ldots\right);$$

ce qui nous donnera, comme cas particuliers,

$$(17) \qquad \tau_p^q (u + v - w + \ldots) = \tau_p^q u + \tau_p^q v - \tau_p^q w + \ldots,$$

$$(18) \qquad \tau_p^q (u.v.w\ldots) = \tau_p^q u \,.\, \tau_p^q v \,.\, \tau_p^q w \ldots.$$

15. D'après ce que nous venons de voir, nous aurons d'abord

$$\tau_{p_1}^{q_1} f(u, v, w, \ldots) = f\left(\tau_{p_1}^{q_1} u, \tau_{p_1}^{q_1} v, \tau_{p_1}^{q_1} w, \ldots\right);$$

nous en déduirons

$$\tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} f(u, v, w, \ldots) = \tau_p^q f\left(\tau_{p_1}^{q_1} u, \tau_{p_1}^{q_1} v, \tau_{p_1}^{q_1} w, \ldots\right),$$

et par suite,

$$(19) \qquad \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} f(u, v, w, \ldots) = f\left(\tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} u, \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} v, \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} w, \ldots\right).$$

En continuant d'une manière analogue, nous parviendrons à la formule suivante :

$$(20) \qquad \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} f(u, v, w, \ldots) = f\left(\tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} u, \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} v, \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} w, \ldots\right)$$

qui nous donnera, comme cas particuliers,

$$(21) \qquad \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} (u + v - w + \ldots) = \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} u + \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} - \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} w + \ldots.$$

$$(22) \qquad \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} (u.v.w\ldots) = \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} u \,.\, \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} v \,.\, \tau_p^q \tau_{p_1}^{q_1} \ldots \tau_{p_g}^{q_g} w \ldots.$$

16. Nous avons déjà vu que si r est indépendante de p, on a

$$(3) \qquad \tau_p^q ru = r \tau_p^q.$$

Supposons maintenant que r est indépendante de $p, p_1, p_2, \ldots p_g$: dès lors nous aurons

$$\tau_{p_1}^{q_1} ru = r \tau_{p_1}^{q_1} u,$$

d'où nous déduirons

$$\gamma_p^q \gamma_{p_1}^{q_1} ru = \gamma_p^q r \gamma_{p_1}^{q_1} u = r \gamma_p^q \gamma_{p_1}^{q_1} u,$$

et en continuant d'une manière analogue, nous trouverons que

$$\gamma_p^q \gamma_{p_1}^{q_1} \ldots \gamma_{p_g}^{q_g} ru = r \gamma_p^q \gamma_{p_1}^{q_1} \ldots \gamma_{p_g}^{q_g} u, \tag{23}$$

et, comme cas particuliers, que

$$\gamma_p^q \gamma_{p_1}^{q_1} \ldots \gamma_{p_g}^{q_g} r = r. \tag{24}$$

17. Pour parvenir aux formules de différentiation relatives aux quantités affectées de caractéristiques γ, nous désignerons encore par $F(t, x_i)$ une fonction quelconque du paramètre t, de la variable x_i, et, s'il y a lieu, des autres variables indépendantes; de plus, comme à l'article 9, nous désignerons par $\varphi(t, x_i)$ et $\psi(t, x_i)$ les deux dérivées partielles de cette fonction prises par rapport à t et x_i : dès lors nous aurons identiquement

$$\frac{dF(t, q)}{dt} = \varphi(t, q) + \frac{dq}{dt}\psi(t, q). \tag{25}$$

Maintenant faisons $F(t, x_i) = u$, ce qui nous donnera $\varphi(t, x_i) = \frac{du}{dt}$ et $\psi(t, x_i) = \frac{du}{dx_i}$; nous aurons ainsi

$$F(t, q) = \gamma_i^q u, \quad \varphi(t, q) = \gamma_x^q \frac{du}{dt}, \quad \psi(t, q) = \gamma_x^q \frac{du}{dx_i};$$

par conséquent, l'équation 25 pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{d.\gamma_{x_i}^q u}{dt} = \gamma_{x_i}^q \frac{du}{dt} + \frac{dq}{dt}\gamma_{x_i}^q \frac{du}{dx_i}. \tag{26}$$

De même, en désignant par x_μ une des variables indépendantes qui sont différentes de x_i, nous aurons

$$\frac{d\gamma_{x_i}^q u}{dx_\mu} = \gamma_{x_i}^q \frac{du}{dx_\mu} + \frac{dq}{dx_\mu}\gamma_{x_i}^q \frac{du}{dx_\mu}. \tag{27}$$

18. Maintenant, nous remplacerons q par y_i dans les deux formules 26 et 27 : cela nous donnera

$$\frac{d\,\gamma_{x_i}^{y_i} u}{dt} = \gamma_{x_i}^{y_i} \frac{du}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\,\gamma_{x_i}^{y_i} \frac{du}{dx_i}, \tag{28}$$

$$\frac{d\,\gamma_{x_i}^{y_i} u}{dx_\mu} = \gamma_{x_i}^{y_i} \frac{du}{dx_\mu} + \frac{dy_i}{dx_\mu}\,\gamma_{x_i}^{y_i} \frac{du}{dx_i}; \tag{29}$$

mais, par hypothèse, y_i est indépendante de x_i (article 3), et, par suite, il doit en être de même de $\frac{dy_i}{dt}$ et de $\frac{dy_i}{dx_\mu}$: on peut donc, d'après la formule 3 (article 5), faire passer ces dérivées sous le signe $\gamma_{x_i}^{y_i}$; dès lors, en ayant égard à la formule 17 (article 14), nous pourrons écrire

$$\frac{d\,\gamma_{x_i}^{y_i} u}{dt} = \gamma_{x_i}^{y_i} \left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx_i}\frac{dy_i}{dt}\right), \tag{30}$$

$$\frac{d\,\gamma_{x_i}^{y_i} u}{dx_\mu} = \gamma_{x_i}^{y_i} \left(\frac{du}{dx_\mu} + \frac{du}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu}\right). \tag{31}$$

19. Après cela, nous supposerons que la variable x_μ est différente de x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, ... x_k, et nous remplacerons dans la dernière formule la fonction u par $\gamma_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u$: cela nous donnera

$$\frac{d\,\gamma_{x_i}^{y_i}\gamma_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u}{dx_\mu} = \gamma_{x_i}^{y_i}\gamma_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \left(\frac{du}{dx_\mu} + \frac{dy_i}{dx_\mu}\frac{du}{dx_i} + \left(\frac{dy_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{dy_{i+1}}{dx_i}\frac{dy_i}{dx_\mu}\right)\frac{du}{dx_{i+1}}\right).$$

et en continuant d'une manière analogue, nous trouverons que

$$\frac{d\,\gamma_{x_i}^{y_i}\gamma_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots \gamma_{x_k}^{y_k} u}{dx_\mu} = \gamma_{x_i}^{y_i}\gamma_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \dots \gamma_{x_k}^{y_k} \left(\frac{du}{dx_\mu} + z_i \frac{du}{dx_i} + z_{i+1}\frac{du}{dx_{i+1}} + \dots + z_k \frac{du}{dx_k}\right), \tag{32}$$

dans laquelle nous avons fait, pour abréger,

$$(33)\quad \begin{cases} z_i = \dfrac{dy_i}{dx_i}, \\ z_{i+1} = \dfrac{dy_{i+1}}{dx_i} + z_i \dfrac{dy_{i+1}}{dx_i}, \\ z_{i+2} = \dfrac{dy_{i+2}}{dx_i} + z_i \dfrac{dy_{i+2}}{dx_i} + z_{i+1} \dfrac{dy_{i+2}}{dx_{i+1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_k = \dfrac{dy_k}{dx_i} + z_i \dfrac{dy_k}{dx_i} + z_{i+1} \dfrac{dy_k}{dx_{i+1}} + \cdots + z_k \dfrac{dy_k}{dx_k}. \end{cases}$$

20. Nous pourrions donner à la dérivée

$$\frac{d\, T_{x_i}^{y_i} T_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots T_{x_k}^{y_k} u}{dt}$$

une forme analogue à la précédente, mais elle nous serait de peu d'utilité; nous chercherons donc à lui en donner une autre. Pour cela, nous remplacerons dans la formule 28 la fonction u par l'expression

$$T_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots T_{x_i}^{y_k} u;$$

nous trouverons ainsi

$$\frac{d\, T_{x_i}^{y_i} T_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots T_{x_k}^{y_k} u}{dt} = T_{x_i}^{y_i} \left\{ \frac{d.\, T_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots T_{x_k}^{y_k} u}{dt} + \frac{dy_i}{dt} \frac{d.\, T_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \cdots T_{x_k}^{y_k} u}{dx_i} \right\};$$

mais si nous développons au moyen de la formule 32, article 19, la valeur de la dérivée

$$\frac{d\, T_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} T_{x_{i+2}}^{y_{i+2}} \cdots T_{x_k}^{y_k} u}{dx_i},$$

elle se présentera sous la forme

$$T_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} T_{x_{i+2}}^{y_{i+2}} \cdots T_{x_k}^{y_k} u_{(i,k)},$$

en désignant par $u\,(i, k)$ le développement que l'on obtiendrait

pour la partie qui est comprise entre deux parenthèses dans le second membre de cette formule. Nous pourrons donc écrire l'équation ci-dessus sous cette nouvelle forme :

$$\frac{d\,\mathcal{T}^{\gamma_i}_{x_i}\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt}=\mathcal{T}^{\gamma_i}_{x_i}\left\{\frac{d\,\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\mathcal{T}^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt}+\frac{d\gamma_i}{dt}\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\mathcal{T}^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}u_{(i,\,k)}\right\};$$

de plus, comme γ_i est indépendante des variables x_i, x_{i+1}, x_{i+2},... nous pourrons faire passer $\frac{d\gamma_i}{dt}$ sous les signes $\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}$, $\mathcal{T}^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}$,... (formule 23) : nous aurons donc encore

$$\frac{d\,\mathcal{T}^{\gamma_i}_{x_i}\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}}{dt}=\mathcal{T}^{\gamma_i}_{x_i}\left\{\frac{d\,\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\mathcal{T}^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt}+\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\mathcal{T}^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}u_{(i,\,k)}\frac{d\gamma_i}{dt}\right\}. \tag{34}$$

Après cela, nous remplacerons la dérivée

$$\frac{d\,\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\mathcal{T}^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt}$$

par une valeur analogue au second membre de l'équation 34, et, en continuant de la même manière, nous arriverons à cette formule :

$$\frac{d\,\mathcal{T}^{\gamma_i}_{x_i}\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt}=\mathcal{T}^{\gamma_i}_{x_i}\mathcal{T}^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\cdots\mathcal{T}^{\gamma_k}_{x_k}\left\{\frac{du}{dt}+u_{(i,\,k)}\frac{d\gamma_i}{dt}+u_{(i+1,\,k)}\frac{d\gamma_{i+1}}{dt}+\cdots+u_{(k,\,k)}\frac{d\gamma_k}{dt}\right\}. \tag{35}$$

21. Pour le moment, nous ne pousserons pas plus loin la recherche des propriétés de la caractéristique $\mathcal{T}$, et nous passerons à celle des propriétés de la caractéristique ∇.

4.

22. Nous commencerons par faire observer que, d'après les conventions de l'article 6, nous devons avoir identiquement

$$\nabla^p_{x_i} u = \alpha_i \nabla^p_{x_i} u + \beta_i \int u dx_i,$$
$$\nabla^p_{x_i} v = \alpha_i \nabla^p_{x_i} v + \beta_i \int v dx_i,$$
$$\nabla^p_{x_i} w = \alpha_i \nabla^p_{x_i} w + \beta_i \int w dx_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'un autre côté, nous devons avoir encore (formule 17, art. 14)

$$\nabla^p_{x_i}(u + v - w + \ldots) = \nabla^p_{x_i} u + \nabla^p_{x_i} v - \nabla^p_{x_i} w + \ldots\ldots\ldots,$$

et, de plus,

$$\int dx_i (u + v - w + \ldots) = \int u dx_i + \int v dx_i - \int w dx_i + \ldots\ldots;$$

nous pouvons donc en conclure que

$$(36) \qquad \nabla^p_{x_i}(u + v - w + \ldots) = \nabla^p_{x_i} u + \nabla^p_{x_i} v - \nabla^p_{x_i} w + \ldots\ldots,$$

comme pour les signes de différentiation, d'intégration et de substitution.

23. Un nouveau calcul semblable au précédent nous donnerait encore

$$\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}(u + v - w + \ldots) = \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u + \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} v - \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} w + \ldots,$$

et nous en déduirions

$$\nabla^{p_i}_{x_i} \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}(u + v - w + \ldots) = \nabla^{p_i}_{x_i}\left(\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u + \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} v - \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} w + \ldots\right);$$

et, par suite,

$$(37) \qquad \nabla^{p_i}_{x_i} \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}(u + v - w + \ldots) = \nabla^{p_i}_{x_i} \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u + \nabla^{p_i}_{x_i} \nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} v$$
$$- \nabla^{p_j}_{x_j} \nabla^{p_{j+1}}_{x_{j+1}} u - \ldots\ldots$$

En continuant d'une manière analogue, nous trouverons qu'en général

$$(38)\quad \nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}(u+v-w+\ldots)=\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}u$$
$$+\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}v-\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}w+\ldots,$$

dans laquelle p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, $\ldots$ p_k, peuvent représenter des fonctions quelconques.

24. En supposant que r ne dépende point de x_i, nous devons avoir identiquement (article 5)

$$\nabla^{p}_{x_i} ru = r\nabla^{p}_{x_i} u;$$

d'ailleurs, nous aurons encore

$$\int rudx_i = r\int udx_i,$$

et, de plus, d'après les conventions de l'article 6,

$$\nabla^{p}_{x_i} ru = \alpha_i\nabla^{p}_{x_i} ru + \beta_i\int urdx_i;$$

nous pouvons donc en conclure:

$$(39)\qquad \nabla^{p}_{x_i} ru = r\nabla^{p}_{x_i} u;$$

toutefois, on ne devra pas perdre de vue que cette équation n'est vraie, du moins en général, qu'autant que r est indépendante de x_i.

Supposons maintenant que r est indépendante des variables x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, $\ldots$ x_k, alors un nouveau calcul, semblable au précédent, nous donnerait

$$\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} ru = r\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u,$$

d'où nous tirerions

$$\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} ru = \nabla^{p_i}_{x_i} r\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u = r\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}} u;$$

et en continuant d'une manière semblable, nous trouverions d'abord

$$(40)\qquad \nabla^{p_r}_{x_r}\nabla^{p_{r+1}}_{x_{r+1}}\ldots\nabla^{p_n}_{x_n}ru = r\nabla^{p_r}_{x_r}\nabla^{p_{r+1}}_{x_{r+1}}\ldots\nabla^{p_n}_{x_n}u,$$

et, par suite,

$$(41)\qquad \nabla^{p_1}_{x_1}\ldots\nabla^{p_{i-1}}_{x_{i-1}}\nabla^{p_i}_{x_i}\nabla^{p_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}ru = \nabla^{p_1}_{x_1}\ldots\nabla^{p_{i-1}}_{x_{i-1}}\left(r\nabla^{p_i}_{x_i}\ldots\nabla^{p_k}_{x_k}u\right).$$

25. Maintenant, nous passerons à la différentiation des expressions affectées de la caractéristique ∇. Pour cela, nous reprendrons l'équation de définition

$$\nabla^{p}_{x_i}u = \alpha_i\,\mathrm{I}^{p}_{x_i}u + \beta_i\int u\,dx_i,$$

et nous en déduirons d'abord

$$\frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}u}{dt} = \alpha_i\frac{d\,\mathrm{I}^{p}_{x_i}u}{dt} + \beta_i\frac{d\int u\,dx_i}{dt};$$

après cela, nous développerons le second membre au moyen des formules 26 et 9, et nous trouverons

$$\frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}u}{dt} = \alpha_i\mathrm{I}^{p}_{x_i}\frac{du}{dt} + \frac{dp}{dt}\alpha_i\mathrm{I}^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\int dx_i\frac{du}{dt} + \beta_i\frac{dx''_i}{dt}\mathrm{I}^{x''_i}_{x_i}u - \beta_i\frac{dx'_i}{dt}\mathrm{I}^{x'_i}_{x_i}u.$$

Mais les deux parties qui renferment la dérivée $\frac{du}{dt}$ peuvent se réduire au moyen de la caractéristique $\nabla^{p}_{x_i}$: effectuant donc cette réduction, il viendra

$$(42)\qquad \frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}u}{dt} = \nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dt} + \alpha_i\frac{dp}{dt}\mathrm{I}^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\frac{dx''_i}{dt}\mathrm{I}^{x''_i}_{x_i}u - \beta_i\frac{dx'_i}{dt}\mathrm{I}^{x'_i}_{x_i}u.$$

De même, en désignant par x_μ une des variables indépendantes qui sont différentes de x_i, nous aurons encore

$$(43)\qquad \frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}u}{dx_\mu} = \nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_\mu} + \alpha_i\frac{dp}{dx_\mu}\mathrm{I}^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\frac{dx''_i}{dx_\mu}\mathrm{I}^{x''_i}_{x_i}u - \beta_i\frac{dx'_i}{dx_\mu}\mathrm{I}^{x'_i}_{x_i}u.$$

26. Après cela, nous ferons observer que l'on a identiquement (art. 6)

$$\nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} = \alpha_i\,\gamma^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\int\frac{du}{dx_i}\,dx_i;$$

et comme, d'ailleurs, on a encore (art. 5)

$$\int\frac{du}{dx_i}\,dx_i = \gamma^{x''_i}_{x_i}u - \gamma^{x'_i}_{x_i}u,$$

nous en conclurons que

$$\nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} = \alpha_i\,\gamma^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\,\gamma^{x''_i}_{x_i}u - \beta_i\,\gamma^{x'_i}_{x_i}u.$$

Nous tirerons de cette dernière la valeur de

$$\alpha_i\,\gamma^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i}$$

pour la substituer dans les équations 42 et 43, et nous trouverons

$$(44)\quad \frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}u}{dt} = \nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dt} + \frac{dp}{dt}\,\nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\left(\frac{dx''_i}{dt} - \frac{dp}{dt}\right)\gamma^{x''_i}_{x_i}u + \beta_i\left(\frac{dp}{dt} - \frac{dx'_i}{dt}\right)\gamma^{x'_i}_{x_i}u.$$

$$(45)\quad \frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}u}{dx_\mu} = \nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_\mu} + \frac{dp}{dx_\mu}\,\nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i} + \beta_i\left(\frac{dx''_i}{dx_\mu} - \frac{dp'}{dx_\mu}\right)\gamma^{x''_i}_{x_i}u + \beta_i\left(\frac{dp}{dx_\mu} - \frac{dx'_i}{dx_\mu}\right)\gamma^{x'_i}_{x_i}u.$$

27. Remplaçons dans la formule 45 la fonction p par y_i, et faisant pour abréger, quelle que puisse être la valeur de l'indice ρ,

$$\beta_\rho\,(y_\rho - x_\rho') = y_\rho' \text{ et } \beta_\rho\,(x_\rho'' - y_\rho) = y_\rho'',$$

nous aurons

$$\frac{d\,\nabla^{y_i}_{x_i} u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i} \frac{du}{dx_\mu} + \frac{dy_i}{dx_\mu} \nabla^{y_i}_{x_i} \frac{du}{dx_i} + \frac{dy''_i}{dx_\mu} 1^{x''_i}_{x_i} u + \frac{dy'_i}{dx_\mu} 1^{x'_i}_{x_i} u,$$

ou bien, en faisant passer $\frac{dy_i}{dx_\mu}$ sous le signe $\nabla^{y_i}_{x_i}$, ce qui est permis (art. 24), puisque y_i ne dépend point de x_i, nous aurons (en observant que $\frac{dy''_i}{dx_\mu}$ et $\frac{dy'_i}{dx_\mu}$ peuvent aussi passer sous les signes $1^{x''_i}_{x_i}$, $1^{x'_i}_{x_i}$)

$$(46)\quad \frac{d\,\nabla^{y_i}_{x_i} u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i} \frac{du}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i} \frac{du}{dx_i} \frac{dy_i}{dx_\mu} + 1^{x''_i}_{x_i} u \frac{dy''_i}{dx_\mu} + 1^{x'_i}_{x_i} u \frac{dy'_i}{dx_\mu}.$$

28. Après cela, nous remplacerons dans cette dernière formule la fonction u par $\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u$. Cela nous donnera d'abord

$$\frac{d\,\nabla^{y_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i} \frac{d\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i} \frac{d\,\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u}{dx_i} \cdot \frac{dy_i}{dx_\mu} + 1^{x''_i}_{x_i} \frac{dy''_i}{dx_\mu} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u$$
$$+ 1^{x'_i}_{x_i} \frac{dy'_i}{dx_\mu} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u,$$

et, par suite,

$$\frac{d\,\nabla^{y_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u}{dx_\mu} = \nabla^{y_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \frac{du}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \frac{du}{dx_i} \frac{dy_i}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \frac{du}{dx_{i+1}} \frac{dy_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \nabla^{y_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} \frac{du}{dx_{i+1}} \frac{dy_{i+1}}{dx_i} \frac{dy_i}{dx_\mu}$$
$$+ 1^{x''_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u \frac{dy''_i}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i} 1^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}} u \frac{dy''_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \nabla^{y_i}_{x_i} 1^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}} u \frac{dy'_{i+1}}{dx_i} \frac{dx_i}{dx_\mu}$$
$$+ 1^{x'_i}_{x_i} \nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}} u \frac{dy'_i}{dx_\mu} + \nabla^{y_i}_{x_i} 1^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}} u \frac{dy'_{i+1}}{dx_\mu}$$
$$+ \nabla^{y_i}_{x_i} 1^{x'_{i+1}}_{x_{i+1}} u \frac{dy'_{i+1}}{dx_i} \frac{dy_i}{dx_\mu}.$$

29. En continuant d'une manière analogue, nous parviendrons à cette formule générale :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\cdots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u}{dx_\mu} &= \nabla^{\gamma_i}_{x_i}\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\cdots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}\frac{du}{dx_\mu} \\
&+ \Sigma\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\cdots\nabla^{\gamma_\rho}_{x_\rho}\cdots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}\frac{du}{dx_\rho}\,z_\rho \\
&+ \Sigma\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\cdots\nabla^{x''_\rho}_{x_\rho}\cdots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u\,z''_\rho \\
&+ \Sigma\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\cdots\nabla^{x'_\rho}_{x_\rho}\cdots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u\,z'_\rho ,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

dans laquelle le signe Σ indique la somme de tous les termes que l'on peut former en prenant successivement les nombres i, $i+1$, $i+2$, ... k comme valeurs de ρ, tandis que les facteurs z_ρ, z''_ρ et z'_ρ sont formés comme dans l'article 19, de telle manière que l'on ait

$$
\left\{
\begin{aligned}
z_i &= \frac{d\gamma_i}{dx_\mu}, \\
z_{i+1} &= \frac{d\gamma_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{d\gamma_{i+1}}{dx_i}\,z_i, \\
z_{i+2} &= \frac{d\gamma_{i+2}}{dx_\mu} + \frac{d\gamma_{i+2}}{dx_i}\,z_i + \frac{d\gamma_{i+2}}{dx_{i+1}}\,z_{i+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_k &= \frac{d\gamma_k}{dx_\mu} + \frac{d\gamma_k}{dx_i}\,z_i + \frac{d\gamma_k}{dx_{i+1}}\,z_{i+1} + \cdots + \frac{d\gamma_k}{dx_{k-1}}\,z_{k-1}; \\
z''_i &= \frac{d\gamma'_i}{dx_\mu}, \\
z''_{i+1} &= \frac{d\gamma''_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{d\gamma_{i+1}}{dx_i}\,z_i, \\
z''_{i+2} &= \frac{d\gamma''_{i+2}}{dx_\mu} + \frac{d\gamma''_{i+2}}{dx_i}\,z_i + \frac{d\gamma''_{i+2}}{dx_{i+1}}\,z_{i+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z''_k &= \frac{d\gamma''_k}{dx_\mu} + \frac{d\gamma''_k}{dx_i}\,z_i + \frac{d\gamma''_k}{dx_{i+1}}\,z_{i+1} + \cdots + \frac{d\gamma''_k}{dx_{k-1}}\,z_{k-1}; \\
z'_i &= \frac{d\gamma'_i}{dx_\mu}, \\
z'_{i+1} &= \frac{d\gamma'_{i+1}}{dx_\mu} + \frac{d\gamma'_{i+1}}{dx_i}\,z_i, \\
z'_{i+2} &= \frac{d\gamma'_{i+2}}{dx_\mu} + \frac{d\gamma'_{i+2}}{dx_i}\,z_i + \frac{d\gamma'_{i+2}}{dx_{i+1}}\,z_{i+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z'_k &= \frac{d\gamma'_k}{dx_\mu} + \frac{d\gamma'_k}{dx_i}\,z_i + \frac{d\gamma'_k}{dx_{i+1}}\,z_{i+1} + \cdots + \frac{d\gamma'_k}{dx_{k-1}}\,z_{k-1}.
\end{aligned}
\right.
\tag{48}
$$

30. Nous pourrions donner une formule analogue pour la valeur de la dérivée

$$\frac{d\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\,\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt};$$

mais, comme dans l'article 20, nous préférons lui donner une forme plus appropriée à nos recherches des chapitres suivants. Ainsi, nous reprendrons l'équation

$$(42)\quad \frac{d\,\nabla^{p}_{x_i}u}{dt}=\nabla^{p}_{x_i}\frac{du}{dt}+\alpha_i\frac{dp}{dt}\,1^{p}_{x_i}\frac{du}{dx_i}+\beta_i\frac{dx''_i}{dt}\,1^{x''_i}_{x_i}u-\beta_i\frac{dx'_i}{dt}\,1^{x'_i}_{x_i}u,$$

et nous remplacerons p par γ_i et u par

$$\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u.$$

Cela nous donnera pour résultat

$$\begin{aligned}(49)\quad \frac{d\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\,\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt}&=\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\frac{d\,\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u}{dt}\\&+\alpha_i\frac{d\gamma_i}{dt}\,1^{\gamma_i}_{x_i}\frac{d\,\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u}{dx_i}\\&+\beta_i\frac{dx''_i}{dt}\,1^{x''_i}_{x_i}\,\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u\\&-\beta_i\frac{dx'_i}{dt}\,1^{x'_i}_{x_i}\,\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\,\nabla^{\gamma_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u.\end{aligned}$$

Mais si on développe la valeur de la dérivée

$$\frac{d\,\nabla^{\gamma_p}_{x_p}\,\nabla^{\gamma_{p+1}}_{x_{p+1}}\,\nabla^{\gamma_{p+2}}_{x_{p+2}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u}{dx_p}$$

au moyen de la formule 47, on trouvera un résultat de la forme

$$\nabla^{\gamma_{p+1}}_{x_{p+1}}\,\nabla^{\gamma_{p+2}}_{x_{p+2}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u_{(p,k)}$$

dans lequel $u_{(p,k)}$ exprimera une fonction connue. Dès lors, au

moyen de ces sortes de fonctions auxiliaires, l'équation 49 pourra s'écrire sous la forme suivante :

$$(50)\quad \frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt} = \nabla^{y_i}_{x_i}\frac{d\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt}$$
$$+\alpha_i\,\gamma^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u_{(i,k)}\frac{dy_i}{dt}$$
$$+\beta_i\,\gamma^{x''_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx''_i}{dt}$$
$$-\beta_i\,\gamma^{x'_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx'_i}{dt},$$

en observant de faire passer sous les signes $\gamma^{y}_{x_i}$, $\gamma^{x''_i}_{x_i}$, $\gamma^{x'_i}_{x_i}$, $\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}$, $\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}$, $\ldots$ $\nabla^{y_k}_{x_k}$, les facteurs $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dx''_i}{dt}$, $\frac{dx'_i}{dt}$, qui sont indépendants des variables x_i, x_{i+1}, $x_{i+2}\ldots x_k$.

Après cela nous développerons, par un procédé analogue, la dérivée

$$\frac{d\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt}$$

qui entre dans le second membre de l'équation 50, et, par suite, cette équation se changera en

$$\frac{d\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt} = \nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\frac{d\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u}{dt}$$
$$+\alpha_{i+1}\nabla^{y_i}_{x_i}\gamma^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_i}_{x_i}u_{(i+1,k)}\frac{dy_{i+1}}{dt}$$
$$+\alpha_i\,\gamma^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u_{(i,k)}\frac{dy_i}{dt}$$
$$+\beta_{i+1}\nabla^{y_i}_{x_i}\gamma^{x''_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx''_{i+1}}{dt}$$
$$+\beta_i\,\gamma^{x''_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx''_i}{dt}$$
$$-\beta_{i+1}\nabla^{y_i}_{x_i}\gamma^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx'_{i+1}}{dt}$$
$$-\beta_i\,\gamma^{x'_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\nabla^{y_{i+2}}_{x_{i+2}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\frac{dx'_i}{dt}.$$

En continuant de la même manière, nous trouverons que

$$(51)\quad \frac{d\nabla_{x_i}^{y_i}\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}u}{dt} = \nabla_{x_i}^{y_i}\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_\rho}^{y_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\frac{du}{dt}$$
$$+\Sigma\alpha_\rho\,\nabla_{x_i}^{y_i}\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_\rho}^{y_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}u_{(\rho,k)}\frac{dy_\rho}{dt}$$
$$+\Sigma\beta_\rho\,\nabla_{x_i}^{y_i}\nabla_{x_{i+2}}^{y_{i+2}}\cdots\nabla_{x_\rho}^{x''_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}u\frac{dx_\rho}{dt}$$
$$-\Sigma\beta_\rho\,\nabla_{x_i}^{y_i}\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_\rho}^{x'_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}u\frac{dx'_\rho}{dt},$$

dans laquelle le signe Σ indique la somme des termes que l'on peut former, en prenant successivement les nombres i, $i+1$, $i+2,\ldots,k$, pour les valeurs de ρ.

5.

31. Nous passerons maintenant aux formules de transformation, et pour cela nous rappellerons que, d'après les conventions de l'article 5, nous devons avoir identiquement

$$(2)\qquad \int\frac{du}{dx_g}\,dx_g = \nabla_{x_g}^{x''_g}u - \nabla_{x_g}^{x'_g}u.$$

Remplaçons dans cette identité la fonction u par l'intégrale

$$\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\cdots\int dx_{h-1}\int u dx_h,$$

et nous aurons pour résultat

$$\int dx_g\,\frac{d\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\cdots\int u dx_h}{dx_g} = \nabla_{x_g}^{x_g}\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\cdots\int dx_{h-1}\int u dx_h$$
$$-\nabla_{x_g}^{x'_g}\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\cdots\int dx_{h-1}\int u dx_h.$$

Après cela nous développerons, au moyen de la formule 14,

article 13, la dérivée qui entre dans le premier membre. Nous trouverons ainsi :

$$
\left.\begin{aligned}
&\int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \cdot \frac{du}{dx_g} \\
&+ \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \gamma \begin{smallmatrix} x''_h \\ x_h \end{smallmatrix} u \frac{dx''_h}{dx_g} \\
&+ \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \gamma \begin{smallmatrix} x''_{h-1} \\ x_{h-1} \end{smallmatrix} \int dx_h \, u \frac{dx''_{h-1}}{dx_g} \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ \int dx_g \int dx_{g+1} \gamma \begin{smallmatrix} x''_{g+2} \\ x_{g+2} \end{smallmatrix} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+2}}{dx_g} \\
&+ \int dx_g \gamma \begin{smallmatrix} x''_{g+1} \\ x_{g+1} \end{smallmatrix} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+1}}{dx_g} \\
&- \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \gamma \begin{smallmatrix} x'_h \\ x \end{smallmatrix} u \frac{dx'_h}{dx_g} \\
&- \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \gamma \begin{smallmatrix} x'_{h-1} \\ x_{h-1} \end{smallmatrix} \int dx_h \, u \frac{dx'_{h-1}}{dx_g} \\
&- \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&- \int dx_g \int dx_{g+1} \gamma \begin{smallmatrix} x'_{g+2} \\ x_{g+2} \end{smallmatrix} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx'_{g+2}}{dx_g} \\
&- \int dx_g \gamma \begin{smallmatrix} x'_{g+1} \\ x_{g+1} \end{smallmatrix} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx'_{g+1}}{dx_g}
\end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned}
&\gamma \begin{smallmatrix} y''_g \\ x_g \end{smallmatrix} \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \cdot u \\
&- \gamma \begin{smallmatrix} x'_g \\ x_g \end{smallmatrix} \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \cdot u ;
\end{aligned}\right. \tag{52}
$$

enfin, nous tirerons de cette dernière équation la valeur de l'intégrale

$$\int dx_g \int dx_{g+1} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \cdot \frac{du}{dx_g}$$

qui forme le premier terme du premier membre de cette équation, et nous trouverons ainsi :

$$
\begin{aligned}
\int dx_g \int dx_g \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \frac{du}{dx_g} = {} & \gamma \begin{smallmatrix} x''_g \\ x_g \end{smallmatrix} \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \\
& - \int dx_g \gamma \begin{smallmatrix} x''_{g+1} \\ x_{g+1} \end{smallmatrix} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+1}}{dx_g} \\
& - \int dx_g \int dx_{g+1} \gamma \begin{smallmatrix} x''_{g+2} \\ x_{g+2} \end{smallmatrix} \dots \int dx_{h-1} \int dx_h \, u \frac{dx''_{g+2}}{dx_g} \\
& - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& - \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \gamma \begin{smallmatrix} x''_{h+1} \\ x_{h+1} \end{smallmatrix} \int dx_h \, u \frac{dx''_{h+1}}{dx_g} \\
& - \int dx_g \int dx_{g+1} \int dx_{g+2} \dots \int dx_{h+1} \gamma \begin{smallmatrix} x''_h \\ x_h \end{smallmatrix} u \frac{dx''_{h+1}}{dx_g}
\end{aligned} \tag{53}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta_{x_g}^{x'_g}\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\ldots\int dx_{h-1}\int dx_h\,u\\
&+\int dx\,\eta_{x_g}^{x'_{g+1}}\int dx_{g+2}\ldots\int dx_{h-1}\int dx_h\,u\,\frac{dx'_{g+1}}{dx_g}\\
&+\int dx_g\int dx_{g+1}\,\eta_{x_{g+1}}^{x_{g+2}}\ldots\int dx_{h-1}\int dx_h\,u\,\frac{dx_{g+1}}{dx_g}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\int dx_g\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\ldots\eta_{x_{h-1}}^{x'_{h-1}}\int dx_h\,u\,\frac{dx'_{h-1}}{dx_g}\\
&+\int dx_g\int dx_{g+1}\int dx_{g+2}\ldots\int dx_{h-1}\eta_{x_h}^{x'_h}\,u\,\frac{dx'_h}{dx_g}
\end{aligned}
$$

32. Après cela nous calculerons, au moyen de la dernière formule, la valeur de

$$\int dx_\rho\int dx_{\rho+1}\ldots\int dx_k\,\frac{du}{dx_\rho},$$

et, en la substituant dans l'intégrale

$$\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_\rho\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_k\,\frac{du}{dx_\rho},$$

nous trouverons

$$
\begin{aligned}
(54)\quad &\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\int dx_\rho\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_k\int dx_{k-1}\cdot\frac{du}{dx_\rho}\\
=\;&\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\eta_{x_\rho}^{x''_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k\,u\\
-\;&\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\int dx_\rho\,\eta_{x_{\rho+1}}^{x''_{\rho+1}}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k\,u\,\frac{dx''_{\rho+1}}{dx_\rho}\\
-\;&\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\int dx_\rho\int dx_{\rho+1}\,\eta_{x_{\rho+2}}^{x''_{\rho+2}}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k\,u\,\frac{dx''_{\rho+2}}{dx_\rho}\\
-\;&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-\;&\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\int dx_\rho\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\eta_{x_{k-1}}^{x''_{k-1}}\int dx_k\,u\,\frac{dx''_{k-1}}{dx_\rho}\\
-\;&\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\int dx_\rho\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_{k-1}\eta_{x_k}^{x_k}\,u\,\frac{dx''_k}{dx_\rho}\\
-\;&\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\eta_{x_\rho}^{x'_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k\,u\\
+\;&\int dx_i\int dx_{i+1}\ldots\int dx_{\rho-1}\int dx_\rho\,\eta_{x_{\rho+1}}^{x'_{\rho+1}}\int dx_{\rho+2}\ldots\int dx_{k-1}\int dx_k\,u\,\frac{dx_{\rho+1}}{dx_\rho}
\end{aligned}
$$

$$+ \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \daleth_{x_{\rho+2}}^{x'_{\rho+2}} \ldots \int dx_{k-1} \int dx_k \; u \; \frac{dx_{\rho+2}}{dx_\rho}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \daleth_{x_{k-1}}^{x'_{k-1}} \int dx_k \; u \; \frac{dx'_{k-1}}{dx_\rho}$$

$$+ \int dx_i \int dn_{i+1} \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_{k-1} \daleth_{x_k}^{x'_k} \; u \; \frac{dx_k}{dx_\rho}$$

dont la forme est on ne peut plus régulière.

33. Nous reprendrons encore l'identité

$$\int \frac{du}{dx_g} dx_g = \daleth_{x_g}^{x''_g} u - \daleth_{x_g}^{x'_g} u.$$

et nous remplacerons la fonction u par l'expression :

$$\nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_{h-1}}^{y_{h-1}} \nabla_{x_h}^{y_h} u:$$

cela nous donnera

$$\int dx_g \frac{d \nabla_{y_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u}{dx_g} = \daleth_{x_g}^{x''_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_{h-1}}^{y_{h-1}} \nabla_{x_h}^{y_h} u.$$
$$- \daleth_{x_g}^{x'_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_{h-1}}^{y_{h-1}} \nabla_{x_h}^{y_h} u$$

Mais un calcul semblable à celui de l'article 29 nous donnera le développement de

$$\frac{d \; \nabla_{x_{h+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u,}{dx_g}$$

que nous substituerons dans cette formule. Nous trouverons ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &\int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \nabla_{x_h}^{y_h} \frac{du}{dx_g} \\ +\; &\Sigma \int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y^g+1} \ldots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho \\ +\; &\Sigma \int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \ldots\ldots \daleth_{x_\rho}^{x''_\rho} \ldots\ldots \nabla_{x_h}^{y_h} \; u \; z''_\rho \\ +\; &\Sigma \int dx_g \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \ldots \daleth_{x_\rho}^{x'_\rho} \ldots\ldots \nabla_{x_h}^{y_h} \; u \; z'_\rho \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\daleth_{x_g}^{x''_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+2}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x_h}^{y_h} u \\ -&\daleth_{x_g}^{x'_g} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+1}} \nabla_{x_{g+1}}^{y_{g+2}} \ldots \nabla_{x^h}^{y_h} u \end{aligned}\right.$$

dans la laquelle le Σ indique que l'on doit prendre la somme des termes que l'on peut former en prenant successivement pour ρ les nombres $g+1$, $g+2, \ldots, k$, quant aux valeurs de z_ρ, z''_ρ, z'_ρ; elles se formeront d'une manière analogue à celle de l'article 29.

Après cela nous tirerons de cette dernière équation la valeur de

$$\int dx_g \, \nabla^{\gamma_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{\gamma_{g+2}}_{x_{g+2}} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \frac{dx}{dx_g},$$

et nous trouverons :

$$\begin{aligned}
(55)\quad \int dx_g \nabla^{\gamma_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{\gamma_{g+2}}_{x_{g+2}} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \frac{du}{dx_g} = {} & \gamma^{x''_g}_{x_g} \nabla^{\gamma_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{\gamma_{g+2}}_{x_{g+2}} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} u \\
& - \gamma^{x'_g}_{x_g} \nabla^{\gamma_{g+1}}_{x_{g+1}} \nabla^{\gamma_{g+2}}_{x_{g+2}} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} u \\
& - \Sigma \int dx_g \nabla^{\gamma_{g+1}}_{x_{g+1}} \cdots \nabla^{\gamma_\rho}_{x_\rho} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x^k} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho \\
& - \Sigma \int dx_g \nabla^{\gamma_{g+1}}_{x_{g+1}} \cdots \gamma^{x''_\rho}_{x_\rho} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} u \, z''_\rho \\
& - \Sigma \int dx_g \nabla^{\gamma_{g+1}}_{x_{g+1}} \cdots \gamma^{x'_\rho}_{x_\rho} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} u \, z'_\rho.
\end{aligned}$$

34. Enfin, nous partirons de cette dernière formule, et, en opérant comme dans l'article 32, nous en déduirons

$$\begin{aligned}
(56)\quad \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \cdots \nabla^{\gamma_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \frac{du}{dx_i} = {} & \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \cdots \nabla^{\gamma_{i-1}}_{x_{i-1}} \gamma^{x''_i}_{x_i} \nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} u \\
& - \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \cdots \nabla^{\gamma_{i-1}}_{x_{i-1}} \gamma^{x'_i}_{x_i} \nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} u \\
& - \Sigma \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \cdots \nabla^{\gamma_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}} \cdots \nabla^{\gamma_\rho}_{x_\rho} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho \\
& - \Sigma \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \cdots \nabla^{\gamma_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}} \cdots \gamma^{x''_\rho}_{x_\rho} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{\gamma_k} u z''_\rho \\
& - \Sigma \nabla^{\gamma_k}_{x_k} \cdots \nabla^{\gamma_{i-1}}_{x_{i-1}} \int dx_i \nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}} \cdots \gamma^{x'_\rho}_{x_\rho} \cdots \nabla^{\gamma_k}_{x_k} u z'_\rho
\end{aligned}$$

dans laquelle Σ indique qu'il faut prendre la somme des termes que l'on peut trouver, en prenant successivement le nombre $i+1$, $i+2, \ldots, k$, pour valeur de ρ.

Si, dans cette dernière formule, on remplace u par $u\,\theta$, on en déduira la suivante :

$$
\begin{aligned}
(57)\quad \nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}}\int dx_i\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\,u\,\frac{d\theta}{dx_i} &= -\nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}}\int dx\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\frac{du}{dx}\,\theta \\
&\quad+\nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}}\,\eta_{x_i}^{x''_i}\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\,u\;\theta \\
&\quad-\nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}}\,\eta_{x_i}^{x'_i}\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\,u\;\theta \\
&\quad-\Sigma\,\nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}}\int dx_i\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_s}^{y_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\frac{du}{dx_i}\;\theta\,z_\rho \\
&\quad-\Sigma\,\nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i-1}}^{y_{i-1}}\int dx_i\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_s}^{y_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\,u\,\frac{d\theta}{dx_i}\,z_\rho \\
&\quad-\Sigma\,\nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\int dx_i\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_s}^{y_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\,u\;\theta\;z'_\rho \\
&\quad-\Sigma\,\nabla_{x_h}^{y_h}\cdots\nabla_{x_{i+1}}^{x_{i+1}}\int dx_i\,\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\cdots\nabla_{x_s}^{y_\rho}\cdots\nabla_{x_k}^{y_k}\,u\;\theta\;z_\rho
\end{aligned}
$$

Cette dernière formule renferme comme cas particulier les différentes formules contenues dans les articles précédents de ce même paragraphe. Elle sera de peu d'utilité dans les applications; par contre, elle nous paraît indispensable pour la démonstration des règles de notre troisième chapitre.

6.

35. Nous avons encore à trouver sous quelles conditions il peut être permis d'intervertir des signes de substitution, tel que $\eta_{x_\rho}^{y_\rho}$, soit entre eux, soit avec des signes d'intégration.

Soit donc pour un moment $F(x_\mu, x_\rho)$ une fonction quelconque de x_μ, x_ρ, et s'il y a lieu des autres variables indépendantes; nous supposons d'ailleurs $\rho > \mu$. Cela posé :

D'après les conventions de l'article 5, nous aurons :

$$\eta_{x_\rho}^{x_\rho} F(x_\mu, x_\rho) = F(x_\mu, y_\rho),$$

et, par suite (article 14),

$$1_{x_\mu}^{y_\mu}\, 1_{x_\rho}^{y_\rho}\, F(x_\mu,\ x_\rho) = F(y_\mu,\ 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, y_\rho).$$

Un nouveau calcul semblable au précédent nous donnerait :

$$1_{x_\rho}^{q}\, 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, F(x_\mu,\ x_\rho) = F\left(1_{x_\rho}^{q}\, y_\mu,\ q\right).$$

Mais comme nous avons supposé μ moindre que ρ, la fonction y_μ doit être indépendante, et par suite nous devons avoir (article 5)

$$1_{x_\rho}^{q}\, y_\mu = y_\mu.$$

Dès lors le dernier résultat se réduit à

$$1_{x_\rho}^{q}\, 1_{x_\mu}^{x_\mu}\, F(x_\mu,\ x_\rho) = F(y_\mu,\ q).$$

Si donc on veut que ce dernier résultat soit égal à celui des premières substitutions, il suffira de prendre q de telle manière que

$$q = 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, y_\rho, \tag{58}$$

et moyennant cette condition il viendra

$$1_{x_\rho}^{q}\, 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, F(x_\mu,\ x_\rho) = 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, 1_{x_\rho}^{x_\rho}\, F(x_\mu,\ x_\rho),$$

ou bien

$$1_{x_\mu}^{y_\mu}\, u = 1_{x_\mu}^{y_\mu}\, 1_{x_\rho}^{y_\rho}\, u \tag{59}$$

36. Après cela faisons pour abréger :

$$\frac{d\, F(y_\mu,\ x_\rho)}{dx_\rho} = \psi(x_\mu,\ x_\rho)$$

alors, en observant que y_μ est indépendante de x_ρ, dous aurons :

$$\frac{d\, F(y_\mu,\ x_\rho)}{dx_\rho} = \psi(y_\mu,\ x_\rho)$$

Multiplions les deux membres de ces deux équations par dx_ρ et intégrons dans la première depuis $x_\rho = x'_\rho$ jusqu'à $x_\rho = x''_\rho$, dans la seconde depuis $x_\rho = q'$ jusqu'à q; cela nous donnera,

$$F(x_\mu, x''_\rho) - F(x_\mu, x'_\rho) = \int \psi(x_\mu, x_\rho)\, dx_\rho$$

$$F(y_\mu, q'') - F(y_\mu, q') = \int_{q'}^{q''} \psi(y_\mu, x_\rho)\, dx_\rho$$

et comme l'on a identiquement (article 14)

$$\gamma_{x_\mu}^{y_\mu}\left(F(x_\mu, x''_\rho) - F(x_\mu, x'_\rho)\right) = F(y_\mu, \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} x''_\rho) - F(y_\mu, \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} x'_\rho),$$

on voit que, si l'on prend

$$q' = \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} x'_\rho,\ q'' = \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} x''_\rho, \tag{60}$$

l'on aura en même temps

$$\gamma_{x_\mu}^{y_\mu} \int \psi(x_\mu, x_\rho)\, dx_\rho = \int_{q'}^{q''} \psi(y_\mu, x_\rho)\, dx_\rho,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\gamma_{x_\mu}^{y_\mu} \int \psi(x_\mu, x_\rho)\, dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho\, \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} \varphi(x_\mu, x_\rho)\, u,$$

ou bien sous la forme

$$\gamma_{x_\mu}^{y_\mu} \int u\, dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho\, \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} u. \tag{61}$$

Toutefois, on ne devra pas perdre de vue que cela n'a lieu qu'autant que les limites auxiliaires q', q'' sont déterminées au moyen des équations ci-dessus :

$$q' = \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} x'_\rho,\ q'' = \gamma_{x_\mu}^{y_\mu} x''_\rho. \tag{60}$$

37. En partant de la formule 61, et suivant une marche que nous avons déjà suivie dans plusieurs paragraphes, on trouvera que l'expression

$$\int dx_q \dots \int dx_h \; \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_i}^{\gamma_i} \int dx_i \dots \int dx_k \; \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_z}^{\gamma_z} \int dx_z \dots \int dx_m$$

peut être remplacée par :

$$(62) \quad \int_{x'''_q}^{x^{IV}_q} dx_q \dots \int_{x'''_{h-1}}^{x^{IV}_{h-1}} dx_h \int_{x'''_i}^{x^{IV}_i} dx_i \dots \int_{x'''_{k-1}}^{x^{IV}_{k-1}} dx_k \int_{x'''_z}^{x^{IV}_z} dx_z \dots \int_{x'''_m}^{x^{IV}_m} \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} u$$

pourvu que l'on détermine les limites auxiliaires qui entrent dans cette dernière expression, au moyen des équations :

$$\begin{aligned}
x'_q &= x'_q, & x^{IV}_q &= x''_q,\\
x'''_{q+1} &= x'_{q+1}, & x^{IV}_{q+1} &= x''_{q+1},\\
&\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\\
x'''_{h-1} &= u'_{h-1}; & x^{IV}_{h-1} &= x''_{h-1};\\
x''_i &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_i}^{\gamma_i} x'_i, & x^{IV}_i &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_i}^{\gamma_i} x''_i,\\
x'''_{i+1} &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} x'_{i+1}, & x^{IV}_{i+1} &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} x''_{i+1},\\
&\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots\\
x'''_{k-1} &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} x'_{k-1}; & x^{IV}_{k-1} &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots x'_{k-1};\\
x'''_z &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} x'_z & x^{IV}_z &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} x''_z,\\
x'''_{z+1} &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} x'_{z+1} & x^{IV}_{z+1} &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} x''_{z+1},\\
&\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots\\
x'''_m &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} x'_m & x^{IV}_m &= \tau_{x_h}^{\gamma_h} \dots \tau_{x_{i-1}}^{\gamma_{i-1}} \tau_{x_k}^{\gamma_k} \dots \tau_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} x''_m.
\end{aligned}$$

On pourra transformer d'une manière analogue toute expression qui renfermera des signes de substitution, tels que $\tau_{x_p}^{\gamma_p}$, $\tau_{x_p}^{\gamma_p'}$, $\tau_{x_p}^{\gamma_p''}$, ... entremêlés de signes d'intégration; comme cette extension ne présente aucune difficulté, nous ne croyons pas devoir nous en occuper, et nous passerons à d'autres recherches.

7.

38. Nous avons encore à faire connaître quelques moyens de simplification qui sont applicables dans un grand nombre de circonstances.

D'abord, les formules (articles 35 et 36)

$$\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,\gamma_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,u = \gamma_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,u$$

$$\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\int u dx_\rho = \int_{q'}^{q} dx_\rho\,\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,u$$

montrent que les deux expressions

$$\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,\gamma_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,u \text{ et } \gamma_{x_\alpha}^{\gamma_\mu}\int u dx_\rho$$

sont nulles l'une et l'autre toutes les fois que $\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,u$ est elle-même égale à zéro.

Mais nous avons identiquement

$$\nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,u = \alpha_\rho\,\gamma_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,u + \beta_\rho\int u dx_\rho$$

et par suite

$$\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,\nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,u = \alpha_\rho\,\gamma_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,u + \beta_\rho\,\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\int u dx_\rho.$$

Nous pouvons donc en conclure que l'on aura encore

$$\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,\nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho}\,u = 0, \tag{63}$$

si l'on a

$$\gamma_{x_\mu}^{\gamma_\mu}\,u = 0. \tag{64}$$

39. D'après ce que nous venons de voir, l'expression

$$\gamma_{x_s}^{\gamma_s}\,\nabla_{x_{s+1}}^{\gamma_{s+1}}\,\nabla_{x_{s+2}}^{\gamma_{s+2}}\ldots\nabla_{x_m}^{\gamma_m}\,u,$$

sera nulle si

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} \nabla_{x_{z+2}}^{\gamma_{z+2}} \nabla_{x_{z+3}}^{\gamma_{z+3}} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} u$$

est elle-même égale à zéro; ce qui aura lieu si

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} \nabla_{x_{z+3}}^{\gamma_{z+3}} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} u,$$

est elle-même égale à zéro : et ainsi de suite, nous pouvons donc en conclure que si

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} u = 0,$$

l'on doit avoir

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} \nabla_{x_{z+1}}^{\gamma_{z+1}} \nabla_{x_{z+2}}^{\gamma_{z+2}} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} u = 0, \tag{65}$$

et plus généralement

$$\nabla_{x_k}^{\gamma_k} \dots \nabla_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} \gamma_{x_z}^{\gamma_z} \nabla_{x_{z+1}}^{\gamma_{z+1}} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} u = 0. \tag{66}$$

40. Nous savons (article 14) que

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} uv = \gamma_{x_z}^{\gamma_z} u \,.\, \gamma_{x_z}^{\gamma_z} v.$$

(67) Si donc on a

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} v = 0,$$

on aura aussi

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} uv = 0,$$

et par suite, d'après les deux formules du dernier article,

$$\gamma_{x_z}^{\gamma_z} \nabla_{x_{z+1}}^{\gamma_{z+1}} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} uv = 0, \tag{68}$$

$$\nabla_{x_k}^{\gamma_k} \dots \nabla_{x_{z-1}}^{\gamma_{z-1}} \gamma_{x_z}^{\gamma_z} \nabla_{x_{z+1}}^{\gamma_{z+1}} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} uv = 0. \tag{69}$$

41. En observant que y_z ne renferme pas la variable x_z, nous aurons identiquement

$$\gamma_{x_z}^{y_z}(\mathrm{F}x_z - \mathrm{F}y_z) = \mathrm{F}y_z - \mathrm{F}y_z = 0,$$

ou bien

$$\gamma_{x_z}^{y_z}\left(p - \gamma_{x_z}^{y_z} p\right) = 0.$$

Si donc on pose

$$p = \gamma_{x_z}^{y_z} p + v,$$

il viendra

$$\gamma_{x_z}^{y_z} v = 0;$$

mais d'un autre côté, en remplaçant p par $\gamma_{x_z}^{y_z} p + v$ dans l'expression

$$\nabla_{x_k}^{y_k} \ldots \nabla_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} \gamma_{x_z}^{y_z} \nabla_{x_{z+1}}^{y_{z+1}} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} up,$$

elle se change en

$$\nabla_{x_k}^{y_k} \ldots \nabla_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} \gamma_{x_z}^{y_z} \nabla_{x_{z+1}}^{y_{z+1}} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} \left(u \gamma_{x_z}^{y_z} p\right)$$
$$+ \nabla_{x_k}^{y_k} \ldots \nabla_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} \gamma_{x_z}^{y_z} \nabla_{x_{z+1}}^{y_{z+1}} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} uv,$$

dont la seconde partie est nulle, puisque $\gamma_{x_z}^{y_z} v = 0$ (formule 69). Nous aurons donc identiquement

$$(70)\quad \nabla_{x_k}^{y_k} \ldots \nabla_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} \gamma_{x_z}^{y_z} \nabla_{x_{z+1}}^{y_{z+1}} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} up = \nabla_{x_k}^{y_k} \ldots \nabla_{x_{z-1}}^{y_{z-1}} \gamma_{x_z}^{y_z} \nabla_{x_{z+1}}^{y_{z+1}} \ldots \nabla_{x_m}^{y_m} \left(u \gamma_{x_k}^{y_z} p\right).$$

42. Nous conclurons de cette dernière formule que si deux fonctions p, q, donnent

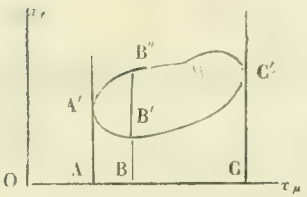
$$(71)\quad \gamma_{x_z}^{y_z} p = \gamma_{x_z}^{y_z} q,$$

elles donneront encore

$$(72.)\quad \nabla^{y_1}_{x_1}\dots\nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}}\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\dots\nabla^{y_m}_{x_m}up = \nabla^{y_1}_{x_1}\dots\nabla^{y_{i-1}}_{x_{i-1}}\nabla^{y_i}_{x_i}\nabla^{y_{i+1}}_{x_{i+1}}\dots\nabla^{y_m}_{x_m}uq.$$

43. Pour un moment, nous regarderons comme constantes les différentes variables indépendantes autres que x_μ et x_ρ, et nous comparerons ces dernières aux coordonnées orthogonales des différents points qui peuvent être renfermés dans une certaine courbe rentrante; alors, en supposant l'indice $\rho > \mu$, les cordes de cette courbe, parallèles à l'axe de x_ρ, auront pour valeur la différence $x''_\rho - x'_\rho$. Cela posé :

Figure 1.

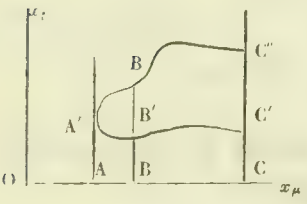


Ordinairement les coordonnées extrêmes AA′, CC′, seront tangentes à la courbe : on aura donc alors (fig. 1)

$$\text{pour } x_\mu = x'_\mu,\ x'_\rho = x''_\rho,$$
$$\text{pour } x_\mu = x''_\mu,\ x'_\rho = x''_\rho,$$

c'est-à-dire

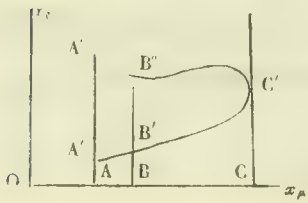
Figure 2.



$$1^{x'_\mu}_{x_\mu}x'_\rho = 1^{x'_\mu}_{x_\mu}x''_\rho,\quad 1^{x'_\mu}_{x_\mu}x'_\rho = 1^{x'_\mu}_{x_\mu}x''_\rho.$$

Parfois, cependant, il arrivera que la première ordonnée AA′ sera seule tangente à la courbe (fig. 2); alors on aura, comme dans le premier cas,

Figure 3.



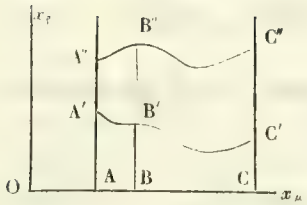
$$1^{x'_\mu}_{x_\mu}x'_\rho = 1^{x'_\mu}_{x_\mu}x''_\rho;$$

mais l'autre égalité n'aura pas lieu.

D'autres fois, il arrivera que la dernière ordonnée CC′ sera seule tangente

à la courbe (fig. 3); alors on aura, comme dans le premier cas,

Figure 3.



$$\mathcal{T}^{x''_\mu}_{x_\mu} x'_\rho = \mathcal{T}^{x''_\mu}_{x_\mu} x''_\rho ;$$

mais l'autre égalité du premier cas n'aura pas lieu.

Enfin, il pourra se faire que les deux ordonnées extrêmes ne touchent la courbe ni l'une ni l'autre, et qu'une partie de ces ordonnées soit nécessaire pour fermer cette courbe à chaque extrémité. Dans ce cas, aucune des relations précédentes n'aura lieu.

44. Maintenant, nous ferons observer que, d'après la formule 61 (article 36), on a

$$\mathcal{T}^{x'_\mu}_{x_\mu} \int u dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho \, \mathcal{T}^{x'_\mu}_{x_\mu} u ,$$

pourvu que l'on prenne

$$q' = \mathcal{T}^{x'_\mu}_{x_\mu} x'_\rho \qquad q'' = \mathcal{T}^{x'_\mu}_{x_\mu} x''_\rho .$$

Nous en conclurons que, dans le premier et le second cas du dernier article, q' doit égaler q''; que, par suite, l'intégrale

$$\int_{q'}^{q''} dx_\rho \, \mathcal{T}^{x'_\mu}_{x_\mu} u = 0 ;$$

et que, par conséquent,

$$\mathcal{T}^{x'_\mu}_{x_\mu} \int u dx_\rho = 0. \tag{73}$$

Après cela, nous comparerons ce dernier résultat avec la for-

mule 66 de l'article 39, et nous trouverons que, dans le premier et le second cas du dernier article, l'on doit avoir

$$\nabla^{y_i}_{x_i} \ldots \nabla^{y_{\mu-1}}_{x_{\mu-1}} 1^{x'_\mu}_{x_\mu} \nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}} \ldots \nabla^{y_{\rho-1}}_{x_{\rho-1}} \int u dx_\rho = 0,$$

et que par suite, en remplaçant u par $\nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} u$, l'on doit avoir dans chacun de ces cas

$$74 \quad \nabla^{y_i}_{x_i} \ldots \nabla^{y_{\mu-1}}_{x_{\mu-1}} 1^{x'_\mu}_{x_\mu} \nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}} \ldots \nabla^{y_{\rho-1}}_{x_{\rho-1}} \int dx_\rho \nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} u = 0.$$

45. Nous ferons observer encore que, d'après la même formule 66 (article 39), l'on a pareillement

$$1^{x_\mu}_{x_\mu} \int u dx_\rho = \int_{q'}^{q''} dx_\rho \, 1^{x''_\mu}_{x_\mu} u,$$

pourvu que l'on prenne

$$q' = 1^{x''_\mu}_{x_\mu} x'_\rho \qquad q'' = 1^{x''_\mu}_{x_\mu} x''_\rho;$$

nous partirons de là, et, par un raisonnement semblable à celui du dernier article, nous trouverons que, dans les premier et troisième cas de l'article 43, l'on doit avoir

$$75 \quad \nabla^{y_i}_{x_i} \ldots \nabla^{y_{\mu-1}}_{x_{\mu-1}} 1^{x'_\mu}_{x_\mu} \nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}} \ldots \nabla^{y_{\rho-1}}_{x_{\rho-1}} \int dx_\rho \nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}} \ldots \nabla^{y_k}_{x_k} u = 0.$$

46. Nous ferons observer encore que, d'après la formule 59 (article 35), l'on a

$$1^{x'_\mu}_{x_\mu} 1^{x'_\rho}_{x_\rho} u = 1^{r'}_{x_\rho} 1^{x'_\mu}_{x_\mu} u, \quad 1^{x'_\mu}_{x_\mu} 1^{x''_\rho}_{x_\rho} u = 1^{r''}_{x_\rho} 1^{x'_\mu}_{x_\mu} u,$$

pourvu que l'on prenne

$$r' = 1^{x_\mu}_{x_\mu} x'_\rho \text{ et } r'' = 1^{x'_\mu}_{x_\mu} x''_\rho.$$

Nous en conclurons que, dans le premier et le second cas de l'article 43, l'on doit avoir

$$(76)\qquad \gamma^{x'_\mu}_{x_\mu}\,\gamma^{x'_\rho}_{x_\rho}\,u = \gamma^{x'_\mu}_{x_\mu}\,\gamma^{x''_\rho}_{x_\rho}\,u.$$

Après cela, nous comparerons ce résultat avec les formules 71 et 72 de l'article 40, et nous trouverons que l'on doit avoir, dans ce premier et ce second cas de l'article 43,

$$(77)\qquad \begin{aligned}&\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\nabla^{y_{\mu-1}}_{x_{\mu-1}}\gamma^{x'_\mu}_{x_\mu}\nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}}\ldots\nabla^{y_{\rho-1}}_{x_{\rho-1}}\gamma^{x'_\rho}_{x_\rho}\nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\\ =&\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\nabla^{y_{\mu-1}}_{x_{\mu-1}}\gamma^{x'_\mu}_{x_\mu}\nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}}\ldots\nabla^{y_{\rho-1}}_{x_{\rho-1}}\gamma^{x''_\rho}_{x_\rho}\nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u.\end{aligned}$$

47. Par un raisonnement semblable, nous prouverions que, dans le premier et le troisième cas de l'article 43, on doit avoir d'abord

$$\gamma^{x''_\mu}_{x_\mu}\,\gamma^{x'_\rho}_{x_\rho}\,u = \gamma^{x''_\mu}_{x_\mu}\,\gamma^{x''_\rho}_{x_\rho}\,u,$$

et, par suite,

$$(78)\qquad \begin{aligned}&\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\nabla^{y_{\mu-1}}_{x_{\mu-1}}\gamma^{x''_\mu}_{x_\mu}\nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}}\ldots\nabla^{y_{\rho-1}}_{x_{\rho-1}}\gamma^{x'_\rho}_{x_\rho}\nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u\\ =&\nabla^{y_i}_{x_i}\ldots\nabla^{y_{\mu-1}}_{x_{\mu-1}}\gamma^{x''_\mu}_{x_\mu}\nabla^{y_{\mu+1}}_{x_{\mu+1}}\ldots\nabla^{y_{\rho-1}}_{x_{\rho-1}}\gamma^{x''_\rho}_{x_\rho}\nabla^{y_{\rho+1}}_{x_{\rho+1}}\ldots\nabla^{y_k}_{x_k}u.\end{aligned}$$

48. Nous pourrions appliquer les diverses simplifications dont nous venons de parler aux différentes formules que nous avions données auparavant; mais comme cela ne présente aucune difficulté, et que d'ailleurs nous n'en ferons aucun usage dans le travail qui nous occupe en ce moment, nous nous dispenserons d'écrire les résultats que l'on obtiendrait ainsi, et nous terminerons notre premier chapitre pour passer au calcul direct des variations.

CHAPITRE II.

I.

49. Dans ce chapitre, nous conserverons les différentes notations du premier, mais avec les modifications suivantes :

1° Le paramètre t ne sera plus un de ceux qui peuvent entrer dans les diverses fonctions qui appartiennent à la question que l'on veut résoudre; ce sera un paramètre auxiliaire tout à fait indépendant des premiers, et qui n'entrera que dans certaines fonctions auxiliaires dont nous parlerons dans un moment.

2° Les diverses quantités constantes ou variables qui appartiennent à la question que l'on veut résoudre seront *exclusivement* désignées par des lettres minuscules, comme

$$a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots,$$

affectées, s'il le faut, d'accents ou d'indices.

3° Quant aux lettres majuscules, comme

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R},$$

soit simples, soit affectées d'indices ou d'accents, elles seront *exclusivement* réservées pour désigner des fonctions auxiliaires qui devront être telles, qu'en faisant $t = 0$, il vienne identiquement

$$\mathrm{A} = a, \ \mathrm{B} = b, \ \mathrm{C} = c, \ldots \mathrm{P} = p, \ \mathrm{Q} = q, \ \mathrm{R} = r, \ldots,$$

et qui, de plus, devront encore être telles que si, par la nature de la question que l'on veut résoudre, certaines relations con-

nues doivent exister entre les diverses quantités primitives $a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots$, les mêmes relations devront avoir encore lieu entre les auxiliaires correspondantes A, B, C, ... P, Q, R, ..., ainsi que nous allons l'expliquer dans les articles suivants.

50. Les variables X, X_1, X_2, ... X_n, devront se réduire respectivement à x, x_1, x_2, ... x_n, quand on fera $t = 0$; à cela près, elles devront être supposées aussi générales que la question proposée pourra le permettre. D'ailleurs, quand il s'agira des autres auxiliaires, *elles devront jouer le rôle de variables indépendantes.*

51. Les paramètres $a, b, c, \ldots$ étant indépendants de x, x_1, x_2, ... x_n, les paramètres auxiliaires correspondants A, B, C, ... devront pareillement être indépendants de X, X_1, X_2, ... X_n.

52. Si, par cas, une des fonctions primitives p est telle que l'on ait

$$p = f(a, b, c, \ldots x, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

on devra prendre

$$P = f(A, B, C, \ldots X, X_1, X_2, \ldots X_n) + \varphi(t, X, X_1, X_2, \ldots X_n),$$

en désignant par $\varphi(t, X, X_1, X_2, \ldots X_n)$ une fonction telle, qu'en faisant $t = 0$ il vienne identiquement

$$\varphi(0, x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

53. Si, par cas, une fonction d'une forme connue u renferme déjà une ou plusieurs fonctions de x, x_1, x_2, ... x_n, comme, par exemple,

$$u = F(a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots x, x_1, x_2, \ldots x_n),$$

on devra prendre

$$U = F(A, B, C, \ldots P, Q, R, \ldots X, X_1, X_2, \ldots X_n).$$

54. Si, par cas, l'on a

$$v = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots} u}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\cdots}$$

on devra prendre

$$V = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots} U}{dX^{\mu}\, dX_1^{\mu'}\, dX_2^{\mu''}\cdots}$$

55. Si, par cas, l'on a

$$w = \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int u dx_n$$

on devra prendre

$$W = \int_{X'}^{X''} dX \int_{X'_1}^{X''_1} dX_1 \int_{X'_2}^{X''_2} dX_2 \ldots \int_{X'_n}^{X''_n} U dX_n;$$

d'ailleurs, l'auxiliaire W devra être une fonction définie comme w, ce qui exige que

Les limites X'_n et X''_n de X_n soient des fonctions de t, X, X_1, X_2, ... X_{n-1}, mais indépendantes de X_n;

Que les limites X'_{n-1}, X''_{n-1} de X_{n-1}, soient des fonctions de t, X, X_1, X_2... X_{n-2}, mais indépendantes de X_{n-1}, X_n;

Et ainsi de suite jusqu'aux limites X' et X'' de X, qui devront être des fonctions de t, mais indépendantes des variables X, X_1, X_2... X_n.

56. Si, par cas, l'on avait

$$u = \int dx_i \int dx_{i+1} \ldots \int v dx_k,$$

on devrait prendre

$$U = \int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} V dx_k;$$

les limites

$$X'_i,\ X''_i,\ X'_{i+1},\ X''_{i+1},\ \ldots\ X'_k,\ X''_k,$$

étant les mêmes que dans le dernier article.

57. De même encore, si l'on avait

$$u = \mathcal{T}_{x_i}^{y_i}\,\mathcal{T}_{x_{i+1}}^{y_{i+1}}\ldots\mathcal{T}_{x_k}^{y_k}\,v,$$

on devrait prendre

$$U = \mathcal{T}_{X_i}^{Y_i}\,\mathcal{T}_{X_{i+1}}^{Y_{i+1}}\ldots\mathcal{T}_{X_k}^{Y_k}\,V$$

en déterminant les auxiliaires $Y_i,\ Y_{i+1},\ Y_{i+2}\ldots Y_k$, d'après les règles précédentes.

Et ainsi de suite, quelle que puisse être la fonction auxiliaire que l'on puisse avoir à former. D'ailleurs, à part les restrictions que nous venons de signaler, les fonctions auxiliaires devront être supposées aussi générales que la question pourra le permettre.

2.

58. Maintenant, supposons pour un moment que W exprime une quelconque des fonctions auxiliaires dont nous venons de parler; supposons encore que l'on calcule les dérivées

$$\frac{dW}{dt},\ \frac{d^2W}{dt^2},\ \frac{d^3W}{dt^3},\ \ldots$$

En faisant varier tout ce qui peut dépendre de t, supposons, enfin, que dans les résultats obtenus on fasse $t = 0$. On trouvera ainsi des valeurs particulières de ces résultats, que nous désignerons respectivement par

$$\delta w,\ \delta^2 w,\ \delta^3 w,\ \ldots.$$

et auxquelles nous donnerons le nom de *variations* du 1^er^, du 2^e^, du 3^e^, ... ordre de la fonction w.

59. Supposons, en second lieu, que l'on calcule les dérivées

$$\frac{dW}{dt}, \quad \frac{d^2W}{dt^2}, \quad \frac{d^3W}{dt^3}, \ldots$$

En traitant celles des variables X, X_1, X_2 ... X_n, qui peuvent entrer dans la fonction W, comme si elles étaient indépendantes du paramètre auxiliaire t; supposons encore qu'après avoir calculé les résultats, on fasse de nouveau $t = 0$: on parviendra ainsi à des espèces de *variations tronquées* que nous désignerons respectivement par

$$\overline{\delta} w, \quad \overline{\delta}^2 w, \quad \overline{\delta}^3 w, \ldots .$$

C'est-à-dire en couronnant d'un trait la caractéristique ordinaire des variations.

Il va, d'ailleurs, sans dire que les signes δ et $\overline{\delta}$ sont de simples caractéristiques indépendantes de la nature de la fonction w.

60. Quelle que puisse être la fonction W que nous venons de considérer, si l'on effectuait les diverses opérations de calcul nécessaires pour parvenir à sa valeur sous forme explicite, elle se réduirait à une fonction ordinaire de t, X, X_1, X_2... X_n, et l'on aurait identiquement

$$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{dW}{dt}\right) + \frac{dW}{dX}\frac{dX}{dt} + \frac{dW}{dX_1}\frac{dX_1}{dt} + \ldots + \frac{dW}{dX_n}\frac{dX_n}{dt},$$

en désignant par $\left(\frac{dW}{dt}\right)$ la dérivée de W par rapport à t, calculée comme si X, X_1, X_2 ... X_n ne dépendaient point de ce paramètre

Maintenant, si l'on fait $t = 0$, les dérivées

$$\frac{dW}{dt}, \quad \frac{dX}{dt}, \quad \frac{dX_1}{dt}, \ldots . \quad \frac{dX_n}{dt},$$

se réduiront respectivement à

$$\delta w,\ \delta x,\ \delta x_1,\ \ldots\ \delta x_n,$$

les dérivées partielles

$$\left(\frac{d\mathrm{W}}{dt}\right),\ \frac{d\mathrm{W}}{dx},\ \frac{d\mathrm{W}}{dx_1},\ \ldots\ \frac{d\mathrm{W}}{d\mathrm{X}_n},$$

se réduiront respectivement à

$$\overline{\delta w},\ \frac{dw}{dx},\ \frac{dw}{dx_1},\ \ldots\ \frac{dw}{dx_n};$$

nous devrons donc avoir

$$(1)\qquad \delta w = \overline{\delta w} + \frac{dw}{dx}\,\delta x + \frac{dw}{dx_1}\,\delta x_1 + \ldots + \frac{dw}{dx_n}\,\delta x_n.$$

61. On voit par notre dernière formule que tout se réduit au calcul des variations tronquées. C'est donc de ces dernières que nous allons nous occuper; mais auparavant nous ferons observer que si une fonction quelconque y_ρ ne doit pas dépendre des variables $x_\rho,\ x_{\rho+1},\ x_{\rho+2}\ldots x_n$, l'on aura identiquement

$$(2)\quad \delta y_\rho = \overline{\delta y_\rho} + \frac{dy_\rho}{dx}\,\delta x + \frac{dy_\rho}{dx_1}\,\delta x_1 + \ldots + \frac{dy_\rho}{dx_{\rho-1}}\,\delta x_{\rho-1},$$

puisque les dérivées suivantes :

$$\frac{dy_\rho}{dx_\rho},\ \frac{dy_{\rho+1}}{dx_{\rho+1}},\ \ldots\ \frac{dy_\rho}{dx_n},$$

seront nulles.

De même, si w est une *expression définie*, c'est-à-dire une expression telle qu'elle ne dépend plus des valeurs intermédiaires des variables indépendantes, comme sont, par exemple, les intégrales définies, l'on aura identiquement

$$(3)\qquad \delta w = \overline{\delta w},$$

puisque, dans ce cas, les dérivées

$$\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dx_1}, \frac{dw}{dx_2}, \ldots \frac{dw}{dx_n},$$

sont identiquement nulles.

3.

62. Pour commencer le développement du calcul des variations tronquées, nous supposerons que l'on a

$$u = \mathrm{F}(a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots x, x_1, x_2, \ldots x_n);$$

alors on devra prendre (article 53)

$$\mathrm{U} = \mathrm{F}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \ldots \mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots \mathrm{X}_n):$$

dès lors, en différentiant comme si $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_n$ ne dépendaient point de t, nous aurons

$$\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{A}}\frac{d\mathrm{A}}{dt} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{B}}\frac{d\mathrm{B}}{dt} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{C}}\frac{d\mathrm{C}}{dt} + \ldots$$
$$+ \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{P}}\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{dt} + \ldots$$

et par suite, en faisant $t = 0$, il viendra

$$(4) \qquad \overline{\delta}\, u = \frac{du}{da}\overline{\delta} a + \frac{du}{db}\overline{\delta} b + \frac{du}{dc}\overline{\delta} c + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dp}\overline{\delta} p + \frac{du}{dq}\overline{\delta} q + \frac{du}{dr}\overline{\delta} r + \ldots$$

63. Supposons, en second lieu, que l'on ait

$$v = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots} p}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''} \ldots};$$

dans ce cas, on devra prendre (article 54)

$$V = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots} P}{dX^{\mu}\, dX_1^{\mu'}\, dX_2^{\mu''}\ldots};$$

par suite, en différentiant par rapport à t comme si X, X_1, X_2,... X_n ne dépendaient point de ce paramètre, l'on aura

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\dfrac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots} P}{dX^{\mu}\, dX_1^{\mu'} + dX_2^{\mu''}\cdots}}{dt} = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots}\dfrac{dP}{dt}}{dX^{\mu}\, dX_1^{\mu'}\, dX_2^{\mu''}\ldots};$$

et par conséquent, en faisant $t = 0$, il viendra

$$(5) \qquad \bar{\delta} v = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\cdots+\bar{\delta}p}}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu''}\, dx_2^{\mu''}\ldots}.$$

64. Supposons encore que l'on ait

$$v = \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \int u dx_k;$$

dans ce cas, on devra prendre

$$V = \int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} U\, dX_k.$$

Dès lors, en différentiant, par rapport à t, comme si X, X_1, X_2.. X_n, ne dépendaient point de ce paramètre, on trouvera par un calcul semblable à celui du paragraphe 2, chapitre II:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = &\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k \frac{dU}{dt} \\ &+ \int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} dX_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} dX_{i+2} \ldots \gamma_{X'_k}^{X''_k} U \frac{dX''_k}{dt} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$+\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} d\overline{X}_{i+1}\, \gamma_{X_{i+2}}^{X''_{i+2}} \cdots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{d\overline{X}''_{i+2}}{dt}$$

$$+\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i\, \gamma_{X_{i+1}}^{X''_{i+1}} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} d\overline{X}_{i+2} \cdots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX''_{i+2}}{dt}$$

$$+\gamma_{X_i}^{X''_i} \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} d\overline{X}_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} d\overline{X}_{i+2} \cdots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX''_i}{dt}$$

$$-\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} d\overline{X}_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} d\overline{X}_{i+2} \cdots\cdots \gamma_{X_k}^{X'_k}\, U\, \frac{dX'_k}{dt}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} d\overline{X}_{i+1}\, \gamma_{X_{i+2}}^{X'_{i+2}} \cdots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX'_{i+2}}{dt}$$

$$-\int_{X'_i}^{X''_i} dX_i\, \gamma_{X_{i+1}}^{X'_{i+1}} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} d\overline{X}_{i+2} \cdots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX'_{i+1}}{dt}$$

$$-\gamma_{X_i}^{X'_i} \int_{X'_{i+1}}^{X''_{i+1}} d\overline{X}_{i+1} \int_{X'_{i+2}}^{X''_{i+2}} d\overline{X}_{i+2} \cdots \int_{X'_k}^{X''_k} dX_k\, U\, \frac{dX'_i}{dt}$$

et en faisant $t = 0$, il viendra

$$(6)\qquad \overline{\delta}\, v = \int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \cdots \int dx_k\, \overline{\delta}\, u$$

$$+\int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \cdots \gamma_{x_k}^{x''_k}\, u\, \overline{\delta}\, x''_k$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int dx_i \int dx_{i+1}\, \gamma_{x_{i+2}}^{x''_{i+2}} \cdots \int dx_k\, u\, \overline{\delta}\, x''_{i+2}$$

$$+\int dx_i\, \gamma_{x_{i+1}}^{x''_{i+1}} \int dx_{i+2} \cdots \int dx_k\, u\, \overline{\delta}\, x''_{i+1}$$

$$+\gamma_{x_i}^{x''_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \cdots \int dx_k\, u\, \overline{\delta}\, x''_i$$

$$-\int dx_i \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \cdots \gamma_{x_k}^{x'_k}\, u\, \overline{\delta}\, x'_k$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \int dx_i \int dx_{i+1} \gamma_{x_{i+2}}^{x'_{i+2}} \ldots \int dx_k \, u \, \overline{\delta} \, x'_{i+2}$$

$$- \int dx_i \, \gamma_{x_{i+1}}^{x'_{i+1}} \int dx_{i+2} \ldots \int dx_k \, u \, \overline{\delta} \, x'_{i+1}$$

$$- \gamma_{x_i}^{x'_i} \int dx_{i+1} \int dx_{i+2} \ldots \int dx_k \, u \, \overline{\delta} \, x'_i .$$

65. En général, soit w une quelconque des fonctions qui entrent dans la question que l'on veut résoudre; soit W la fonction auxiliaire correspondante. Cela posé,

Supposons que, d'un côté, l'on calcule $\frac{dW}{dt}$, en traitant les variables X, X_1, $X_2 \ldots X_n$, comme si elles étaient indépendantes de t, et que, d'un autre côté, l'on calcule $\frac{dw}{dt}$, en traitant les diverses fonctions d qui peuvent entrer dans w comme si elles dépendaient de t.

Les deux résultats obtenus seront évidemment semblables et ne différeront l'un de l'autre que par la dimension des lettres. Lors donc que l'on fera $t = 0$, le premier ne différera du second qu'en ce que la caractéristique $\overline{\delta}$ remplacera la différentiation relative à t : de là résulte cette règle générale.

Pour trouver la variation tronquée d'une fonction quelconque w, on la différentiera, par rapport à t, comme si les quantités passibles de *variation* étaient des fonctions de ce paramètre; après cela, on changera les dérivées relatives à t en variations tronquées analogues.

66. Il est facile de vérifier la règle précédente sur chacun des exemples que nous venons de donner dans les articles précédents. Nous nous bornerons à l'appliquer à l'expression

$$\nabla_{x_i}^{y_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \nabla_{x_{i+2}}^{y_{i+2}} \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} u;$$

mais en supposant les α_i, β_i, α_{i+1}, $\beta_{i+1} \ldots \alpha_k$, β_k constantes, comme ne devant pas éprouver de variation.

Dans ce cas, la formule 51 du chapitre 1er nous donnera

$$(7)\quad \bar{\delta}\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u = \nabla^{\gamma_i}_{x_i}\nabla^{\gamma_{i+1}}_{x_{i+1}}\ldots\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}\bar{\delta}\,u$$
$$+\Sigma\,\alpha_i\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\ldots\gamma^{\gamma_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u\;{}_{(\rho,k)}\;\bar{\delta}\,\gamma_\rho$$
$$+\Sigma\,\beta_i\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\ldots\gamma^{x''_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u\qquad\bar{\delta}\,x''_\rho$$
$$-\Sigma\,\beta_i\,\nabla^{\gamma_i}_{x_i}\ldots\gamma^{x'_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_k}_{x_k}u\qquad\bar{\delta}\,x'_\rho.$$

4.

66. Il nous reste à rapprocher nos formules de celles qui sont déjà connues pour les intégrales doubles et triples, d'après lesquelles on se trouve conduit à faire

$$(8)\quad \delta\int dx\int dx_1\ldots\int dx_n = \int dx\int dx_1\ldots\int dx_n\left\{\delta\,u-\frac{du}{dx}\,\delta\,x-\frac{du}{dx_1}\,\delta\,x_1-\ldots-\frac{du}{dx_n}\,\delta\,x_n\right\}$$
$$+\int dx\int dx_1\ldots\int dx_n\left\{\frac{d.u\,\delta x}{dx}+\frac{d.u\,\delta x_1}{dx_1}+\ldots..\frac{d.u\,\delta x_n}{dx_n}\right\}.$$

67. D'abord, puisqu'il s'agit d'intégrales définies, nous aurons, d'après nos formules (article 61),

$$\delta\int dx\int dx_1\ldots.\int dx_n = \bar{\delta}\int dx\int dx_1\ldots\int dx_n,$$

dont les econd membre, calculé au moyen de la formule 6 (article 64), nous donnera

$$(9)\qquad \delta\int dx\int dx_1\ldots\int dx_n = \int dx\int dx_1\int dx_2\ldots\int dx_n\,\bar{\delta}\,u$$
$$+\gamma^{x''}_{x}\int dx_1\int dx_2\ldots.\int dx_n\,u\,\bar{\delta}\,x''$$
$$+\int dx\,\gamma^{x''_1}_{x_1}\int dx_2\ldots.\int dx_n\,u\,\bar{\delta}\,x''_1$$
$$+\int dx\int dx_1\,\gamma^{x''_2}_{x_2}\ldots.\int dx_n\,u\,\bar{\delta}\,x''_2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\int dx\int dx_1\int dx_2\ldots.\gamma^{x''_n}_{x_n}\,u\,\bar{\delta}\,x''_n$$

$$
\begin{aligned}
&- \gamma_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n \, u \, \overline{\delta} \, x' \\
&- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \ldots \int dx_n \, u \, \overline{\delta} \, x'_1 \\
&- \int dx_n \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x'_2} \ldots \int dx_n \, u \, \overline{\delta} \, x'_2 \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \gamma_{x_n}^{x'_n} \, u \, \overline{\delta} \, x'_n .
\end{aligned}
$$

Il suffit de faire voir que la formule 8 peut être ramenée à cette dernière forme.

68. Pour cela, nous ferons observer qu'au moyen de la formule 54 du chapitre 1er on peut transformer un terme de la forme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \frac{d.u\,\delta x_\rho}{dx_\rho},$$

en

$$
\begin{aligned}
&\int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \gamma_{x_\rho}^{x''_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \gamma_{x_{\rho+1}}^{x''_{\rho+1}} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n u \, \delta x_\rho . \frac{dx''_{\rho+1}}{dx} \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \gamma_{x_{\rho+2}}^{x''_{\rho+2}} \ldots \int dx_n u \, \delta x_\rho \frac{dx''_{\rho+2}}{dx_\rho} \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \gamma_{x_n}^{x''_n} u \, \delta x_\rho \frac{dx''_n}{dx_\rho} \\
&- \int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \gamma_{x_\rho}^{x'_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \\
&+ \int dx \ldots \int dx_{\rho+1} \int dx_\rho \gamma_{x_{\rho+1}}^{x'_{\rho+1}} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho \frac{dx'_{\rho+1}}{dx_\rho} \\
&+ \int dx \ldots \int dx_{\rho+1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \gamma_{x_{\rho+2}}^{x'_{\rho+2}} \ldots \int dx_n u \, \delta x_\rho \frac{dx'_{\rho+2}}{dx_\rho} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int dx \ldots \int dx_{\rho+1} \int dx_\rho \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \gamma_{x_n}^{x'_n} u \, \delta x_\rho \frac{dx'_n}{dx_\rho}
\end{aligned}
$$

En outre, d'après la formule 70 du chapitre 1er, la variation δx_ρ peut être remplacée dans ce terme

$$\int dx \ldots \int dx_{\rho-1} \gamma_{x_\rho}^{x''_\rho} \int dx_{\rho+1} \int dx_{\rho+2} \ldots \int dx_n \, u \, \delta x_\rho$$

par $\mathcal{T}^{x_\rho}_{x_\rho}\,\delta x_\rho$, c'est-à-dire par $\delta x''_\rho$, variation de x''_ρ; et dans le terme

$$\int dx \ldots \int dx_{\rho-1}\,\mathcal{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\int dx_{\rho+1}\int dx_{\rho+2}\ldots \int dx_n\,u\,\delta x_\rho$$

par $\mathcal{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\,\delta x_\rho$, c'est-à-dire par $\delta x'_\rho$ variation de x'_ρ.

C'est ce que nous supposerons dans l'article suivant.

69. Supposons maintenant que l'on transforme, comme nous venons de le dire, les différents terme du second membre de l'équation 8 qui peuvent donner lieu à de pareilles transformations, et que l'on groupe les résultats par rapport aux signes

$$\mathcal{T}^{x''}_{x},\ \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1},\ \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2},\ldots\ \mathcal{T}^{x''_n}_{x_n};\ \mathcal{T}^{x'}_{x}\ \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\,\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}\ldots\ \mathcal{T}^{x'_n}_{x_n}.$$

on trouvera que cette équation 8 se change en

$$\begin{aligned}
(10)\quad \delta\int dx\int dx_1\int dx_2\ldots\int dx_n = {} & \int dx\int dx_1\int dx_2\ldots\int dx_n\left\{\delta u-\frac{du}{dx}\delta x-\frac{du}{dx_1}\delta x_1-\ldots\ldots\frac{du}{dx_n}\delta x_n\right\}\\
& +\mathcal{T}^{x''}_{x}\int dx_1\int dx_2\ldots\int dx_n\,u\left\{\delta x''\right\}\\
& +\int dx\,\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\int dx_2\ldots\int dx_n\,u\left\{\delta x''_1-\frac{dx''_1}{dx}\delta x\right\}\\
& +\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}\ldots\int dx_n\,u\left\{\delta x''_2-\frac{dx''_2}{dx}\delta x-\frac{dx''_2}{dx_1}\delta x_1\right\}\\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& +\int dx\int dx_1\int dx_2\ldots\mathcal{T}^{x''_n}_{x_n}\,u\left\{\delta x''_n-\frac{dx''_n}{dx}\delta x-\frac{dx''_n}{dx_1}\delta x_1\right.\\
& \qquad\left.-\ldots\frac{dx''_n}{dx_{n-1}}\delta x_{n-1}\right\}\\
& -\mathcal{T}^{x'}_{x}\int dx_1\int dx_2\ldots\int dx_n\,u\left\{\delta x'\right\}\\
& -\int dx\,\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\int dx_2\ldots\int dx_n\,u\left\{\delta x'_1-\frac{dx'_1}{dx}\delta x\right\}\\
& -\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}\ldots\int dx_n\,u\left\{\delta x'_2-\frac{dx'_2}{dx}\delta x-\frac{dx'_2}{dx_1}\delta x_1\right\}\\
& -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& -\int dx\int dx_1\int dx_2\ldots\mathcal{T}^{x'_n}_{x_n}\,u\left\{\delta x'_n-\frac{dx'_n}{dx}\delta x-\frac{dx'_n}{dx_1}\delta x_1\right.\\
& \qquad\left.-\ldots\frac{dx'_n}{dx_{n-1}}\delta x_{n-1}\right\}.
\end{aligned}$$

70. Après cela, nous ferons observer que comme, quelle que soit la valeur de l'indice ρ, les limites x'_ρ, x''_ρ, ne dépendent point des variables x_ρ, $x_{\rho-1}$, ... x_n, l'on doit avoir identiquement (article 61) :

$$\delta x''_\rho = \bar{\delta} x''_\rho + \frac{dx''_\rho}{dx}\,\delta x + \frac{dx''_\rho}{dx_1}\,\delta x_\rho + .. + \frac{dx''_\rho}{dx_{\rho-1}}\,\delta x_{\rho-1},$$

$$\delta x'_\rho = \bar{\delta} x'_\rho + \frac{dx'_\rho}{dx}\,\delta x + \frac{dx'_\rho}{dx_1}\,\delta x_1 + .. + \frac{dx'_\rho}{dx_{\rho-1}}\,\delta x_{\rho-1},$$

tandis que (article 60)

$$\delta u = \bar{\delta} u + \frac{du}{dx}\,\delta x + \frac{du}{dx_1}\,\delta x_1 + \frac{du}{dx_2}\,\delta x_2 + \ldots + \frac{du}{dx_n}\,\delta x_n.$$

Nous substituerons donc ces valeurs dans le second membre de l'équation 10, et nous trouverons qu'il reproduit identiquement celui de l'équation 9 : ce qui suffit pour prouver l'équivalence de nos formules avec celles que l'on pourrait déduire de tout autre procédé.

CHAPITRE III.

I.

73. Dans ce nouveau chapitre, nous appliquerons le calcul des variations à la recherche des maxima et minima des intégrales définies multiples, et plus généralement encore des expressions définies relatives à un même système de limites; mais, avant de commencer, nous croyons devoir indiquer quelques modifications dans les conventions précédentes.

74. D'abord, nous n'aurons plus à considérer les fonctions auxiliaires, que dans le dernier chapitre nous avons exclusivement désignées par des lettres majuscules; dès lors nous pourrons employer ces dernières sans aucune acception distincte, et

c'est ce que nous ferons, suivant les besoins qui pourront se présenter.

75. Si dans l'équation identique

$$\nabla_{x_i}^{y_i} u = \alpha_i \mathcal{1}_{x_i}^{y_i} u + \beta_i \int u dx_i,$$

on remplace u par $\nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u$, c'est-à-dire par $\alpha_{i+1} \mathcal{1}_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u + \beta_{i+1} \int u dx_{i+1}$, il viendra pour résultat

$$\nabla_{x_i}^{y_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u = \alpha_i \alpha_{i+1} \mathcal{1}_{x_i}^{y_i} \mathcal{1}_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u + \alpha_i \beta_{i+1} \mathcal{1}_{x_i}^{y_i} \int u dx_{i+1} + \alpha_{i+1} \beta_i \int dx_i \mathcal{1}_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} u + \beta_i \beta_{i+1} \int dx_i \int u dx_{i+1},$$

et en continuant d'une manière semblable, on verra que toute expression de la forme

$$\nabla_{x_i}^{y_i} \nabla_{x_{i+1}}^{y_{i+1}} \ldots \nabla_{x_k}^{y_k} u$$

peut se ramener à une suite de termes *de même forme*, mais dans lesquels chacune des caractéristiques ∇ se trouvera réduite à un simple signe de substitution $\mathcal{1}$ ou à un signe d'intégration $\int$. Désormais, nous supposerons cette transformation effectuée. De cette manière, l'expression

$$\nabla_x^y \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{y_2} u$$

représentera une des huit suivantes :

$$\int dx \int dx_1 \int u dx_2, \quad \int dx \int dx_1 \mathcal{1}_{x_2}^{y_2} u, \quad \int dx \mathcal{1}_{x_1}^{y_1} \int u dx_2, \quad \mathcal{1}_x^y \int dx_1 \int u dx_2,$$
$$\int dx \mathcal{1}_{x_1}^{y_1} \mathcal{1}_{x_2}^{y_2} u, \quad \mathcal{1}_x^y \int dx_1 \mathcal{1}_{x_2}^{y_2} u, \quad \mathcal{1}_x^y \mathcal{1}_{x_1}^{y_1} \int u dx_2, \quad \mathcal{1}_x^y \mathcal{1}_{x_1}^{y_1} \mathcal{1}_{x_2}^{y_2} u.$$

76. Pour ne pas nous laisser entraîner à une généralité surabondante, nous supposerons que, quelle que soit la valeur de l'indice ρ, la fonction y_ρ *représente essentiellement* l'une ou l'autre des limites x'_ρ, x''_ρ.

77. Soit v une expression composée de termes définis, dont les uns soient de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \dots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u_n,$$

tandis que d'autres seront de la forme $(m < n)$

$$\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} u_m,$$

en désignant par u_m une fonction quelconque de x, x_1, $x_2 \dots x_m$, mais indépendante de x_{m+1}, $x_{m+2}, \dots x_n$. Dans ce cas, comme d'après la formule 24 (article 16), on a identiquement

$$u_m = 1_{x_{m+1}}^{\gamma_{m+1}} 1_{x_{m+2}}^{\gamma_{m+2}} \dots 1_{x_n}^{\gamma_n} u_m;$$

nous remplacerons les termes de la dernière forme par d'autres termes, tels que

$$\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \dots \nabla_{x_m}^{\gamma_m} 1_{x_{m+1}}^{\gamma_{m+1}} 1_{x_{m+2}}^{\gamma_{m+2}} \dots 1_{x_n}^{\gamma_n} u_m.$$

De cette manière, tous les termes de v seront d'une forme analogue et leur comparaison sera plus facile; d'ailleurs, dans chacun de ces termes, les caractéristiques ∇ peuvent être différentes : elles doivent être seulement assujetties aux conditions de l'article 75.

2.

78. Supposons maintenant qu'une somme v de termes semblables à ceux dont nous venons de parler renferme une ou plusieurs fonctions inconnues, on peut demander quelles peuvent être les valeurs de ces inconnues pour que v devienne un maximum ou un minimum.

On sait que, dans ce cas, on doit avoir

$$\delta v = 0,$$

en laissant les variations des inconnues aussi arbitraires que les

conditions du problème peuvent le permettre; de telle sorte que, si les inconnues doivent satisfaire à des équations de condition

$$w = 0, \; w_1 = 0, \; w_2 = 0, \ldots$$

insuffisantes pour les déterminer, les variations de ces inconnues devront satisfaire aux équations de condition

$$\delta w = 0, \; \delta w_1 = 0, \; \delta w_2 = 0, \ldots$$

sans autre restriction quelconque.

79. Nous avons déjà vu (article 61) que lorsque v est une expression définie, on a identiquement

$$\delta v = \overline{\delta} v;$$

ainsi, l'équation aux variations

$$\delta v = 0$$

pourra être remplacée par

$$\overline{\delta} v = 0.$$

80. Si, par cas, le premier membre de l'équation de condition

$$w = 0$$

est aussi une expression définie, on pourra encore remplacer l'équation de condition

$$\delta w = 0$$

par l'équation aux variations tronquées

$$\overline{\delta} w = 0,$$

ce que l'on prouverait de la même manière que dans le dernier article.

Si w n'est pas une expression définie, et qu'elle renferme une ou plusieurs des variables indépendantes x, x_1, x_2,... x_n, nous aurons alors (article 60)

$$\delta w = \overline{\delta} w + \frac{dw}{dx}\delta x + \frac{dw}{dx_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{dw}{dx_n}\delta x_n = 0;$$

mais l'équation $w = 0$ nous donnera encore identiquement

$$\frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{dw}{dx_1} = 0, \quad \frac{dw}{dx_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{dw}{dx_n} = 0,$$

et, par suite, l'équation de condition

$$\delta w = 0$$

se réduira encore à

$$\overline{\delta} w = 0.$$

81. Comme ce que nous venons de voir pour l'équation de condition $w = 0$ peut se répéter pour chacune des autres, nous en conclurons que,

Dans la recherche des maxima et minima des expressions définies, *il suffit d'avoir égard aux variations tronquées de ces expressions et des équations de condition qui peuvent lier les inconnues qui s'y trouvent renfermées.*

82. Après avoir formé les équations aux variations

$$\overline{\delta} v = 0, \quad \overline{\delta} w = 0, \quad \overline{\delta} w_1 = 0, \quad \overline{\delta} w_2 = 0, \ldots$$

on aura recours à la méthode connue des multiplicateurs pour ramener la question à celle où l'on n'a qu'une seule équation aux variations, que nous désignerons par

$$V = 0,$$

et dans laquelle les variations de toutes les inconnues peuvent

être traitées comme indépendantes les unes des autres : c'est ce que nous supposerons déjà effectué.

83. Nous avons vu (article 66) que

$$\begin{aligned}\overline{\delta}\,\nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u = {}&\Sigma\,\nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\ldots\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}\overline{\delta}u\\ &+\Sigma\,\nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\ldots\,1^{\gamma_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u_{(\rho,\,n)}\,\overline{\delta}x_\rho\\ &+\Sigma\,\nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\ldots\,1^{x''_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u\,\overline{\delta}x''_\rho\\ &-\Sigma\,\nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\ldots\,1^{x'_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u\,\overline{\delta}x'_\rho.\end{aligned}$$

Lors donc que l'on aura développé, s'il y a lieu, la valeur de $\overline{\delta}u$, on aura pour résultat une somme de termes qui, sauf la différence de signification de caractéristiques ∇, seront de la forme

$$\nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}\Theta_n\theta_n,$$

en désignant par Θ une fonction donnée des inconnues et des variables indépendantes, et par θ, la variation tronquée de l'une des inconnues ou bien une dérivée différentielle d'une semblable variation.

De là et de la préparation indiquée dans l'article 77, nous conclurons que l'équation

$$V = 0$$

peut être regardée comme composée d'une somme de termes de la forme

$$\nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}\Theta\theta,$$

comme ceux dont nous venons de parler. C'est sous cette forme que nous allons considérer cette équation

$$V = 0.$$

3.

84. Après avoir ramené les termes de l'équation

$$V = 0$$

à la forme que nous venons d'indiquer, nous examinerons ces différents termes pour voir s'il s'en trouve qui soient de la forme

$$\int dx \, \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \nabla^{\gamma_2}_{x_2} \ldots \nabla^{\gamma_n}_{x_n} u \, \frac{d\theta}{dx},$$

en supposant que θ exprime, soit la variation tronquée de l'une des inconnues, soit une dérivée différentielle quelconque d'une telle variation.

Si, par cas, il s'en trouve de tels, nous les remplacerons par l'expression équivalente (formule 57, article 34):

$$\begin{aligned}
&- \int dx \, \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \nabla^{\gamma_2}_{x_2} \ldots . \nabla^{\gamma_n}_{x_n} \frac{du}{dx} \theta \\
&+ 1^{x''}_{x} \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \nabla^{\gamma_2}_{x_2} \ldots \nabla^{\gamma_n}_{x_n} u \, \theta \\
&- 1^{x'}_{x} \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \nabla^{\gamma_2}_{x_2} \ldots . \nabla^{\gamma_n}_{x_n} u \, \theta \\
&- \Sigma \int dx \, \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \ldots . \nabla^{\gamma_\rho}_{x_\rho} \ldots . \nabla^{\gamma_n}_{x_n} z_\rho \, \frac{du}{dx_\rho} \theta \\
&- \Sigma \int dx \, \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \ldots . \nabla^{\gamma_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{\gamma_n}_{x_n} z_\rho \, u \, \frac{d\theta}{dx_\rho} \\
&- \Sigma \int dx \, \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \ldots 1^{x''_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{\gamma_n}_{x_n} z''_\rho \, u \, \theta \\
&- \Sigma \int dx \, \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \ldots . 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots . \nabla^{\gamma_n}_{x_n} z'_\rho \, u \, \theta,
\end{aligned}$$

dans laquelle ρ devra être successivement égal à 1, 2, 3, .. n, et le signe Σ indique qu'il faut prendre la somme des termes que l'on trouvera de cette manière.

Après cette première transformation, nous recommencerons, s'il le faut, de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une nouvelle équation

$$V_1 = 0,$$

qui ne renferme plus de termes de la forme

$$\int dx\ \nabla^{\gamma_1}_{x_1}\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u\,\frac{d\theta}{dx}.$$

85. Après cela, nous examinerons de nouveau les termes de la transformée

$$V_1 = 0,$$

pour voir s'il s'en trouve qui soient de la forme

$$\nabla^{\gamma}_{x}\int dx_1\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u\,\frac{d\theta}{dx_1},$$

en désignant encore par θ, soit une des variations tronquées des inconnues, soit une dérivée différentielle quelconque d'une telle variation.

Si, par cas, il s'en trouve de tels, nous remplacerons chacun d'eux par l'expression équivalente (formule 57, article 34):

$$\begin{aligned}
&-\nabla^{\gamma}_{x}\int dx_1\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}\frac{du}{dx_1}\theta\\
&+\nabla^{\gamma}_{x}\gamma^{x''_1}_{x_1}\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u\,\theta\\
&-\nabla^{\gamma}_{x}\gamma^{x'_1}_{x_1}\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u\,\theta\\
&-\Sigma\nabla^{\gamma}_{x}\int dx_1\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\nabla^{\gamma_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}\frac{du}{dx_\rho}z_\rho\,\theta\\
&-\Sigma\nabla^{\gamma}_{x}\int dx_1\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\nabla^{\gamma_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}z_\rho\,u\,\frac{d\theta}{dx_\rho}\\
&-\Sigma\nabla^{\gamma}_{x}\int dx_1\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\gamma^{x''_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}z''\,u\,\theta\\
&-\Sigma\nabla^{\gamma}_{x}\int dx_1\,\nabla^{\gamma_2}_{x_2}\ldots\gamma^{x'_\rho}_{x_\rho}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}z'_\rho\,u\,\theta.
\end{aligned}$$

Après cette transformation, nous recommencerons, s'il y a lieu, de la même manière, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une nouvelle équation

$$V_2 = 0,$$

qui ne renferme plus de termes de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \int dx_1 \, \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d\theta}{dx_1}.$$

86. Alors nous examinerons à son tour l'équation

$$V_2 = 0,$$

pour voir si elle renferme des termes qui soient de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \int dx_2 \, \nabla_{x_3}^{\gamma_3} \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d\theta}{dx_2},$$

en donnant à θ la même signification que dans les deux articles précédents.

Si, par cas, il s'y trouve des termes de cette forme, nous les transformerons comme les précédents, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous ayons épuisé toutes les variables indépendantes x, x_1, $x_2 \ldots x_n$.

87. De cette manière, nous finirons par arriver à une dernière transformée [1]

$$V_{n+1} = 0,$$

dont aucun terme ne pourra être de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \ldots . \int dx_i \ldots . \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d\theta}{dx_i};$$

c'est là une proposition fondamentale, que nous allons démontrer dans l'article suivant.

88. D'abord, en passant d'une transformée $V_i = 0$ à la trans-

[1] D'après la marche des calculs, il est visible que les termes des transformées successives $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, $\ldots V_{n+1} = 0$, sont toujours de la forme $\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \ldots . \nabla_{x_n}^{\gamma_n} \Theta\theta$.

formée suivante : $V_{i+1} = 0$, on a fait disparaître tous les termes de la forme

$$\nabla \frac{\gamma}{x} \ldots \int dx_i \ldots \nabla \frac{\gamma_n}{x_n} u \frac{d\theta}{dx_i},$$

et, par conséquent, cette transformée

$$V_{i+1} = 0$$

ne doit renfermer aucun terme de cette forme : tout se réduit donc à faire voir que

Si une transformée $V_k = 0$, dont l'indice k est plus grand que i, ne renferme pas de terme de la forme

$$\nabla \frac{\gamma}{x} \ldots \int dx_i \ldots \nabla \frac{\gamma_n}{x_n} u \frac{d\theta}{dx_i},$$

il en sera de même de la transformée suivante : $V_{k+1} = 0$.

Les termes de l'équation $V_k = 0$, qui passent sans transformation dans l'équation $V_{k+1} = 0$, ne pouvant pas être de la forme

$$\nabla \frac{\gamma}{x} \ldots \int dx_i \ldots \nabla \frac{\gamma_n}{x_n} u \frac{d\theta_i}{dx_i},$$

puisque, par hypothèse, $V_k = 0$ n'en contient point qui soient de cette forme, il suffira de considérer ceux des termes de l'équation $V_k = 0$ qui sont susceptibles de transformation.

Soit donc

A $$\nabla \frac{\gamma}{x} \ldots \nabla \frac{\gamma_i}{x_i} \ldots \int dx_k \ldots \nabla \frac{\gamma_n}{x_n} u \frac{d\theta}{dx_k}$$

un des termes de l'équation

$$V_k = 0$$

que l'on doit transformer, et dans lequel d'ailleurs θ exprime, comme dans les articles précédents, soit une des variations tronquées des inconnues, soit une des dérivées différentielles d'une pareille variation.

Dans le passage de l'équation $V_k = 0$ à $V_{k+1} = 0$, ce terme se changera (formule 57, article 34) en l'expression

$$
\begin{aligned}
&- \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} \frac{du}{dx_k}\theta \\
&+ \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \gamma_{x_k}^{x''_k} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u\theta \\
&- \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \gamma_{x_k}^{x'_k} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u\theta \\
\mathrm{B}\quad &- \Sigma \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_\rho}^{y_\rho} \cdots \nabla_{y_n}^{y_n} \frac{du}{dx_\rho} z_\rho\, \theta \\
&- \Sigma \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_\rho}^{x''_\rho} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u z_\rho \frac{d\theta}{dx_\rho} \\
&- \Sigma \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \gamma_{x_\rho}^{x''_\rho} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u z''_\rho\, \theta \\
&- \Sigma \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \gamma_{x_\rho}^{x'_\rho} \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u z'_\rho\, \theta,
\end{aligned}
$$

dans laquelle ρ *devra recevoir successivement les valeurs* $k+1, k+2, \ldots n$; tandis que le signe Σ indique la somme des termes trouvés de cette manière.

Maintenant, si θ n'est pas de la forme $\frac{d\theta'}{dx_i}$, en désignant momentanément par θ' une des variations tronquées des inconnues, ou bien une des dérivées différentielles d'une pareille variation, comme les nombres $k+1, k+2, \ldots n$, sont, par hypothèse, tous plus grands que i, aucun terme de l'expression ci-dessus ne pourra être de la forme

$$\nabla_x^{y} \cdots \int dx_i \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta'}{dx_i}.$$

Mais il peut se faire que θ soit de la forme $\frac{d\theta'}{dx_i}$; alors, comme, d'après l'hypothèse, le terme

$$\mathrm{A}\qquad \nabla_x^{y} \cdots \nabla_{x_i}^{y_i} \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d\theta}{dx_k},$$

ne peut pas être de la forme

$$\nabla_x^{y} \cdots \int dx_i \cdots \int dx_k \cdots \nabla_{x_n}^{y_n} u \frac{d^2\theta'}{dx_i\, dx_k},$$

et que, d'ailleurs (article 75), le signe $\nabla_{x_i}^{\gamma_i}$ ne peut représenter que l'un des signes

$$\int dx_i, \text{ ou bien } 7_{x_i}^{\gamma_i},$$

il faudra que ce terme soit de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \ldots\ldots 7_{x_i}^{\gamma_i} \ldots \int dx_k \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d^2\theta'}{dx_i\, dx_k};$$

aucun terme de la somme ci-dessus B ne pourra donc être de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \ldots \int dx_i \ldots \int dx_k \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d^2\theta'}{dx_i dx_k},$$

c'est-à-dire, de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \ldots \int dx_i \ldots \int dx_k \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d\theta}{dx_i}.$$

Nous pouvons donc conclure que le terme A de l'équation $V_k = 0$ ne peut introduire dans l'équation suivante $V_{k+1} = 0$, aucun terme de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \ldots\ldots \int dx_i \ldots \nabla_{x_k}^{\gamma_k} \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d\theta}{dx_i};$$

et comme on peut en dire autant de tous les termes de $V_k = 0$, qui sont susceptibles d'être transformés, notre proposition ci-dessus se trouve complétement démontrée.

4.

89. D'après ce qui précède, nous n'avons plus qu'à considérer l'équation

$$V_{n+1} = 0,$$

dans laquelle il n'entre aucun terme de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \ldots \int dx_\rho \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} u \frac{d\theta}{dx_\rho}$$

et dans laquelle encore nous pouvons regarder les variations des inconnues comme entièrement indépendantes les unes des autres.

Il résulte de là que, si l'on désigne par ω une des variations des inconnues qui entrent dans cette équation $V_{n+1} = 0$, et par Ω la somme des termes qui renferment cette variation, on doit avoir

$$\Omega = 0,$$

puisque, pour y parvenir, il suffit de supposer nulles toutes les variations qui sont différentes de ω.

Comme chacune des variations tronquées des inconnues conduira à une équation partielle analogue, il nous suffira de voir quelles sont les équations, soit indéfinies, soit aux limites, qui peuvent résulter de chacune de ces équations partielles.

90. La solution de la question que nous venons de poser repose sur quelques lemmes que nous allons développer.

Il résulte des premiers principes du calcul différentiel que si nous faisons

$$\omega = p\,(x_\rho - y_\rho)^h,$$

et que nous désignions par g un nombre entier positif moindre que h, la dérivée

$$\frac{d^g\omega}{dx_\rho^g}$$

sera de la forme

$$q\,(x_\rho - y_\rho)^{h-g};$$

que, par suite, nous aurons

$$\Pi_{x_\rho}^{y_\rho} \frac{d^g\omega}{dx_\rho} = \Pi_{x_\rho}^{y_\rho} q\,(x_\rho - y_\rho)^{h-g} = 0,$$

puisque, quand on remplace x_ρ par y_ρ, le facteur $x_\rho - y_\rho$ devient identiquement nul.

De là et de la formule 69 (article 40), nous conclurons que, *dans ce cas,* on doit avoir

$$(1) \qquad \nabla_x^{\gamma} \ldots \nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} \mathbf{M} \frac{d^g \omega}{dx_\rho^g} = 0.$$

Par une raison analogue, si l'on fait

$$\omega = p\,(x_\rho - y_\rho)^{2l},$$

et que l'exposant $2l$ soit assez élevé, on aura identiquement

$$\nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho} \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^{\mu}\,dx_1^{\mu'}\,dx_2^{\mu''}\ldots} = 0,$$

et, par suite,

$$\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \ldots \nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} \mathbf{M} \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^{\mu}\,dx_1^{\mu'}\,dx_2^{\mu''}\ldots} = 0.$$

91. Si nous faisons encore

$$\omega = p\,(x_\rho - y_\rho)^h,$$

nous trouverons pour la valeur de $\frac{d^h\omega}{dx_\rho^h}$ un résultat tel que

$$\frac{d^h\omega}{dx_\rho^h} = (1.2.3\ldots h).p + (x_\rho - y_\rho)q;$$

dès lors nous aurons

$$\nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho} \frac{d^h\omega}{dx_\rho^h} = (1.\ 2.\ 3\ldots\ h)\ \nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho} p,$$

et, par suite, d'après la formule 70 (article 41), nous aurons

$$(2) \quad \nabla_x^{\gamma} \ldots \nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} \mathbf{M} \frac{d^h\omega}{dx_\rho^h} = (1.\ 2\ldots h)\ \nabla_x^{\gamma} \ldots \nabla_{x_\rho}^{\gamma_\rho} \ldots \nabla_{x_n}^{\gamma_n} p\,\mathbf{M}.$$

92. Maintenant désignons, pour un moment, par g, g', g'', ...

des nombres entiers positifs quelconques, et par h, h', h'', ... d'autres nombres entiers, tels que

$$h \geqq g, \quad h' \geqq g', \quad h'' \geqq g'', \quad h''' \geqq g''' \ldots$$

en supposant toutefois que l'un des nombres g, g', g'',... au moins est moindre que celui des nombres h, h', h'',.. qui lui correspond. Cela posé,

Si nous faisons

$$\omega = r\,(x_\rho - y_\rho)^h\,(x_\rho' - y_\rho')^{h'}\,(x_\rho'' - y_\rho'')^{h''},$$

la dérivée

$$\frac{d^{g+g'+g''+\cdots}\omega}{dx_\rho^{\,g}\,dx_{\rho'}^{\,g'}\,dx_{\rho''}^{\,g''}\cdots}$$

contiendra, au moins, un des facteurs $(x_\rho - y_\rho)$, $(x_\rho' - y_\rho')$, $(x_\rho'' - y_\rho'')$, ... toutes les fois que l'un des nombres g, g', g'', ... sera respectivement moindre que celui des nombres h, h', h'', ... qui lui correspond, tandis que la dérivée

$$\frac{d^{h+h'+h''+\cdots}\omega}{dx_\rho^{\,h}\,dx_{\rho'}^{\,h'}\,dx_{\rho''}^{\,h''}\cdots}$$

sera de la forme

$$(1.2..h)\,(1.2..h')\,(1.2..h'')\,(\ldots)\,r + (x_\rho - y_\rho)\,r_1 + (x_\rho' - y_\rho')\,r'_1 + (x_\rho'' - y_\rho'')\,r''_1 + \ldots\ldots$$

Nous pouvons donc conclure que

$$\nabla_x^{\,y} \ldots \nabla_{x_\rho}^{\,y_\rho} \ldots \nabla_{x_{\rho'}}^{\,y_{\rho'}} \ldots \nabla_{x_{\rho''}}^{\,y_{\rho''}} \ldots \nabla_{x_n}^{\,y_n} \mathrm{M}\,\frac{d^{g+g'+g''+\cdots}\omega}{dx_\rho^{\,g}\,dx_{\rho'}^{\,g'}\,dx_{\rho''}^{\,g''}\cdots} = 0,$$

et que

$$(3) \qquad \nabla_x^{\,y} \ldots \nabla_{x_\rho}^{\,y_\rho} \ldots \nabla_{x_{\rho'}}^{\,y_{\rho'}} \ldots \nabla_{x_{\rho''}}^{\,y_{\rho''}} \ldots \nabla_{x_n}^{\,y_n} \mathrm{M}\,\frac{d^{h+h'+h''+\cdots}\omega}{dx^h\,dx^{h'}\,dx^{''}\ldots}$$

$$= (1.2..h)\,(1.2..h')\,(1.2...h'')\,(\ldots)\,\nabla_x^{\,y} \ldots \nabla_{x_n}^{\,y_n} \mathrm{M}r :$$

il suffit pour cela de répéter les raisonnements des deux derniers articles.

92 *bis*. Nous savons (article 37) qu'une expression de la forme

$$\text{C} \qquad \nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}\,\mathrm{R}^2,$$

dans laquelle les signes ∇^{γ}_{x}, $\nabla^{\gamma_1}_{x_1}$, $\ldots$ $\nabla^{\gamma_n}_{x_n}$, représentent, les uns des signes d'intégration $\int dx_k$, $\int dx_k'$, $\int dx_k''$, $\ldots$ et les autres des signes de substitution $1^{\gamma_t}_{x_t}$, $1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}$, $1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}}$, $\ldots$ peut se mettre sous la forme

$$\int_{x'''_k}^{x^{IV}_k} dx_k \int_{x'''_{k'}}^{x^{IV}_{k'}} dx_{k'} \int_{x'''_{k''}}^{x^{IV}_{k''}} dx_{k''} \ldots 1^{\gamma_t}_{x_t}\,1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}\,1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}}\ldots\mathrm{R}^2,$$

pourvu qu'on détermine convenablement les nouvelles limites x'''_k, x^{IV}_k, $x'''_{k'}$, $x^{IV}_{k'}$, $x'''_{k''}$, $x^{IV}_{k''}$, $\ldots$.

Nous savons encore (article 5) que

$$1^{\gamma_t}_{x_t}\,1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}\,1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}}\ldots\mathrm{R}^2 = \left(1^{\gamma_t}_{x_t}\,1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}\,1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}}\ldots\mathrm{R}\right)^2.$$

Nous pourrons donc remplacer l'expression C ci-dessus par

$$\text{D} \qquad \int_{x'''_k}^{x^{IV}_k} dx_k \int_{x'''_{k'}}^{x^{IV}_{k'}} dx_{k'} \int_{x'''_{k''}}^{x^{IV}_{k''}} dx_{k''} \ldots \left(1^{\gamma_t}_{x_t}\,1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}\,1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}}\ldots\mathrm{R}\right)^2,$$

laquelle se compose d'éléments dont aucun ne peut être négatif.

Si donc cette expression C est nulle, il faut que, dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites x'''_k, x^{IV}_k, $x'''_{k'}$, $x^{IV}_{k'}$, $x'''_{k''}$, $x^{IV}_{k''}$, $\ldots$ la valeur de

$$1^{\gamma_t}_{x_t}\,1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}\,1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}}\ldots\mathrm{R}$$

se réduise à zéro.

Cependant, s'il était possible que l'on eût $x'''_k = x^{IV}_k$, ou bien $x'''_{k'} = x^{IV}_{k'}$, ou bien $x'''_{k''} = x^{IV}_{k''}$, ou bien $\ldots$, l'expression D

serait évidemment nulle d'elle-même, et, par suite, la conclusion précédente pourrait ne plus être vraie.

Quant aux limites x'''_k, $x^{IV}{}_k$, $x'''_{k'}$, $x^{IV}{}_{k'}$, ... d'après ce que nous avons vu (article 37), si nous désignons par x_l une quelconque des variables x_k, x_k', x_k'', ... et par x_μ, x_μ', x_μ'', ... celles des variables x_ρ, x_ρ', x_ρ'', ... dont les indices sont moindres que l, nous devrons avoir

$$x'''_l = \mathrm{T}^{y_\mu}_{x_\mu}\,\mathrm{T}^{y_{\mu'}}_{x_{\mu'}}\,\mathrm{T}^{y_{\mu''}}_{x_{\mu''}}\ldots x'_l, \qquad x^{IV}{}_l = \mathrm{T}^{y_\mu}_{x_\mu}\,\mathrm{T}^{y_{\mu'}}_{x_{\mu'}}\,\mathrm{T}^{y_{\mu''}}_{x_{\mu''}}\ldots x''_l.$$

93. Après ces lemmes, nous reprendrons l'équation

$$\Omega = 0$$

de l'article 89, dont nous partagerons la discussion en deux paragraphes. Dans le premier, nous traiterons le cas où la variation ω peut être une fonction quelconque de toutes les variables indépendantes; dans le suivant, nous traiterons le cas où, par la nature du problème, la variation ω ne peut renfermer qu'une partie seulement des variables indépendantes.

5.

94. D'après ce que nous avons démontré (article 88), aucun terme de l'équation

$$\Omega = 0$$

ne peut être de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \ominus \frac{d\theta}{dx_\rho},$$

en désignant par θ, soit la variation ω elle-même, soit une dérivée différentielle de cette variation. Si donc nous réunissons en un seul terme tous ceux de cette équation qui seront de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \ominus \omega,$$

ce qui nous donnera une certaine somme, comme

$$\text{E} \qquad \int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n \, \text{M}\, \omega,$$

tous les autres termes de l'équation $\Omega = 0$ devront renfermer un ou plusieurs des signes de substitution

$$1^{x'}_{x}, 1^{x''}_{x}, 1^{x'_1}_{x_1}, 1^{x''_1}_{x_1}, 1^{x'_2}_{x_2}, 1^{x''_2}_{x_2}, \ldots . 1^{x'_n}_{x_n}, 1^{x''_n}_{x_n}.$$

Cela posé,

Nous ferons, pour abréger,

$$\omega_1 = (x - x')(x - x'')(x_1 - x'_1)(x_1 - x''_1)(\ldots)(x_\rho - x'_\rho)(x_\rho - x''_\rho)(\ldots) \\ (x_n - x'_n)(x_n - x''_n),$$

et nous prendrons pour un moment

$$\omega = \text{M}\, \omega_1^{2l};$$

dès lors, si l'exposant $2l$ est assez grand, tout terme de la forme

$$\nabla^{\gamma}_{x} \ldots 1^{x_\rho}_{x_\rho} \ldots . \nabla^{\gamma_n}_{x_n} \Theta \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\ldots}$$

deviendra identiquement nul à cause du facteur $(x_\rho - x'_\rho)^{2l}$ contenu dans ω (article 90). Il en sera de même des termes de la forme

$$\nabla^{\gamma}_{x} \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots \nabla^{\gamma_n}_{x_n} \Theta \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\ldots},$$

à cause du facteur $(x_\rho - x''_\rho)^{2l}$ contenu pareillement dans ω (article 90). Nous en conclurons que l'équation $\Omega = 0$ se réduira au seul terme ci-dessus E, qui devra être nul et qui se changera en

$$\int dx \int dx_1 \ldots \int dx_\rho \ldots \int dx_n . \text{M}^2\, \omega_1^{2l} = 0.$$

Mais cette dernière ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a (article 92)

$$(4) \qquad M\,\omega_1{}^l = 0,$$

à moins que deux des limites d'une même variable indépendante ne soient égales entre elles.

D'ailleurs, d'après la forme ci-dessus du facteur ω_1 que nous avons pris égal à

$$(x-x')\,(x-x'')\,(x_1-x'_1)\,(x_1-x''_1)\,(\ldots)\,(x'_\rho-x'_\rho)\,(x_\rho-x''_\rho)\,(\ldots)\,(x_n-x'_n)\,(x_n-x''_n),$$

il ne peut pas être nul dans l'étendue qui doit être comprise entre les limites $x'_1, x'', x'_1, x''_1, \ldots x'_n, x''_n$; il faudra donc que, dans toute cette étendue, l'on ait

$$(4) \qquad M = 0.$$

En substituant cette valeur de M dans l'équation $\Omega = 0$, le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n\, M\,\omega$$

disparaîtra de lui-même, quelle que soit la valeur de ω, et, par suite, l'équation $\Omega = 0$ se réduira à une autre équation

$$\Omega_1 = 0,$$

dont tous les termes renfermeront un ou plusieurs des signes de substitution

$$1^{x'}_{x},\ 1^{x''}_{x},\ 1^{x'_1}_{x_1},\ 1^{x''_1}_{x_1},\ \ldots\ 1^{x'_n}_{x_n},\ 1^{x''_n}_{x_n},$$

et dans laquelle ω pourra être quelconque.

95. Maintenant, nous séparerons ceux des termes de l'équation réduite $\Omega_1 = 0$ qui ne renferment *qu'un seul et même signe de substitution*, par exemple le signe $1^{x'}_{x_r}$. Alors, d'après ce que nous avons

prouvé à l'article 88, aucun de ces termes ne pourra être de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots \int dx_n . \Theta \frac{d\theta}{dx_\mu},$$

en désignant par μ un nombre quelconque, différent de ρ, et par θ, soit la variation ω elle-même, soit une de ses dérivées différentielles. Ces termes seront donc tous de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots \int dx_n \Theta \frac{d^h\omega}{dx^h_\rho}.$$

Cela posé,

Nous réunirons en un seul terme tous ceux de cette dernière forme qui seront affectés de la dérivée de ω de l'ordre le plus élevé, ce qui nous donnera une somme connue

$$\text{F} \qquad \int dx \int dx_1 \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots . \int dx_n \, \text{N} \frac{d^h\omega}{dx^h_\rho};$$

alors, comme tous les termes de l'équation $\Omega_1 = 0$ doivent, par hypothèse, renfermer un ou plusieurs signes de substitution, tous ceux qui seront différents du terme F seront, les uns de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots . \int dx_n \Theta \frac{d^g\omega}{dx^g_\rho};$$

mais alors g sera moindre que h, les autres d'une autre forme.

Mais alors ils renfermeront un ou plusieurs signes de substitution différents de $1^{x'_\rho}_{x_\rho}$.

Après cela, nous ferons, pour abréger,

$$\omega_1 = \frac{\omega_1}{x_\rho - x'_\rho} = (x - x')(x - x'')(\ldots)(x_\rho - x''_\rho)(\ldots)(x_n - x'_n)(x_n - x''_n),$$

et *nous prendrons pour un moment*

$$\omega = \text{N} \, \omega_1^{sl} (x_\rho - x'_\rho)^h.$$

De cette manière, tous les termes qui seront de la forme

$$\int dx \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots \int dx_n \ominus \frac{d^g \omega}{dx^g},$$

et pour lesquels g sera moindre que h, seront nuls (article 90); de même si l'exposant $2l$ est assez grand, tous les termes qui seront de la forme

$$\nabla^{y}_{x} \ldots 1^{x''_i}_{x_i} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} \ominus \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\cdots},$$

et pour lesquels i sera différent de ρ, seront nuls, à cause du facteur $(x_i - x''_i)^{2l}$ contenu dans ω (article 90, additions). Tous les termes qui seront de la forme

$$\nabla^{y}_{x} \ldots 1^{x'_i}_{x_i} \ldots \nabla^{y_n}_{x_n} \ominus \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''+\cdots}\omega}{dx^{\mu}\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}\cdots},$$

et pour lesquels i sera différent de ρ, seront encore nuls, à cause du facteur $(x_i - x'_i)^{2l}$ contenu dans ω (article 90).

Ainsi, de tous les termes de l'équation $\Omega_1 = 0$, il ne restera que le seul terme F, lequel devra aussi être nul pour que l'équation soit satisfaite. Nous devrons avoir (en vertu de la formule 2, article 91 :

$$(1.2.3..h) \int dx \int dx_1 \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots \int dx_n \, \mathrm{N}^2 \, \omega_2^{2l} = 0.$$

De là, et du lemme de l'article 92, nous conclurons que l'on doit avoir

$$1^{x'_\rho}_{x_\rho} \mathrm{N} \, \omega_2^{l} = 0$$

dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites

x' et x'' pour x, x'_1 et x''_1 pour x_1, ... $x'_{\rho-1}$ et $x''_{\rho-1}$ pour $x_{\rho-1}$, $1^{x'_\rho}_{x_\rho} x'_{\rho+1}$ et $1^{x'_\rho}_{x_\rho} x''_{\rho+1}$ pour $x_{\rho+1}$, $1^{x'_\rho}_{x_\rho} x'_{\rho+2}$ et $1^{x'_\rho}_{x_\rho} x''_{\rho+2}$ pour $x_{\rho+2}$, ...

$1^{x'_\rho}_{x_\rho} x'_n$ et $1^{x'_\rho}_{x_\rho} x''_n$ pour x_n;

mais comme nous avons supposé

$$\omega_2 = (x-x')(x-x'')(\ldots)(x_\rho - x''_\rho)(x_{\rho+1}-x'_{\rho+1})$$
$$(x_{\rho+1}-x''_{\rho+1})(\ldots)(x_n-x'_n)(x_n-x''_n),$$

nous aurons (en observant que x', x'', x'_1, x''_1, .. $x'_{\rho-1}$, $x''_{\rho-1}$ et x''_ρ ne défendent point x_ρ)

$$1^{x'_\rho}_{x_\rho}\,\omega_2 = (x-x')(x-x'')(\ldots)(x_\rho-x''_\rho)\left(x_{\rho+1}-1^{x'_\rho}_{x_\rho}x'_{\rho+1}\right)$$
$$\left(x_{\rho+1}-1^{x'_\rho}_{x_\rho}x''_{\rho+1}\right)(\ldots)\left(x'_n-1^{x'_\rho}_{x_\rho}x'_n\left(x_n-1^{x'}\right)\right),$$

de sorte que ce facteur ne peut pas devenir nul dans l'intérieur des limites que nous avons à considérer, et, par suite, l'expression

$$1^{x'_\rho}_{x_\rho}\,\mathrm{N}\,\omega_2^l = 1^{x'_\rho}_{x_\rho}\,\mathrm{N}_2\left(1^{x'_\rho}_{x_\rho}\,\omega\right)^l$$

ne peut être égale à zéro qu'en supposant

$$1^{x'_\rho}_{x_\rho}\,\mathrm{N} = 0.$$

Cela nous fournit une nouvelle équation entre les inconnues et les variables indépendantes, et de plus le terme F de l'équation $\Omega_1 = 0$ devient identiquement nul, quelle que soit la valeur de ω (article 40).

Nous pourrons donc supprimer ce terme F de l'équation $\Omega_1 = 0$ et recommencer d'une manière analogue avec la nouvelle équation obtenue ainsi, et ainsi de suite. De cette manière, nous finirons par arriver à une nouvelle équation,

$$\Omega_2 = 0,$$

dont tous les termes renfermeront au moins deux des signes de substitution

$$1^{x'}_{x},\ 1^{x''}_{x},\ 1^{x''_1}_{x_1},\ \ldots\ 1^{x'_n}_{x_n},\ 1^{x''_n}_{x_n},$$

et dans laquelle ω pourra toujours être quelconque.

96. Maintenant, nous séparerons ceux des termes de l'équation $\Omega_2 = 0$ qui renferment deux signes particuliers de substitution, par exemple $1_{x_\ell}^{x'_\ell}$ et $1_{x_{\ell+1}}^{x''_{\ell+1}}$, mais qui n'en renferment point d'autres. Ces termes seront de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots 1_{x_\ell}^{x'_\ell} \ldots 1_{x_{\ell+1}}^{x''_{\ell+1}} \ldots \int dx_n \Theta \theta,$$

et, d'après la proposition de l'article 88, θ ne peut être que de la forme

$$\frac{d^{h+h'}\omega}{dx_\ell^h dx_{\ell+1}^{h'}}.$$

Parmi tous les termes du groupe que nous venons de considérer, nous choisirons ceux pour lesquels h a la plus grande valeur possible. Enfin, parmi ces dernières, nous réunirons en un seul terme connu

$$G \int dx \int dx_1 \ldots 1_{x_\ell}^{x'_\ell} \ldots 1_{x_{\ell+1}}^{x''_{\ell+1}} \ldots \int dx_n P \frac{d^{h+h'}\omega}{dx_\ell^h dx_{\ell+1}^{h'}}$$

ceux qui seront affectés de la plus grande valeur de h'.

De cette manière les autres termes de l'équation $\Omega_2 = 0$ seront, les uns de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots 1_{x_\ell}^{x'_\ell} \ldots 1_{x_{\ell+1}}^{x''_{\ell+1}} \ldots \int dx_n \Theta \frac{d^{g+h'}\omega}{dx_\ell^g dx_{\ell+1}^{h'}};$$

mais alors g sera moindre que h';

Les autres, de la forme

$$\int dx \int dx_1 \ldots 1_{x_\ell}^{x'_\ell} \ldots 1_{x_{\ell+1}}^{x''_{\ell+1}} \ldots \int dx_n \Theta \frac{d^{h+g'}\omega}{dx_\ell^h dx_{\ell+1}^{g'}},$$

mais alors g' sera moindre que h';

Les autres seront de la forme

$$\int dx_\gamma \int dx_1 \ldots 1_{x_\ell}^{x'_\ell} \ldots 1_{x_{\ell+1}}^{x''_{\ell+1}} \ldots \int dx_n \Theta \frac{d^{g+g'}\omega}{dx_\ell^g dx_{\ell+1}^{g'}},$$

mais alors g sera moindre que h et g' sera moindre que h';

Les autres, enfin, seront de la forme

$$\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\ldots 1_{x_\mu}^{x'_\mu}\ldots\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\ominus\theta.$$

ou bien

$$\nabla_{x}^{y}\,\nabla_{x_1}^{y_1}\ldots 1_{x_\mu}^{x''_\mu}\ldots\ldots\nabla_{x_n}^{y_n}\ominus\theta,$$

en désignant par μ un nombre quelconque différent de ρ et de ρ'. Cela posé, nous ferons, pour abréger,

$$\omega_1=(x-x')(x-x'')(\ldots)(x_\rho-x''_\rho)(\ldots)(x'_\rho-x'_{\rho'})(\ldots)$$
$$(x_n-x'_n)(x_n-x''_n)=\frac{\omega_1}{(x_\rho-x'_\rho)(x_{\rho_1}-x''_{\rho_1})},$$

et *nous prendrons pour un moment*

$$\omega=\mathrm{P}\,\omega_3^{2l}(x_\rho-x'_\rho)^h(x_{\rho_1}-x''_{\rho_1})^{h'}.$$

Dès lors, si l'exposant $2l$ est assez grand, tous ceux des termes de l'équation $\Omega_2=0$ qui sont différents de G, et que nous venons de désigner, seront nuls :

Les uns, à cause du facteur $(x_\rho-x'_\rho)^h$, dont l'exposant h est, par hypothèse, plus grand que g (voir article 92);

Les autres, à cause du facteur $(x_{\rho_1}-x''_{\rho_1})^{h'}$, dont l'exposant h' est, par hypothèse, plus grand que g' (article 92);

Les autres, à cause des facteurs $(x_\mu-x'_\mu)^{2l}$, $(x_\mu-x''_\mu)^{2l}$, contenus dans ω_3^{2l} (article 90).

Quant au terme G, il se changera en (article 92)

$$(1.2.3..h)(1.2..h')\int dx\int dx_1\ldots 1_{x_\rho}^{x'_\rho}\ldots 1_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}}\ldots\int dx_n\,\mathrm{P}^2\,\omega_3^{2l}$$

et, pour que l'équation $\Omega_2=0$ se trouve satisfaite, il faudra que cette dernière expression soit égale à zéro.

Mais, en vertu du lemme de l'article 92 *bis*, cela ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a

$$1_{x_\rho}^{x'_\rho}\,1_{x_{\rho'}}^{x''_{\rho'}}\,\mathrm{P}\,\omega_3^{l}=0$$

dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites qui caractérisent le terme G, c'est-à-dire entre

$$x' \text{ et } x'' \text{ pour } x;\ x'_1 \text{ et } x''_1 \text{ pour } x_1;\ \ldots\ x'_{\rho-1} \text{ et } x''_{\rho+1} \text{ pour } x_\rho;$$
$$\mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho} x'_{\rho+1} \text{ et } \mathrm{T}^{x''_\rho}_{x_\rho} x''_{\rho+1} \text{ pour } x_{\rho+1};\ \mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho} x'_{\rho+2} \text{ et } \mathrm{T}^{x''_\rho}_{x_\rho} x''_{\rho+2}$$
$$\text{pour } x_{\rho+2};\ \ldots\ \mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho} x'_{\rho'-1} \text{ et } \mathrm{T}^{x''_\rho}_{x_\rho} x''_{\rho'-1} \text{ pour } x_{\rho'-1};$$
$$\mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} x'_{\rho'+1} \text{ et } \mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} x''_{\rho'+1} \text{ pour } x_{\rho'+1};\ \mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} x'_{\rho'+2}$$
$$\text{et } \mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} x''_{\rho'+2} \text{ pour } x_{\rho'+2};\ \ldots\ldots$$

Mais ici, comme dans les articles précédents, $\mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}}\omega_3$ ne peut pas devenir nul entre ces limites : nous devonc dons en conclure que l'expression

$$\mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \mathrm{P}\,\omega_3^{2l} = \mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \mathrm{P}\,.\,\left(\mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}}\omega_3\right)^l$$

ne peut devenir nulle qu'autant que l'on a

$$6 \qquad \mathrm{T}^{x'_\rho}_{x_\rho}\mathrm{T}^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \mathrm{P} = 0.$$

Cela nous fournit une nouvelle équation entre les inconnues du problème et les variables indépendantes, et de plus, au moyen de cette valeur, le terme G de l'équation $\Omega_2 = 0$ se réduit à zéro, quelle que soit la valeur de ω (article 40).

Nous pourrons donc supprimer ce terme dans 'équation

$$\Omega_2 = 0,$$

ce qui nous donnera une nouvelle équation, que nous pourrons traiter encore de la même manière, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à une équation

$$\Omega_3 = 0,$$

dont tous les termes renferment trois ou un plus grand nombre des signes de substitution

$$\mathrm{T}^{x'}_{x},\ \mathrm{T}^{x''_2}_{x},\ \mathrm{T}^{x'_1}_{x_1},\ \mathrm{T}^{x''_1}_{x_1},\ \ldots\ldots\ \mathrm{T}^{x'_n}_{x_n},\ \mathrm{T}^{x''_n}_{x_n},$$

et dans laquelle ω peut encore être quelconque.

97. Maintenant, nous séparerons tous les termes de la nouvelle équation

$$\Omega_3 = 0$$

qui renferment trois signes particuliers de substitution, comme, par exemple, $1^{x}_{x_\rho}$, $1^{x_{\rho'}}_{x_{\rho'}}$ ... $1^{x_{\rho''}}_{x_{\rho''}}$, mais qui n'en renferment point d'autres.

Dès lors, d'après la proposition de l'article 88, ces termes ne pourront être que de la forme

$$\int dx \ldots 1^{x}_{x_\rho} \ldots 1^{x_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \ldots 1^{x_{\rho''}}_{x_{\rho''}} \ldots \int dx_n \ominus \frac{d^{h+h'+h''}\omega}{dx^h_\rho\, dx^{h'}_{\rho'}\, dx^{h''}_{\rho''}}.$$

Parmi tous les termes de ce groupe, nous séparerons encore ceux pour lesquels le nombre h sera le plus grand;

Parmi ces derniers, nous séparerons encore ceux pour lesquels h' aura la plus grande valeur;

Enfin, parmi ces derniers, nous choisirons ceux qui répondent à la plus grande valeur de h'', et nous les réunirons en un seul terme connu

$$\mathrm{H} \qquad \int dx \ldots 1^{x'_\rho}_{x_\rho} \ldots 1^{x''_{\rho'}}_{x_{\rho'}} \ldots 1^{x'_{\rho''}}_{x_{\rho''}} \ldots \int dx_n \, \mathrm{Q} \, \frac{d^{h+h'+h''}\omega}{dx^h_\rho\, dx^{h'}_{\rho'}\, dx^{h''}_{\rho''}}.$$

Après cela, nous ferons, pour abréger,

$$\omega_4 = (x-x')\,(x-x'')\,(\ldots)\,(x_\rho - x''_\rho)\,(\ldots)\,(x_{\rho'} - x'_{\rho'})\,(\ldots)\,(x_{\rho''} - x''_{\rho''})\,(\ldots)$$
$$= \frac{\omega}{(x_\rho - x'_\rho)\,(x''_{\rho'} - x'_{\rho'})\,(x_{\rho''} - x'_{\rho''})},$$

et *nous prendrons pour un moment*

$$\omega = \mathrm{Q}\ \omega^{2l}{}_n\,(x_\rho - x'_\rho)^h\,(x_{\rho'} - x''_{\rho'})^{h'}\,(x_{\rho''} - x'_{\rho''})^{h''};$$

alors nous prouverons, comme dans les derniers articles, que [1] tous

[1] En supposant toujours l'exposant $2l$ assez élevé.

les termes de l'équation $\Omega_3 = 0$ qui sont différents du terme H deviennent identiquement nuls, mais que ce terme H se change en

$$(1.2...h)(1.2..h')(1.2..h'')\int dx \int dx_1 .. 1^{x'_1}_{x_1} .. 1^{x''_{1'}}_{x_{1'}} ... 1^{x'_{1''}}_{x_{1''}} ... \int dx_n \, Q^2 \omega^{2l}{}_n.$$

Nous en conclurons que, pour que l'équation $\Omega_3 = 0$ soit satisfaite, il faut que cette dernière expression soit nulle, et que, par suite, l'on ait

$$1^{x'_1}_{x_1} 1^{x''_{1'}}_{x_{1'}} 1^{x'_{1''}}_{x_{1''}} Q = 0, \tag{7}$$

dans toute l'étendue des limites qui servent à caractériser le terme H.

Cela nous fournit une nouvelle équation entre les inconnues du problème et les variables indépendantes; et, de plus, il en résulte que le terme H est identiquement nul, quelle que soit la valeur de ω. Nous pourrons donc supprimer ce terme dans l'équation $\Omega_3 = 0$; cela nous donnera une nouvelle équation que nous pourrons traiter d'une manière analogue, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à une nouvelle équation

$$\Omega_4 = 0,$$

dont tous les termes renferment quatre ou un plus grand nombre de signes de substitution

$$1^{x'}_{x}, 1^{x''}_{x}, 1^{x'_1}_{x_1}, 1^{x''_1}_{x_1}, \ldots, 1^{x'_n}_{x_n}, 1^{x''_n}_{x_n},$$

et dans laquelle ω pourra encore être quelconque.

98. Après cela, nous pourrons traiter d'une manière analogue cette équation $\Omega_4 = 0$, et continuer de même jusqu'à ce que nous ayons épuisé tous les termes de l'équation primitive $\Omega = 0$. De cette manière, nous arriverons à cette règle générale.

Pour trouver toutes les équations, soit indéfinies, soit aux limites, qui résultent de l'équation $\Omega = 0$, il faut :

1° Réunir en un seul terme tous ceux qui se trouvent affectés en même temps et d'une même dérivée de ω et des mêmes signes de substitution $1^{\gamma_t}_{x_t}$, $1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}$, $1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}}$, ...
ce qui donnera un résultat connu de la forme

$$\text{K} \qquad \int dx \,.\, 1^{\gamma_t}_{x_t} \,.\, . \,.\, 1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}} \,.\, . \,.\, 1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}} \,.\, . \,.\, . \,.\, \int dx_n \,\text{R}\,\theta\,;$$

2° Pour chaque terme obtenu ainsi, on fera

$$1^{\gamma_t}_{x_t}\, 1^{\gamma_{t'}}_{x_{t'}}\, 1^{\gamma_{t''}}_{x_{t''}} \,.\, . \,.\, . \,\text{R} = 0, \tag{8}$$

laquelle devra avoir lieu dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites qui servent à caractériser ce terme, et dont nous avons indiqué la formation (article 92 *bis*).

Toutefois, on ne devra pas perdre de vue la remarque renfermée dans cet article 92 *bis*, d'après laquelle le terme K peut devenir nul, parce que les limites qui doivent servir à le caractériser ne doivent renfermer aucune étendue; quelquefois même ce sera la seule manière possible de le rendre nul.

99. Pour passer au cas où ω ne doit renfermer qu'un certain nombre de variables indépendantes, nous supposerons d'abord que, par la nature du problème, ω peut être une fonction quelconque de $x, x_1, x_2 \,.\, . \,.\, x_m$, mais qu'elle doit être indépendante de $x_{m+1}, x_{m+2}, \,.\, . \,.\, x_n$.

100. Puisque ω ne renferme que les variables $x, x_1, x_2, \,.\, . \,.\, x_m$, il en sera de même de ses différentes dérivées différentielles, lesquelles seront ainsi indépendantes des variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \,.\, . \,.$ x_n. Dès lors, en désignant par θ, soit la variation ω elle-même, soit une de ses dérivées différentielles, un terme de la forme

$$\nabla^{\gamma}_{x} \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \,.\, . \,.\, \nabla^{\gamma_m}_{x_m} \nabla^{\gamma_{m+1}}_{x_{m+1}} \,.\, . \,.\, \nabla^{\gamma_n}_{x_n} \Theta\, \theta$$

pourra s'écrire sous cette nouvelle forme (article 24) :

$$\nabla^{\gamma}_{x} \nabla^{\gamma_1}_{x_1} \,.\, . \,.\, \nabla^{\gamma_m}_{x_m} \Big(\theta\, \nabla^{\gamma_{m+1}}_{x_{m+1}} \,.\, . \,.\, \nabla^{\gamma_n}_{x_n} \Theta\,;$$

ou bien encore, sous la forme

$$\mathrm{L} \qquad \nabla^{\gamma}_{x}\,\nabla^{\gamma_1}_{x_1}\ldots\nabla^{\gamma_m}_{x_m}\Theta'\theta,$$

en faisant, pour abréger,

$$(9) \qquad \Theta' = \nabla^{\gamma_{m+1}}_{x_{m+1}}\,\nabla^{\gamma_{m+2}}_{x_{m+2}}\ldots\nabla^{\gamma_n}_{x_n}\Theta.$$

Mais, d'après la nature de la caractéristique 7, les expressions $7^{x'_n}_{x_n}u$, $7^{x''_n}_{x_n}u$, $\int u dx_n$, sont toutes les trois des fonctions de x, x_1, x_2, .. x_{n-1}, indépendantes de x_n :

Par suite, $\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u$ est indépendante de x_n;

Par suite, $\nabla^{\gamma_{n-1}}_{x_{n-1}}\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u$ sera indépendante de x_n et x_{n-1};

Par suite, $\nabla^{\gamma_{n-2}}_{x_{n-2}}\nabla^{\gamma_{n-1}}_{x_{n-1}}\nabla^{\gamma_n}_{x_n}u$ sera indépendante de x_n, x_{n-1} et x_{n-2}, et ainsi de suite.

Par conséquent, la valeur de Θ' donnée par l'équation ci-dessus sera indépendante de x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n, et le terme L sera composé comme s'il n'y avait que les variables indépendantes x, x_1, x_2, ... x_m.

101. On voit de là que si l'on prépare chaque terme de l'équation $\Omega = 0$ de la manière que nous venons d'indiquer dans le dernier article, elle rentrera dans le cas où l'on n'a que les variables indépendantes x, x_1, x_2, .. x_m, et où ω peut être une fonction quelconque de ces variables.

102. Maintenant, si nous rapprochons la conclusion précédente de la règle donnée à l'article 98, nous trouverons que,

Pour former les diverses équations qui peuvent provenir de l'équation aux variations $\Omega = 0$, dans le cas où ω peut être une fonction quelconque de

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{m-1},\ x_m,$$

mais indépendante de x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n, il faut,

1° Grouper tous les termes qui se trouvent renfermer, et la

même dérivée de ω, et les mêmes signes d'intégration $\int dx_\mu$, $\int dx_{\mu'+1}$, $\int dx_{\mu''}$, ... relatifs à des variables x_μ, $x_{\mu'}$, $x_{\mu''}$, . . . dont l'indice ne dépasse pas m;

2° Dans chacun des groupes obtenus de cette manière, supprimer les signes d'intégration $\int dx_\mu$, $\int dx_{\mu'+}$, $\int dx_{\mu''}$, . . . *mais en conservant ceux qui seraient* relatifs à des variables dont l'indice est plus grand que m;

3° Égaler à zéro chacun des résultats obtenus, ce qui donnera un égal nombre d'équations qui auront lieu dans toute l'étendue qui peut être comprise entre les limites

$$x'''_\mu \text{ et } x^{IV}{}_\mu \text{ pour } x_\mu;\ x'''_{\mu'} \text{ et } x^{IV}{}_{\mu'} \text{ pour } x_{\mu'};\ x'''_{\mu''} \text{ et } x^{IV}{}_{\mu''} \text{ pour } x_{\mu''}, \ldots$$

qui seront différentes pour les différents groupes, et qui devront être formées comme il a été indiqué article 92 *bis*.

102. Si, par cas, il arrivait que, par la nature du problème à résoudre, une certaine variable z dût être indépendante de x_ρ, sa variation tronquée $\overline{\delta z}$ devrait aussi être indépendante de x_ρ; et, par suite, si $\overline{\delta z}$ pouvait renfermer une ou plusieurs des variables $x_{\rho+1}$, $x_{\rho+2}$, $x_{\rho+3}$, ... la théorie précédente cesserait d'être applicable. Il sera cependant facile de tourner cette difficulté et de ramener la question aux cas traités dans le paragraphe précédent et dans les premiers articles de celui-ci; il suffira de regarder dès le principe la variable z comme soumise à l'équation de condition

$$\frac{dz}{dx_\rho} = 0$$

et d'avoir égard à cette équation de condition au moyen de la méthode connue des multiplicateurs.

On agirait d'une manière analogue si, par cas, z devait être indépendante de plusieurs variables x_ρ, $x_{\rho'}$, $x_{\rho''}$ . . . . , en employant les équations de condition

$$\frac{dz}{dx_\rho} = 0,\ \frac{dz}{dx_{\rho'}} = 0,\ \frac{dz}{dx_{\rho''}} = 0 \ldots$$

103. Ce qui précède nous paraît donner les moyens de trouver toutes les équations, soit indéfinies, soit aux limites qui sont nécessaires pour déterminer complétement les maxima et les minima des intégrales définies ordinaires et des autres expressions définies que nous avons considérées. Nous terminerons donc ce chapitre en faisant observer que les méthodes que nous venons de développer s'appliqueraient également aux cas où l'on voudrait employer les variations complètes au lieu des variations tronquées. Nous ferons observer cependant *que l'emploi des variations complètes est extrêmement délicat, et que, par exemple, les variations* δx, δy, *ne doivent pas être supposées égales dans le calcul des variations des deux intégrales définies*

$$\iint dx\,dy.\ \mathrm{P} \text{ et } \iiint dx\,dy\,dz.\ \mathrm{Q},$$

puisqu'elles ne sauraient évidemment renfermer z *toutes les fois qu'il s'agira de la première intégrale, tandis qu'elles doivent renfermer cette variable lorsqu'il s'agira de la seconde.*

Nous avons négligé d'avertir que,

Toutes les fois que l'on sait *a priori* qu'il y a lieu à appliquer les simplifications mentionnées aux articles 44 et 45, il convient de les effectuer au fur et à mesure qu'on en aperçoit la possibilité. Sans cela, le calcul pourrait conduire à des équations de condition auxquelles il ne serait pas possible de satisfaire. Au reste, cela n'aurait que peu d'inconvénients, puisque cette impossibilité avertirait elle-même de la négligence que l'on aurait commise.

Mais, si l'on ne sait pas *a priori* que de pareilles simplifications doivent avoir lieu, on doit éviter de les effectuer; sans quoi, on s'exposerait à laisser de côté certaines équations de condition peut-être indispensables. C'est ainsi que nous avons agi dans notre première question de l'article 131.

CHAPITRE IV.

1.

104. Dans ce nouveau chapitre nous donnerons les formules qui sont nécessaires pour la recherche des maxima et minima, dans le cas où le nombre des variables indépendantes ne dépasse pas trois.

105. Pour ne pas renvoyer continuellement aux autres chapitres, nous rappellerons que l'on doit avoir (ρ étant différent de i)

$$(1)\quad \frac{d\int u\,dx_i}{dx_\rho} = \int \frac{du}{dx_\rho}\,dx_i + \mathcal{T}_{x_i}^{x''_i}\, u\,\frac{dx''_i}{dx_\rho} - \mathcal{T}_{x_i}^{x'_i}\, u\,\frac{dx'_i}{dx_\rho}\ \text{(article 13)},$$

$$(2)\quad \frac{d\,\mathcal{T}_{x_i}^{y_i} u}{dx_\rho} = \mathcal{T}_{x_i}^{y_i}\left(\frac{du}{dx_\rho} + \frac{du}{dx_i}\,\frac{dy_i}{dx_\rho}\right)\ \text{(article 18)},$$

$$(3)\quad \int \frac{du}{dx_i}\,dx_i = \mathcal{T}_{x_i}^{x''_i}\, u - \mathcal{T}_{x_i}^{x'_i}\, u\ \text{(article 5)},$$

et par suite, en remplaçant dans cette dernière u par $u\,\theta$,

$$(4)\quad \int u\,\frac{d\theta}{dx_i}\,dx_i = -\int dx_i\,\frac{du}{dx_i}\,\theta + \mathcal{T}_{x_i}^{x''_i}\, u\,\theta - \mathcal{T}_{x_i}^{x'_i}\, u\,\theta.$$

106. Quant au calcul des variations, nous aurons dans tous les cas

$$(5)\quad \delta u = \overline{\delta} u + \frac{du}{dx}\,\delta x + \frac{dx}{dx_1}\,\delta x_1 + \frac{du}{dx_2}\,\delta x_2 \ldots\ \text{(article 60)},$$

$$(6)\quad \overline{\delta}\,\frac{d^{\mu+\mu'+\mu''}\omega}{dx^\mu\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}} = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''}\,\overline{\delta}\,\omega}{dx^\mu\, dx_1^{\mu'}\, dx_2^{\mu''}}\ \text{(article 63)},$$

$$(7)\quad \overline{\delta}\int u\,dx_i = \int dx_i\,\overline{\delta}\, u + \mathcal{T}_{x_i}^{x''_i}\, u\,\overline{\delta}\, x''_i - \mathcal{T}_{x_i}^{x'_i}\, u\,\overline{\delta}\, x'_i\ \text{(article 64)}.$$

De plus, si l'on a

$$u = \mathrm{F}(a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots x, x_1, x_2),$$

il viendra

$$\bar{\delta} u = \frac{du}{da}\bar{\delta} a + \frac{du}{db}\bar{\delta} b + \frac{du}{dc}\bar{\delta} c + \ldots + \frac{du}{dp}\bar{\delta} p + \frac{du}{dq}\bar{\delta} a + \frac{du}{dr}\bar{\delta} r + \ldots \qquad (8)$$

(Art. 62.)

Enfin si, par cas, w est une expression définie, on aura

$$\delta w = \bar{\delta} w. \qquad (9)$$

(Art. 61.)

Par inadvertance, nous oubliions la formule

$$\bar{\delta}\, 1_{x_i}^{y_i} u = 1_{x_i}^{y_i}\left(\bar{\delta} u + \frac{du}{dx_i}\bar{\delta} y_i\right). \qquad (10)$$

(Art. 66.)

107. Telles sont les formules que nous allons successivement appliquer aux cas d'une, deux et trois variables indépendantes.

2.

108. Dans le cas d'une variable indépendante, nous aurons, comme cas particuliers,

$$\bar{\delta} \int u dx = \int dx\, \bar{\delta} u + 1_x^{x''} u \bar{\delta} x'' - 1_x^{x'} u \bar{\delta} x',$$

$$\bar{\delta}\, 1_x^{y} u = 1_x^{y}\left(\bar{\delta} u + \frac{du}{dx}\bar{\delta} y\right),$$

et pour opérer les transformations du paragraphe 3, chapitre III,

$$\int u \frac{d\theta}{dx} dx = - \int dx \frac{du}{dx}\theta + 1_x^{x''} u\theta - 1_x^{x'} u\theta.$$

3.

109. Dans le cas de deux variables indépendantes x et x_1, nous aurons d'abord (article 106)

$$\bar\delta \int u dx = \int dx\, \bar\delta u + 1_x^{x''} u \bar\delta x'' - 1_x^{x'} u \bar\delta x'$$
$$\bar\delta\, 1_x^y u = 1_x^y \left(\bar\delta u + \frac{du}{dx}\,\bar\delta y\right);$$

alors nous remplacerons successivement la fonction u par l'intégrale $\int u dx_1$ et par $1_{x_1}^{y_1} u$, et nous trouverons

$$\bar\delta \int dx \int dx_1 = \int dx \int dx_1\, \bar\delta u + 1_x^{x''} \int dx_1\, u\bar\delta x'' - 1_x^{x'} \int dx_1\, u\bar\delta x'$$
$$+ \int dx\, 1_{x_1}^{x''_1} u\bar\delta x''_1 - \int dx\, 1_{x_1}^{x'_1} u\bar\delta x'_1,$$

$$\bar\delta \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} u = \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \bar\delta u + \int dx\, 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1}\,\bar\delta y_1$$
$$+ 1_x^{x''} 1_{x_1}^{y_1} u\bar\delta x'' - 1_x^{x'} 1_{x_1}^{y_1} u\bar\delta x',$$

$$\bar\delta\, 1_x^y \int u dx_1 = 1_x^y \int dx_1\, \bar\delta u + 1_x^y \int dx_1 \frac{du}{dx}\,\bar\delta y$$
$$+ 1_x^y 1_{x_1}^{x''_1} u\bar\delta x''_1 - 1_x^y 1_{x_1}^{x'_1} u\bar\delta x'_1$$
$$+ 1_x^y 1_{x_1}^{x''_1} u\frac{dx''_1}{dx}\,\bar\delta y - 1_x^y 1_{x_1}^{x'_1} u\frac{dx'_1}{dx}\,\bar\delta y,$$

$$\bar\delta\, 1_x^y 1_{x_1}^{y_1} u = 1_x^y 1_{x_1}^{y_1} \bar\delta u + 1_x^y 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx}\,\bar\delta y + 1_x^y 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1}\,\bar\delta y_1$$
$$+ 1_x^y 1_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\,\bar\delta y.$$

110. Nous aurons encore, comme cas particulier (art. 105),

$$\int \frac{du}{dx} dx = 1_x^{x''} u - 1_x^{x'} u;$$

alors, en remplaçant successivement u par $\int u dx_1$ et par $\mathcal{T}_{x_1}^{y_1} u$, nous trouverons

$$\int dx \int dx_1 \frac{du}{dx} = \mathcal{T}_x^{x''} \int dx_1 u - \mathcal{T}_x^{x'} \int dx_1 u - \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} u \frac{dx''_1}{dx} + \int dx \, \mathcal{T}_x^{x'_1} u \frac{dx'_1}{dx},$$

$$\int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx} = \mathcal{T}_x^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} u - \mathcal{T}_x^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} u - \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx};$$

ensuite, nous remplacerons dans ces dernières u par $u\theta$, et il viendra

$$\int dx \int dx_1 u \frac{d\theta}{dx} = - \int dx \int dx_1 \frac{du}{dx} \theta + \mathcal{T}_x^{x''} \int dx_1 u\theta - \mathcal{T}_x^{x'} \int dx_1 u\theta - \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} u\theta \frac{dx''_1}{dx} + \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} u\theta \frac{dx'_1}{dx},$$

$$\int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} u \frac{d\theta}{dx} = - \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx} \theta - \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} \frac{du}{dx_1} \theta \frac{dy_1}{dx} - \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} u \frac{d\theta}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} + \mathcal{T}_x^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} u\theta - \mathcal{T}_x^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{y_1} u\theta.$$

111. Nous aurons encore, comme cas particulier (art. 105),

$$\int \frac{du}{dx_1} dx_1 = \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} u - \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} u,$$

et, par suite, en remplaçant u par $u\theta$,

$$\int dx_1 . u \frac{d\theta}{dx_1} = - \int dx_1 \frac{du}{dx_1} \theta + \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} u\theta - \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} u\theta;$$

nous en conclurons

$$\int dx \int dx_1 u \frac{d\theta}{dx_1} = - \int dx \int dx_1 \frac{du}{dx_1} \theta + \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} u\theta - \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} u\theta,$$

$$\mathcal{T}_x^{y} \int dx_1 u \frac{d\theta}{dx_1} = - \mathcal{T}_x^{y} \int dx_1 \frac{du}{dx_1} \theta + \mathcal{T}_x^{y} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} u\theta - \mathcal{T}_x^{y} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} u\theta.$$

4.

112. Dans les cas de trois variables indépendantes x, x_1, x_2, nous commencerons par trouver les diverses formules que nous venons de donner dans le dernier paragraphe, et en remplaçant ensuite u par $\int u dx_2$, ou $1^{\gamma_2}_{x_2} u$, nous en déduirons (de celles qui ne renferment point θ)

$$(11)\quad \begin{aligned}\overline{\delta} \int dx \int dx_1 \int dx_2\, u = {} & \int dx \int dx_1 \int dx_2\, \overline{\delta} u \\ & + \int dx \int dx_1\, 1^{x''_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x''_2 - \int dx \int dx_1\, 1^{x'_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x'_2 \\ & + \int dx\, 1^{x''_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \overline{\delta} x''_1 - \int dx\, 1^{x'_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \overline{\delta} x'_1 \\ & + 1^{x''}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u\, \overline{\delta} x'' - 1^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u\, \delta x',\end{aligned}$$

$$(12)\quad \begin{aligned}\overline{\delta} \int dx \int dx_1\, 1^{\gamma_2}_{x_2} u = {} & \int dx \int dx_1\, 1^{\gamma_2}_{x_2} \overline{\delta} u + \int dx \int dx_1\, 1^{\gamma_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \overline{\delta} y_2 \\ & + \int dx\, 1^{x''_1}_{x_1} 1^{\gamma_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x''_1 - \int dx\, 1^{x'_1}_{x_1} 1^{\gamma_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x'_1 \\ & + 1^{x''}_{x} \int dx_1\, 1^{\gamma_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x'' - 1^{x'}_{x} \int dx_1\, 1^{\gamma_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x',\end{aligned}$$

$$(13)\quad \begin{aligned}\overline{\delta} \int dx\, 1^{\gamma_1}_{x_1} \int u dx_2 = {} & \int dx\, 1^{\gamma_1}_{x_1} \int dx_2 . \overline{\delta} u + \int dx\, 1^{\gamma_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_1} \overline{\delta} y_1 \\ & + \int dx\, 1^{\gamma_1}_{x_1} 1^{x''_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x''_2 - \int dx\, 1^{\gamma_1}_{x_1} 1^{x'_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x'_2 \\ & + \int dx\, 1^{\gamma_1}_{x_1} 1^{x''_2}_{x_2} u\, \frac{dx''_2}{dx_1} \overline{\delta} y_1 - \int dx\, 1^{\gamma_1}_{x_1} 1^{x'_2}_{x_2} u\, \frac{dx'_2}{dx_1} \overline{\delta} y_1 \\ & + 1^{x''}_{x} 1^{\gamma_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \overline{\delta} x'' - 1^{x'}_{x} 1^{\gamma_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \overline{\delta} x',\end{aligned}$$

$$(14)\quad \begin{aligned}\overline{\delta} 1^{\gamma}_{x} \int dx_1 \int u dx_2 = {} & 1^{\gamma}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, \overline{\delta} u + 1^{\gamma}_{x} \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx} \overline{\delta} y \\ & + 1^{\gamma}_{x} \int dx_1\, 1^{x''_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x''_2 - 1^{\gamma}_{x} \int dx_1\, 1^{x'_2}_{x_2} u\, \overline{\delta} x'_2 \\ & + 1^{\gamma}_{x} \int dx_1\, 1^{x''_2}_{x_2} u\, \frac{dx''_2}{dx} \overline{\delta} y - 1^{\gamma}_{x} \int dx_1\, 1^{x'_2}_{x_2} u\, \frac{dx'_2}{dx} \overline{\delta} y \\ & + 1^{\gamma}_{x} 1^{x''_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \overline{\delta} x''_1 - 1^{\gamma}_{x} 1^{x'_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \overline{\delta} x'_1 \\ & + 1^{\gamma}_{x} 1^{x''_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \frac{dx''_1}{dx} \overline{\delta} y - 1^{\gamma}_{x} 1^{x'_1}_{x_1} \int dx_2\, u\, \frac{dx'_1}{dx} \overline{\delta} y,\end{aligned}$$

$$(15)\quad \bar\delta \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u = \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \bar\delta u + \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1$$
$$+ \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \bar\delta y_2 + \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \bar\delta y_1$$
$$+ \mathcal{T}^{x''}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x'' - \mathcal{T}^{x'}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x',$$

$$(16)\quad \bar\delta\, \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u = \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \bar\delta u + \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} \bar\delta y$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \bar\delta y_2 + \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1 \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx} \bar\delta y$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x''_1 - \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u\, \bar\delta x'_1$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u \frac{dx''_1}{dx} \bar\delta y - \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u \frac{dx'_1}{dx} \bar\delta y,$$

$$(17)\quad \bar\delta\, \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \int u dx_2 = \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \int dx_2\, \bar\delta u + \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx} \bar\delta y$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 + \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u\, \bar\delta x''_2 - \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} u\, \bar\delta x'_2$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx} \bar\delta y - \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} u \frac{dx'_2}{dx} \bar\delta y$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} \bar\delta y_1 - \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1} \bar\delta y_1$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y - \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y,$$

$$(18)\quad \bar\delta\, \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u = \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \bar\delta u + \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} \bar\delta y$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \bar\delta y_1 + \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \bar\delta y_2$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y + \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx} \bar\delta y$$
$$+ \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \bar\delta y_1 + \mathcal{T}^{y}_{x} \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} \bar\delta y,$$

$$(19)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2 . \frac{du}{dx} = \mathcal{T}^{x''}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u - \mathcal{T}^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2 . u$$
$$- \int dx\, \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 . u \frac{dx''_1}{dx} + \int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 u \frac{dx'_1}{dx}$$
$$- \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{x''_2}_{x} u \frac{dx''_2}{dx} + \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx},$$

$$(20)\quad \int dx \int dx_1 \, 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} = - \int dx \int dx_1 \, 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx} + 1^{x''}_{x} \int dx_1 \, 1^{y_2}_{x_2} u - 1^{x'}_{x} \int dx_1 \, 1^{y_2}_{x_2} u - \int dx \, 1^{x''_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} u \frac{dx''_1}{dx} + \int dx \, 1^{x'_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} u \frac{dx'_1}{du},$$

$$(21)\quad \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} \int dx_2 . \frac{du}{dx} = - \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} \int dx_2 . \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} + 1^{x''}_{x} 1^{y_1}_{x_1} \int dx_2 u - 1^{x'}_{x} 1^{y_1}_{x_1} \int dx_2 u - \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx} + \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx} - \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} + \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1} \frac{dy_1}{dx},$$

$$(22)\quad \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx} = - \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} \frac{dy_1}{dx} - \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx} - \int dx \, 1^{y_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + 1^{x''}_{x} 1^{y_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} u - 1^{x'}_{x} 1^{y_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} u,$$

$$\int dx_1 \int dx_2 . \frac{du}{dx_1} = 1^{x''_1}_{x} \int dx_2 . u - 1^{x'_1}_{x} \int dx_2 u - \int dx_1 \, 1^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} + \int dx_1 \, 1^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1},$$

$$\int dx_1 \, 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} = - \int dx_1 \, 1^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2} \frac{dy_2}{dx_1} + 1^{x''_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} u - 1^{x'_1}_{x_1} 1^{y_2}_{x_2} u.$$

113. Les deux dernières formules que nous venons de trouver nous donneront

$$(23)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_1} = \int dx \, 1^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 u - \int dx \, 1^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 u - \int dx \int dx_1 \, 1^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} + \int dx \int dx_1 \, 1^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1},$$

$$(24)\quad 1^{y}_{x} \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_1} = 1^{y}_{x} 1^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 u - 1^{y}_{x} 1^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 u - 1^{y}_{x} \int dx_1 \, 1^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx_1} + 1^{y}_{x} \int dx_1 \, 1^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx_1},$$

$$(25)\quad \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} = -\int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \int dx\, \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u - \int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u,$$

$$(26)\quad \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_1} = -\mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \mathcal{T}^{y}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u - \mathcal{T}^{y}_{x}\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u.$$

114. Enfin l'identité

$$\int dx_2 . \frac{du}{dx_2} = \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u - \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u$$

nous donnera

$$(27)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_2} = \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u - \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u,$$

$$(28)\quad \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_2} = \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u - \int dx\, \mathcal{T}^{y_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u,$$

$$(29)\quad \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1 \int dx_2 . \frac{du}{dx_2} = \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u - \mathcal{T}^{y}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u,$$

$$(30)\quad \mathcal{T}^{y}_{x}\mathcal{T}^{y_1}_{x_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_2} = \mathcal{T}^{y}_{x}\mathcal{T}^{y_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u - \mathcal{T}^{y_2}_{x}\mathcal{T}^{y_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u.$$

115. Après cela, nous remplacerons u par $u\theta$ dans les formules 19, 20, 21 ..... 29 et 30 des articles précédents, et nous trouverons ainsi

$$\begin{aligned}(31)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx} = &-\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx}\theta \\ &+ \mathcal{T}^{x''}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u\theta - \mathcal{T}^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2\, u\theta \\ &- \int dx\, \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1} \int dx_2\, u \frac{dx''_1}{dx}\theta + \int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2\, u \frac{dx'_1}{dx}\theta \\ &- \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} u \frac{dx''_2}{dx}\theta + \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} u \frac{dx'_2}{dx}\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(32)\quad \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u \frac{d\theta}{dx} = &-\int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx}\theta - \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx}\theta \\ &- \int dx \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u \frac{dy_2}{dx}\frac{d\theta}{dx_2} \\ &+ \mathcal{T}^{x''}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u\theta - \mathcal{T}^{x'}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u\theta \\ &- \int dx\, \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u \frac{dx''_1}{dx}\theta + \int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{y_2}_{x_2} u \frac{dx'_1}{dx}\theta,\end{aligned}$$

$$(33)\quad \int dx\, \mathrm{T}_{x}^{y_1} \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx} = -\int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \frac{du}{dx}\theta - \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx}\theta$$
$$- \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u \frac{dy_1}{dx}\frac{d\theta}{dx_1}$$
$$+ \mathrm{T}_{x}^{x'} \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u\,\theta - \mathrm{T}_{x}^{x'} \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u\,\theta$$
$$- \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx}\theta + \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx}\theta$$
$$- \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta + \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta,$$

$$(34)\quad \int dx\, \mathrm{T}_{x}^{y_1} \mathrm{T}_{x_1}^{y_2} u \frac{d\theta}{dx} = -\int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx}\theta - \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta$$
$$- \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx}\theta - \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\theta$$
$$- \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_1}{dx}\frac{d\theta}{dx_1} - \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_2}{dx}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$- \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_2}{dx_1}\frac{dy_1}{dx}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$+ \mathrm{T}_{x}^{x''} \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u\,\theta - \mathrm{T}_{x}^{x'} \mathrm{T}_{x_1}^{y_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u\,\theta,$$

$$(35)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx_1} = -\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_1}\theta$$
$$+ \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\, u\,\theta - \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\, u\,\theta$$
$$- \int dx \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx_1}\theta + \int dx \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx_1}\theta,$$

$$(36)\quad \mathrm{T}_{x}^{y} \int dx_1 \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx_1} = -\mathrm{T}_{x}^{y} \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_1}\theta$$
$$+ \mathrm{T}_{x}^{y} \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\, u\,\theta - \mathrm{T}_{x}^{y} \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\, u\,\theta$$
$$- \mathrm{T}_{x}^{y} \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} u \frac{dx''_2}{dx_1}\theta + \mathrm{T}_{x}^{y} \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} u \frac{dx'_2}{dx_1}\theta,$$

$$(37)\quad \int dx \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u \frac{d\theta}{dx} = -\int dx \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_1}\theta - \int dx \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1}\theta$$
$$- \int dx \int dx_1\, \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_2}{dx_1}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$+ \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u\,\theta - \int dx\, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \mathrm{T}_{x_2}^{y_2} u\,\theta,$$

$$(38)\quad \nabla_x^{y} \int dx_1 \nabla_{x_2}^{y_2} u \frac{d\theta}{dx_1} = -\nabla_x^{y} \int dx_1 \nabla_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_1}\theta - \nabla_x^{y} \int dx_1 \nabla_{x_2}^{y_2} \frac{du}{dx_2}\frac{dy_2}{dx_1}\theta$$
$$- \nabla_x^{y} \int dx_1 \nabla_{x_2}^{y_2} u \frac{dy_2}{dx_1}\frac{d\theta}{dx_2}$$
$$+ \nabla_x^{y} \nabla_{x_1}^{x''_1} \nabla_{x_2}^{y_2} u\theta - \nabla_x^{y} \nabla_{x_1}^{x'_1} \nabla_{x_2}^{y_2} u\theta,$$

$$(39)\quad \int dx \int dx_1 \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx_2} = -\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+ \int dx \int dx_1 \nabla_{x_2}^{x''_2} u\theta - \int dx \int dx_1 \nabla_{x_2}^{x_2} u\theta,$$

$$(40)\quad \int dx \nabla_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx_2} = -\int dx \nabla_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+ \int dx \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{x''_2} u\theta - \int dx \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{x'_2} u\theta,$$

$$(41)\quad \nabla_x^{y} \int dx_1 \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx_2} = -\nabla_x^{y} \int dx_1 \int dx_2 \frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+ \nabla_x^{y} \int dx_1 \nabla_{x_2}^{x''_2} u\theta - \nabla_x^{y} \int dx_1 \nabla_{x_2}^{x_2} u\theta,$$

$$(42)\quad \nabla_x^{y'} \nabla_{x_1}^{y_1} \int dx_2\, u \frac{d\theta}{dx_2} = -\nabla_x^{y} \nabla_{x_1}^{y_1} \int dx_2 \frac{du}{dx_2}\theta$$
$$+ \nabla_x^{y} \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{x''_2} u\theta - \nabla_x^{y} \nabla_{x_1}^{y_1} \nabla_{x_2}^{x_2} u\theta.$$

116. Nous pourrions continuer d'une manière analogue et considérer successivement quatre, cinq, ... variables indépendantes. Mais, d'un côté, cette marche permettrait difficilement d'apercevoir la loi des résultats, tandis que, d'un autre côté, l'emploi de la caractéristique ∇ nous a rendu la chose facile.

5.

117. D'après ce que nous avons vu dans le dernier chapitre, lorsqu'il s'agira de rechercher les maxima et minima des fonctions définies provenant de fonctions de trois variables indépendantes,

l'équation $V = o$, calculée au moyen des formules des paragraphes précédents, se composera d'une suite de termes de la forme

$$\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \ominus \theta,$$

en désignant toujours par θ, soit la variation tronquée d'une des inconnues, soit une dérivée différentielle d'une pareille variation. De là, et d'après la marche des calculs des articles 84 et suivants, on voit que la transformation $V_3 = o$ se composera de termes de la même forme, mais dont aucun ne pourra être de l'une des suivantes

$$\int dx \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \ominus \frac{d\theta_1}{dx},$$

$$\nabla_x^{\gamma} \int dx_1 \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \ominus \frac{d\theta_1}{dx_1},$$

$$\nabla_x^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \int dx_2 \ominus \frac{d\theta_2}{dx_2},$$

en désignant par θ_1, soit une des variations tronquées des inconnues, soit une dérivée différentielle d'une semblable variation.

118. D'après ce que nous venons de voir, si nous désignons par θ_2 une variation tronquée de l'une des inconnues du problème, la somme des termes de l'équation $V_3 = o$ qui sera affectée de cette variation θ_2 (*et non de ses dérivées*) se présentera sous la forme suivante, dans laquelle, selon les circonstances, il pourra manquer un ou plusieurs termes:

$$\begin{aligned}
&\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, M \, \theta_2 \\
+ &\int dx \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x_2''} \, M_1 \, \theta_2 \\
+ &\int dx \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x_2'} \, M_2 \, \theta_2 \\
+ &\int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1''} \int dx_2 \, M_3 \, \theta_2 \\
+ &\int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \int dx_2 \, M_4 \, \theta_2 \\
+ &\gamma^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \, M_5 \, \theta_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \; \mathrm{M}_6 \, \theta_2 \\
&+ \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_7 \, \theta_2 \\
&+ \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_8 \, \theta_2 \\
&+ \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_9 \, \theta_2 \\
&+ \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_{10} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_{11} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_{12} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_{13} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_{14} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \; \mathrm{M}_{15} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \; \mathrm{M}_{16} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \; \mathrm{M}_{17} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \; \mathrm{M}_{18} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_{19} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_{20} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_{21} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_{22} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_{23} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_{24} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; \mathrm{M}_{25} \, \theta_2 \\
&+ \mathcal{T}_{x}^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; \mathrm{M}_{26} \, \theta_2 .
\end{aligned}
$$

119. Si θ_2 représentait une dérivée d'une des variations tronquées des inconnues, on arriverait à trouver dans l'équation

$V_3 = 0$ une somme analogue à la précédente, mais dans laquelle il manquerait nécessairement les termes de la forme

$$\int dx \ \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \Theta \frac{d\theta}{dx},$$
$$\nabla_{x}^{\gamma} \int dx_1 \ \nabla_{x_2}^{\gamma_2} \Theta \frac{d\theta}{dx_1},$$
$$\nabla_{x}^{\gamma} \nabla_{x_1}^{\gamma_1} \int dx_2 \ \Theta \frac{d\theta}{dx_2},$$

puisque, par hypothèse, l'équation $V_3 = 0$ ne peut pas renfermer des termes de cette dernière forme (article 88).

120. Quant à la manière de tirer de l'équation $V_3 = 0$ les diverses équations, soit indéfinies, soit aux limites, qu'elle peut renfermer, nous renverrons aux articles 94 et suivants.

121. Nous terminerons ce chapitre par quelques considérations géométriques qui nous serviront à matérialiser, pour ainsi dire, les formes des expressions que nous venons de considérer, et à les rendre par là plus faciles à concevoir. Elles formeront le sujet du paragraphe suivant.

6.

122. Nous regarderons les variables indépendantes x, x_1, x_2, comme les coordonnées rectangulaires d'un point pris dans l'intérieur d'un corps T, dont la surface servirait à déterminer les limites de ces variables; en outre, pour fixer les idées, nous supposerons l'axe de x_2 vertical et dirigé de bas en haut.

Dès lors, x'_2 et x''_2 seront les hauteurs de deux points de la surface du corps T, situées sur une même ordonnée parallèle à l'axe de x_2, et la différence $x''_2 - x'_2$ sera la partie de cette ordonnée qui sera interceptée par le corps et comprise dans son intérieur.

Nous désignerons par F'_2 la face inférieure de ce corps, dont l'équation sera $x_2 = x'_2$, et l'étendue

$$\int dx \int dx_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2},$$

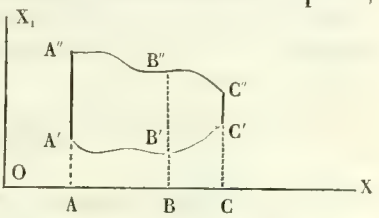
que nous écrirons sous la forme (article 77)

$$\int dx \int dx_1 \, 1 \, {}_{x_2}^{x'_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2}.$$

Nous désignerons par F''_2 la face supérieure du corps T, dont l'équation sera $x_2 = x''_2$, et l'étendue

$$\int dx \int dx_1 \, 1 \, {}_{x_2}^{x''_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2}.$$

123. Concevons un cylindre vertical circonscrit au corps T; la base de ce cylindre se trouvera limitée par le contour A′, B′, C′, C″, B″, A″, A′, dans lequel



L'arc A′, B′, C′ aura pour équation $x_1 = x'_1$, et chacun de ses éléments différentiels aura pour valeur $dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}$;

L'arc A″, B″, C″ aura pour équation $x_1 = x''_1$, et chacun de ses éléments différentiels aura pour valeur $dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2}$;

La droite A′, A″ aura pour équation $x = x'$;

La droite C′, C″ aura pour équation $x = x''$.

124. Maintenant, tous les points du corps T pour lesquels nous aurons $x_1 = x'_1$ seront en même temps sur la surface du cylindre circonscrit et formeront, soit une simple courbe ayant A′, B′, C′ pour projection horizontale, soit une face cylindrique dont les dimensions verticales seraient exprimées par $1 \, {}_{x'_1}^{x''_1} (x''_2 - x'_2)$.

Comme ce dernier cas embrasse le premier comme cas particulier, nous désignerons par F'_1 la face dont il est question, et dont l'étendue sera

$$\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}\, 1^{x'_1}_{x_1} (x''_2 - x'_2),$$

ou bien

$$\int dx\ 1^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2},$$

en observant que $x''_2 - x'_2$ peut être remplacé par $\int dx_2$ et que le facteur $\sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}$, ne renfermant ni x_1 ni x_2, peut passer sous les signes $1^{x'_1}_{x_1}$ et $\int dx_2$.

125. Des considérations analogues nous feront admettre une nouvelle face cylindrique F''_1, dont les points seront donnés par l'équation $x_1 = x''_1$, et dont l'étendue sera

$$\int dx\ 1^{x''_1}_{x_1} \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2}.$$

126. Les mêmes considérations nous feront admettre encore une face plane F' dont les points seront donnés par l'équation $x = x'$, et dont l'étendue sera

$$1^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2.$$

127. Enfin, les mêmes considérations nous feront admettre une dernière face plane F'', dont les points seront donnés par l'équation $x = x''$, et dont l'étendue sera

$$1^{x''}_{x} \int dx_1 \int dx_2.$$

128. Ordinairement les deux faces cylindriques F'_1 et F''_1 devront se réduire à la simple ligne de contact du corps T et du

cylindre circonscrit, et les faces planes F′ et F″ aux points de contact des plans tangents au corps T qui sont perpendiculaires à l'axe de x. Mais dans le calcul des variations on ne doit point supposer qu'il en est ainsi, puisque l'on peut supposer que le corps auxiliaire auquel le corps cherché doit être comparé renferme de pareilles faces, lors même que le corps cherché ne doit pas en renfermer lui-même.

129. Maintenant, nous ferons observer que si une fonction u renferme la variable x_2, les expressions $\mathcal{1}_{x_2}^{x'_2} u$, $\mathcal{1}_{x_2}^{x''_2} u$, se rapporteront, la première à des points de la face inférieure F'_2, et la seconde à des points de la face supérieure F''_2.

De même, si u renferme la variable x_1, les deux expressions $\mathcal{1}_{x_1}^{x'_1} u$ et $\mathcal{1}_{x_1}^{x''_1} u$ se rapporteront, la première à des points de la face cylindrique F'_1 et la seconde à des points de la face cylindrique F''_1.

De même encore, si u renferme x, les deux expressions $\mathcal{1}_{x}^{x'} u$ et $\mathcal{1}_{x}^{x''} u$ se rapporteront, la première à des points de la face plane F′ et la seconde à des points de la seconde face plane F″.

Par suite, une expression de la forme

$$\mathcal{1}_{x}^{x'} \mathcal{1}_{x_2}^{x'_2} u$$

se rapportera à des points qui doivent se trouver en même temps et sur la face plane F′ et sur la face supérieure F''_2, c'est-à-dire à ceux de l'arête commune aux deux faces.

De même, une expression telle que

$$\mathcal{1}_{x}^{x} \mathcal{1}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{1}_{x_2}^{x'_2} u$$

se rapportera au point unique situé sur les trois faces F′, F'_1 et F''_2, et ainsi de suite pour les autres expressions.

130. Nous terminerons ici l'exposition des formules et considérations qui se rapportent aux expressions définies provenant

des fonctions de trois variables indépendantes, et nous passerons aux applications particulières qui feront l'objet d'un nouveau chapitre.

CHAPITRE V.

I.

131. Pour première application des théories précédentes, nous chercherons

Quelle peut être la surface qui, sous une même étendue superficielle, renferme le plus grand volume.

132. D'abord, le volume aura pour expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2,$$

et, par suite, sa variation tronquée, calculée au moyen de la formule 11, article 112, sera

$$\begin{aligned} &\int dx \int dx_1 \, \Pi_{x_2}^{x''_2} \, \overline{\delta} \, x''_2 - \int dx \int dx_1 \, \Pi_{x_2}^{x'_2} \, \overline{\delta} \, x'_2 \\ &+ \int dx \, \Pi_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, \overline{\delta} \, x''_1 - \int dx \, \Pi_{x_2}^{x'_2} \int dx_2 \, \overline{\delta} \, x'_1 \\ &+ \Pi_{x}^{x} \int dx_1 \int dx_2 \, \overline{\delta} \, x'' - \Pi_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \, \overline{\delta} \, x' \end{aligned}$$

et la condition du maximum exigera que cette variation soit nulle (article 79).

133. La face plane F′ du corps cherché aura pour expression (article 126)

$$\Pi_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2,$$

et, par suite, sa variation tronquée, calculée par la formule 14 de l'article 112, sera

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}' \qquad & 1_{x}^{x'} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x''_2}\, \bar{\delta}\, x''_2 \qquad - 1_{x}^{x'} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x'_2}\, \bar{\delta}\, x'_2 \\
& + 1_{x}^{x'} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x''_2} \frac{dx''_2}{dx}\, \bar{\delta}\, x' \quad - 1_{x}^{x'} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x'_2} \frac{dx'_2}{dx}\, \bar{\delta}\, x' \\
& + 1_{x}^{x'}\, 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\, \bar{\delta}\, x''_1 \qquad - 1_{x}^{x'}\, 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\, \bar{\delta}\, x'_1 \\
& + 1_{x}^{x'}\, 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{dx''_1}{dx}\, \bar{\delta}\, x' \quad - 1_{x}^{x'}\, 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \frac{dx'_1}{dx}\, \bar{\delta}\, x'.
\end{aligned}
$$

La face plane opposée F″ aura pour expression (article 127)

$$1_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2,$$

et, par suite, sa variation tronquée sera

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}'' \qquad & 1_{x}^{x''} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x''_2}\, \bar{\delta}\, x''_2 \qquad - 1_{x}^{x''} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x'_2}\, \bar{\delta}\, x'_2 \\
& + 1_{x}^{x''} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x''_2} \frac{dx''_2}{dx}\, \bar{\delta}\, x'' \quad - 1_{x}^{x''} \int dx_1\, 1_{x_2}^{x'_2} \frac{dx'_2}{dx}\, \bar{\delta}\, x'' \\
& + 1_{x}^{x''}\, 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2\, \bar{\delta}\, x''_1 \qquad - 1_{x}^{x''}\, 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2\, \bar{\delta}\, x'_1 \\
& + 1_{x}^{x''}\, 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{dx''_1}{dx}\, \bar{\delta}\, x'' \quad - 1_{x}^{x''}\, 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \frac{dx'_1}{dx}\, \bar{\delta}\, x''.
\end{aligned}
$$

La première face cylindrique F′₁ aura pour expression (article 124)

$$\int dx\, 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2},$$

et, par suite, sa variation tronquée, calculée au moyen de la formule 13 (article 112), en observant que $\bar{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}$

est égale à $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}}\frac{d.\,\overline{\delta}\,x'_1}{dx}\cdot\frac{dx'_1}{dx}$, et en faisant, pour abréger $p'=\sqrt{1+\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2}$, sera

$$\begin{aligned}
&\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,\frac{1}{p'}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\frac{d\,\overline{\delta}\,x'_1}{dx}\\
&+\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x''_2}\,p'\,\overline{\delta}\,x''_2 \quad -\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x'_2}\,p'\,\overline{\delta}x'_2\\
&+\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x''_2}\,p'\,\frac{dx''_2}{dx_1}\,\overline{\delta}\,x'_1 \quad -\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x'_2}\,p'\,\frac{dx'_2}{dx_1}\,\overline{\delta}\,x'_1\\
&+\Pi_{x}^{x''}\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,p'\,\overline{\delta}\,x'' \quad -\Pi_{x}^{x_1}\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,p'\,\overline{\delta}x'.
\end{aligned}$$

Comme le premier terme de cette variation est susceptible de la transformation recommandée à l'article 84, nous effectuerons cette transformation au moyen de la formule 33 de l'article 115, et nous trouverons que la variation tronquée de cette face peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
&-\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,\frac{d\left(\frac{1}{p'_1}\,\frac{dx'_1}{dx}\right)}{dx}\,\overline{\delta}x'_1\\
&-\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{p'}\,\frac{dx'_1}{dx}\cdot\frac{dx''_2}{dx}\,\overline{\delta}\,x'_1 \quad +\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{p'}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\frac{dx'_2}{dx}\,\overline{\delta}\,x'_1\\
&-\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{p'}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\overline{\delta}\,x'_1 \quad +\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x'_2}\frac{1}{p'}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\frac{dx'_2}{dx_1}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\overline{\delta}\,x'_1\\
\mathrm{F'_1}\;&+\Pi_{x}^{x''}\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,\frac{1}{p'}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\overline{\delta}\,x'_1 \quad -\Pi_{x}^{x'}\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,\frac{1}{p'}\,\frac{dx'_1}{dx}\,\overline{\delta}x'_1\\
&+\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x''_2}\,p'\,\overline{\delta}\,x''_2 \quad -\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x'_2}\,p'\,\overline{\delta}\,x'_2\\
&+\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x''_2}\,p'\,\frac{dx''_2}{dx_1}\,\overline{\delta}\,x'_1 \quad -\int dx\,\Pi_{x_1}^{x'_1}\Pi_{x_2}^{x'_2}\,p'\,\frac{dx'_2}{dx_1}\,\overline{\delta}x'_1\\
&+\Pi_{x}^{x''}\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,p'\,\overline{\delta}\,x'' \quad -\Pi_{x}^{x'}\Pi_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\,p'\,\overline{\delta}\,x'.
\end{aligned}$$

La seconde face cylindrique $\mathrm{F''_1}$ aura pour expression

$$\int dx\,\Pi_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\sqrt{1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2},$$

et par suite sa variation tronquée, calculée comme la précédente, sera (en faisant, pour abréger $p'' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2}$):

$$
\begin{aligned}
&- \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, \frac{d.\left(\frac{1}{p''}\,\frac{dx''_1}{dx}\right)}{dx}\,\overline{\delta}\,x''_1 \\
&- \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{p''}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx}\,\overline{\delta}\,x''_1 \qquad + \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{p''}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\frac{dx'_2}{dx}\,\overline{\delta}\,x''_1 \\
&- \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{p''}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\overline{\delta}\,x''_1 + \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{p''}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\frac{dx'_2}{dx}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\overline{\delta}\,x''_1 \\
\mathrm{F}''_1 \; &+ \mathrm{T}_{x}^{x''} \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, \frac{1}{p''}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\overline{\delta}\,x''_1 \qquad - \mathrm{T}_{x}^{x'} \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, \frac{1}{p''}\,\frac{dx''_1}{dx}\,\overline{\delta}\,x''_1 \\
&+ \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} p''\,\overline{\delta}\,x''_2 \qquad - \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} p''\,\overline{\delta}\,x'_2 \\
&+ \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} p''\,\frac{dx''_2}{dx_1}\,\overline{\delta}\,x''_1 \qquad - \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} p''\,\frac{dx'_2}{dx_1}\,\overline{\delta}\,x''_1 \\
&+ \mathrm{T}_{x}^{x''} \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, p''\,\overline{\delta}\,x'' \qquad - \mathrm{T}_{x}^{x'} \mathrm{T}_{x^2}^{x''_2} \int dx_2 \, p'\,\overline{\delta}\,x'.
\end{aligned}
$$

La face inférieure F'_2 aura pour expression (article 122)

$$\int dx \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2};$$

par suite, en observant que si l'on fait, pour abréger,

$$q' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2},$$

l'on a

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{dx}\right)^2} = \frac{1}{q'}\,\frac{dx'_2}{dx}\,\frac{d\,\overline{\delta}\,x'_2}{dx} + \frac{1}{q'}\,\frac{dx'_2}{dx_1}\,\frac{d\,\overline{\delta}\,x'_2}{dx_1},$$

la variation tronquée de cette expression, calculée au moyen de la formule 12, article 112, sera égale à

$$
\begin{aligned}
&\int dx \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'}\,\frac{dx'_2}{dx}\,\frac{d\,\overline{\delta}\,x'_2}{dx} + \int dx \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'}\,\frac{dx'_2}{dx}\,\frac{d\,\delta\,x'_2}{dx_1} \\
&+ \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q'\,\overline{\delta}\,x''_1 \qquad - \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q'\,\overline{\delta}\,x'_1 \\
&+ \mathrm{T}_{x}^{x''} \int dx_1 \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q'\,\overline{\delta}\,x'' \qquad - \mathrm{T}_{x}^{x'} \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q'\,\overline{\delta}\,x'.
\end{aligned}
$$

Comme les deux premiers termes de cette variation sont susceptibles des transformations recommandées aux articles 84 et 85, nous effectuerons ces transformations au moyen des formules 32 (article 115) et 37 (article *idem*). De cette manière, elle se changera en (x'_2 ne renfermant pas x_2)

$$
\begin{aligned}
&- \int dx \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \left(\frac{d \frac{1}{q'} \frac{dx_2}{dx}}{dx} + \frac{d \frac{1}{q'} \frac{dx'_2}{dx_1}}{dx_1} \right) \overline{\delta} x'_2 \\
&- \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'} \frac{dx'_2}{dx} \frac{dx''_1}{dx} \overline{\delta} x'_2 + \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'} \frac{dx'_2}{dx} \frac{dx'_1}{dx} \overline{\delta} x'_2 \\
\mathrm{F}''_2 \quad &+ \mathrm{T}_{x}^{x} \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x_2} \frac{1}{q'} \frac{dx'_2}{dx} \overline{\delta} x'_2 \qquad - \mathrm{T}_{x}^{x} \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'} \frac{dx}{dx} \overline{\delta} x'_2 \\
&+ \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'} \frac{dx'_2}{dx_1} \overline{\delta} x'_2 \qquad - \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q'} \frac{dx'_2}{dx_1} \overline{\delta} x'_2 \\
&+ \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q' \, \overline{\delta} x''_1 \qquad - \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q' \, \overline{\delta} x'_1 \\
&+ \mathrm{T}_{x}^{x''} \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q' \, \overline{\delta} x'' \qquad - \mathrm{T}_{x}^{x'} \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} q' \, \overline{\delta} x'.
\end{aligned}
$$

Enfin la face supérieure F''_2 aura pour expression

$$\int dx \int dx_2 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2},$$

et par suite, un calcul semblable au précédent donnera pour sa variation tronquée (en faisant, pour abréger), $q'' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2}$:

$$
\begin{aligned}
&- \int dx \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \left(\frac{d \frac{1}{q''} \frac{dx_2}{dx}}{dx} + \frac{d \frac{1}{q'} \frac{dx'_2}{dx_1}}{dx_1} \right) \overline{\delta} x''_2 \\
&- \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{q''} \frac{dx''_2}{dx} \frac{d''x_1}{xp} \overline{\delta} x''_2 + \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{q''} \frac{dx''_2}{dx} \frac{dx_1}{dx} \overline{\delta} x''_2 \\
\mathrm{F}''_2 \quad &+ \mathrm{T}_{x}^{x'} \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{q''} \frac{dx''_2}{dx} \overline{\delta} x''_2 \qquad - \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_1 \, \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{q''} \frac{dx'_2}{dx} \overline{\delta} x''_2 \\
&+ \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x''_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{q''} \frac{dx''_2}{dx_1} \overline{\delta} x''_2 \qquad - \int dx \, \mathrm{T}_{x_1}^{x'_1} \mathrm{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{q''} \frac{dx''_2}{dx_1} \overline{\delta} x''_2
\end{aligned}
$$

$$+\int dx\, \mathrm{I}_{x_1}^{x''_1}\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta} x''_1 \qquad -\int dx\, \mathrm{I}_{x_1}^{x'_1}\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta} x'_1$$

$$+\mathrm{I}_{x}^{x''}\int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta} x'' \qquad -\mathrm{I}_{x}^{x'}\int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2}\, q''\, \overline{\delta} x';$$

et comme, d'ailleurs, la grandeur de la surface est supposée connue, la somme des variations que nous avons signalées en marge par les lettres F′, F″, F′₁, F″₁, F′₂, F″₂, doit être nulle (article 80).

134. Maintenant, pour former l'équation aux variations V = 0, il faudra, d'après la théorie connue des multiplicateurs, ajouter à la variation du volume celle de la surface multipliée par un facteur constant $\frac{1}{c}$ dont la valeur devra être déterminée plus tard. Et comme, d'ailleurs, nous avons vu, article 80, qu'il suffit d'avoir égard aux variations tronquées, nous trouverons pour l'équation V = 0 :

1 $$0 = \int dx \int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2} \left\{ c - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}}{dx} - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}}{dx_1} \right\} \overline{\delta} x''_2$$

2 $$+\int dx\, \mathrm{I}_{x_1}^{x''_1}\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2} \left\{ p'' - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta} x''_2$$

3 $$+\int dx\, \mathrm{I}_{x_1}^{x'_1}\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2} \left\{ p' + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta} x''_2$$

4 $$+\mathrm{I}_{x}^{x''}\int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2} \left\{ 1 + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x''_2$$

5 $$+\mathrm{I}_{x}^{x'}\int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x''_2} \left\{ 1 - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x''_2$$

6 $$-\int dx \int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x'_2} \left\{ c + \frac{d\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}}{dx} + \frac{d\frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}}{dx_1} \right\} \overline{\delta} x'_2$$

7 $$-\int dx\, \mathrm{I}_{x_1}^{x''_1}\, \mathrm{I}_{x_2}^{x'_2} \left\{ p'' + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta} x'_2$$

8 $$-\int dx\, \mathrm{I}_{x_1}^{x'_1}\, \mathrm{I}_{x_2}^{x'_2} \left\{ p' - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1} \right\} \overline{\delta} x'_2$$

9 $$-\mathrm{I}_{x}^{x''}\int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x'_2} \left\{ 1 - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_2$$

10 $$-\mathrm{I}_{x}^{x'}\int dx_1\, \mathrm{I}_{x_2}^{x'_2} \left\{ 1 + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_2$$

11 . . . . . $+\int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ c - \frac{d\frac{1}{p'}\frac{dx''_1}{dx}}{dx} \right\} \overline{\delta} x''_1$

12 $+\int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} \left\{ q'' + \left(p'' - \frac{1}{p''}\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2 \right) \frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{p''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x_1$

13 . . . . . $+\int dx\, \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} \left\{ q' - \left(p'' - \frac{1}{p''}\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2 \right) \frac{dx'_2}{dx} + \frac{1}{p''}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_1$

14 $+\mathcal{T}^{x}_{x}\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ 1 + \frac{1}{p''}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x''_1$

15 . . . . . $+\mathcal{T}^{x'}_{x}\, \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ 1 - \frac{1}{p'}\frac{dx''_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x''_1$

16 $-\int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ c + \frac{d\frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_1$

17 . . . . . $-\int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} \left\{ q'' - \left(p' - \frac{1}{p'}\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2 \right) \frac{dx''_2}{dx_1} + \frac{1}{p'}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_1$

18 $-\int dx\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} \left\{ q' + \left(p' - \frac{1}{p'}\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2 \right) \frac{dx'_2}{dx_1} - \frac{1}{p'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_1$

19 . . . . . $-\mathcal{T}^{x''}_{x}\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ 1 - \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_1$

20 $-\mathcal{T}^{x'}_{x}\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ 1 + \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x'_1$

21 . . . . . $+\mathcal{T}^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c \right\} \overline{\delta} x''$

22 $+\mathcal{T}^{x''}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} \left\{ q'' + \frac{dx''_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x''$

23 . . . . . $+\mathcal{T}^{x''}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} \left\{ q' - \frac{dx''_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x''$

24 $+\mathcal{T}^{x''}_{x}\, \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ p'' + \frac{dx''_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x''$

25 . . . . . $+\mathcal{T}^{x''}_{x}\, \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ p' - \frac{dx'_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x''$

26 $-\mathcal{T}^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c \right\} \overline{\delta} x'$

27 . . . . . $-\mathcal{T}^{x'}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{x''_2}_{x_2} \left\{ q'' - \frac{dx''_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x'$

28 $-\mathcal{T}^{x'}_{x} \int dx_1\, \mathcal{T}^{x'_2}_{x_2} \left\{ q' + \frac{dx'_2}{dx} \right\} \overline{\delta} x'$

$$29 \ldots\ldots\ldots \quad -1\,{}_{x}^{x'}\,1\,{}_{x_1}^{x''_1}\int dx_2 \left\{ p'' - \frac{dx''_1}{dx'} \right\} \overline{\delta} x'$$

$$30 \qquad\qquad -1\,{}_{x}^{x'}\,1\,{}_{x_1}^{x'_1}\int dx_2 \left\{ p' + \frac{dx'_1}{dx} \right\} \overline{\delta} x',$$

dont nous avons numéroté les termes, afin de rendre les citations plus faciles.

135. Comme nous avons effectué les transformations prescrites dans le paragraphe 3, chapitre II, à mesure que nous en avons vu la nécessité, l'équation $V = 0$ que nous venons de former se trouve toute préparée, et nous pouvons lui appliquer immédiatement les règles des articles 98 et 102.

136. Comme cette équation $V = 0$ de l'article 134 ne renferme que les variations tronquées $\overline{\delta} x'$, $\overline{\delta} x''$, $\overline{\delta} x'_1$, $\overline{\delta} x''_1$, $\overline{\delta} x'_2$, $\overline{\delta} x''_2$, dont aucune ne renferme la variable x_2, nous n'aurons aucune équation indéfinie, proprement dite, se rapportant aux points intérieurs du volume cherché.

137. Tous les termes qui renferment la variation $\overline{\delta} x''_2$ diffèrent les uns des autres par les signes

$$1\,{}_{x}^{x'},\ 1\,{}_{x}^{x''},\ 1\,{}_{x_1}^{x'_1},\ 1\,{}_{x_1}^{x''_1},\ 1\,{}_{x_2}^{x'_2},\ 1\,{}_{x_2}^{x''_2},\ \int dx,\ \int dx_1 :$$

chacun d'eux fournira donc une équation distincte, qui devra avoir lieu dans toute l'étendue des limites compatibles avec la forme de ce terme, *à moins toutefois que cette étendue ne doive être nulle.*

Ainsi, le premier terme nous donnera

$$1\,{}_{x_2}^{x''_2}\left(c - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}}{dx} - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}}{dx_1} \right) = 0,$$

qui devra avoir lieu dans toute l'étendue de la face supérieure $F_{,,}$ et que nous pourrons écrire sous la forme

$$c - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}}{dx} - \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}}{dx_1} = 0,$$

puisque x''_2, et par suite $q'' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2}$, ne renfermant point la variable x_2, le signe $\gamma_{x_0}^{x_2}$ ne peut avoir aucune influence (article 5).

De même, le sixième terme nous donnera

$$c + \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_2}}{dx} + \frac{d\frac{1}{q''}\frac{dx'_2}{dx_1}}{dx_1} = 0$$

pour l'équation de la face inférieure F'_2.

Ces deux équations ne diffèrent que par la notation des résultats déjà obtenus par ceux qui ont traité cette question. Il n'en est pas de même des équations que vont nous donner les autres termes de l'équation $V = 0$ de l'article 134, et que nous allons considérer dans les articles suivants.

138. Le second terme de l'équation de l'article 134 nous donnera

$$\gamma_{x_1}^{x''_1}\gamma_{x_2}^{x''_2}\left(p'' - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}\right) = 0,$$

qui aura lieu dans toute l'étendue de l'arête commune aux faces F''_1 et F''_2.

Maintenant, nous multiplierons les deux membres de cette dernière par l'expression

$$\gamma_{x_1}^{x''_1}\gamma_{x_2}^{x''_2}\left(p'' + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx_1}\right),$$

et en vertu de la formule 18 (article 14),

$$\gamma_p^q\gamma_{p_1}^{q_1}(u.v) = \gamma_p^q\gamma_{p_1}^{q_1}u.\gamma_p^q\gamma_{p_1}^{q_1}v\,[1]:$$

cela nous donnera pour résultat

$$\gamma_x^{x'_1}\gamma_{x_2}^{x''_2}\frac{1}{(q'')^2}\left(p'^2q'^2 - \left(\frac{dx'}{dx}\frac{dx''_1}{dx_1}\right)^2 - \left(\frac{dx'_2}{dx_1}\right)^2 + 2\cdot\frac{dx_2}{dr}\frac{dx_3}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}\right) = 0;$$

[1] Dans cette formule, les fonctions p, p_1, q, q_1, u, v, w, peuvent être quelconques comme à l'article 14.

alors nous remplacerons le produit $p''^2\,q''^2$ par le produit équivalent

$$\left\{1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx_1}\right)^2\right\},$$

que nous développerons; de cette manière, la dernière équation trouvée se mettra sous la forme

$$1\,{}^{x''_1}_{x'_1}\,1\,{}^{x''_2}_{x'_2}\,\frac{1}{q''^2}\left(1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+2\,\frac{dx_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx_1}{dx}\right)=0,$$

ou bien encore sous la forme

$$1\,{}^{x''_1}_{x_1}\,1\,{}^{x''_2}_{x_2}\,\frac{1}{q''^2}\left(1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx}+\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx_1}{dx}\right)^2\right)=0,$$

et enfin, en vertu de la formule déjà citée (article 14),

$$1\,{}^{q}_{p}\,1\,{}^{q_1}_{p_1}\left(uvw\right)=1\,{}^{q}_{p}\,1\,{}^{q_1}_{p_1}u\,.\,1\,{}^{q}_{p}\,1\,{}^{q_1}_{p_1}v\,.\,1\,{}^{q}_{p}\,1\,{}^{q_1}_{p_1}w\,{}^{1},$$

elle pourra se mettre encore sous la forme

$$\left(1\,{}^{x''_1}_{x_1}\,1\,{}^{x''_2}_{x_2}\,\frac{1}{q''}\right)^2\,1\,{}^{x''_1}_{x_1}\,1\,{}^{x''_2}_{x_2}\left(1+\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx''_2}{dx}+\frac{dx''_2}{dx_1}\,\frac{dx''_1}{dx}\right)^2\right)=0:$$

d'où nous conclurons qu'il faut que l'on ait

$$1\,{}^{x''_1}_{x_1}\,1\,{}^{x''_2}_{x_2}\,\frac{1}{q''}=0,$$

et que, par conséquent,

Pour tous les points de l'arête qui sépare les deux faces F''_1 et F''_2, le plan tangent à cette dernière est vertical comme celui de la face cylindrique F''_1.

De là, et de ce que cette arête est commune aux deux faces, nous conclurons que ces deux faces doivent se raccorder.

[1] Dans cette formule, les fonctions p, p_1, q, q_1, u, v, w, peuvent être quelconques comme à l'article 14.

139. Les troisième, quatrième et cinquième termes de l'équation V = 0 de l'article 134 nous donneront

$$\eta_{x_1}^{x'_1}\eta_{x_2}^{x''_2}\left(p' + \frac{1}{q'}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx'} - \frac{1}{q'}\frac{dx''_2}{dx_1}\right) = 0,$$
$$\eta_{x}^{x''}\eta_{x_2}^{x''_2}\left(1 + \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\right) = 0,$$
$$\eta_{x}^{x'}\eta_{x_2}^{x''_2}\left(1 - \frac{1}{q''}\frac{dx''_2}{dx}\right) = 0;$$

Et en traitant chacune d'elles d'une manière analogue à celle du dernier article, nous en conclurons que la surface supérieure doit se raccorder encore avec les trois autres faces adjacentes F'_1, F'' et F'.

140. Nous avons déjà donné (article 37) l'équation de la face inférieure F'_2, qui doit provenir du sixième terme de l'équation V = 0 de l'article 134. Les termes 7, 8, 9 et 10, étant irréductibles, nous donneront les équations

$$\eta_{x_1}^{x''_1}\eta_{x_2}^{x'_2}\left(p'' + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}\right) = 0,$$
$$\eta_{x_1}^{x'_1}\eta_{x_2}^{x'_2}\left(p' - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx} + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx_1}\right) = 0,$$
$$\eta_{x}^{x}\eta_{x_2}^{x'_2}\left(1 - \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\right) = 0,$$
$$\eta_{x}^{x'}\eta_{x_1}^{x'_2}\left(1 + \frac{1}{q'}\frac{dx'_2}{dx}\right) = 0,$$

que nous traiterons comme les précédentes, et d'où nous conclurons que

La face inférieure F'_2 doit aussi se raccorder avec chacune des faces F''_1, F'_1, F'' et F' qui lui sont adjacentes.

141. Comme la variation $\delta x''_1$ ne dépend que de x, et non de x_1 ou x_2, il faudra grouper séparément les termes affectés du signe $\int dx$, ceux qui sont affectés du signe $\eta_x^{x''}$, ceux qui sont affectés du signe $\eta_x^{x'}$, et qui renferment en même temps cette variation (article 102).

Nous devrons agir de même relativement aux termes qui renferment $\overline{\delta x'_1}$: dès lors, en remplaçant

$$p'' - \frac{1}{p''}\left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2 \text{ par } \frac{1}{p''},$$

et

$$p' - \frac{1}{p'}\left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2 \text{ par } \frac{1}{p'},$$

en vertu des relations

$$p' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx'_1}{dx}\right)^2},\ p'' = \sqrt{1 + \left(\frac{dx''_1}{dx}\right)^2},$$

cela nous donnera les six équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\Big\{ \int dx_2 \left(c - \frac{d\frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}}{dx}\right) + \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\left(q'' + \frac{1}{p''}\frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{p''}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx}\right) \\ + \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\left(q' - \frac{1}{p''}\frac{dx'_2}{dx_1} + \frac{1}{p''}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx''_1}{dx}\right)\Big\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\mathcal{T}_{x}^{x''}\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\int dx_2 \left(1 + \frac{1}{p''}\frac{dx''_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\mathcal{T}_{x}^{x'}\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\int dx_2 \left(1 - \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\Big\{ \int dx_2 \left(c + \frac{d\frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}}{dx}\right) + \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\left(q'' - \frac{1}{p'}\frac{dx''_2}{dx_1} + \frac{1}{p'}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\right) \\ \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\left(q' + \frac{1}{p'}\frac{dx'_2}{dx} - \frac{1}{p'}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\right)\Big\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\mathcal{T}_{x}^{x''}\mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\int dx_2 \left(1 - \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}\right) = 0,$$

$$\mathcal{T}_{x}^{x'}\mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\int dx_2 \left(1 + \frac{1}{p'}\frac{dx'_1}{dx}\right) = 0.$$

De ces six équations, les quatre dont la forme est la plus simple peuvent servir à prouver que les faces cylindriques F''_1, F'''_1, doivent se raccorder avec chacune des deux faces planes F′ et F‴.

D'ailleurs, comme les fonctions x'_2, x''_2 x'_3, x'', et par suite

q', q'', p', p'', ne renferment point la variable x_2, on pourra effectuer immédiatement les intégrations par rapport au signe $\int dx_2$ et supprimer les signes $\mathcal{T}_{x_2}^{x_2''}$, $\mathcal{T}_{x_2}^{x_2'}$. Comme cela présente aussi peu de difficulté que d'intérêt, nous ne nous arrêterons point à écrire les résultats.

142. Comme les variations tronquées $\overline{\delta x''}$, $\overline{\delta x'}$, ne peuvent pas renfermer les variables x, x_1, x_2, chacune d'elles ne donnera lieu qu'à une seule équation aux limites, savoir :

$$\mathcal{T}_x^{x''}\left\{\int dx_1\int dx_2.\,c. + \int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x_2''}\left(q'' + \frac{dx_2''}{dx}\right) + \int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x_2'}\left(q' - \frac{dx_2'}{dx}\right)\right\}$$
$$\left\{ + \mathcal{T}_{x_1}^{x_1'}\int dx_2\left(p'' + \frac{dx_1'}{dx}\right) + \mathcal{T}_{x_1}^{x_1'}\int dx_2\left(p' - \frac{dx_1'}{dx}\right)\right\} = 0$$

$$\mathcal{T}_x^{x'}\left\{\int dx_1\int dx_2.\,c. + \int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x_2''}\left(q'' - \frac{dx_2''}{dx}\right) + \int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x_2'}\left(q' - \frac{dx_2'}{dx}\right)\right\}$$
$$\left\{ + \mathcal{T}_{x_1}^{x_1''}\int dx_2\left(p'' - \frac{dx_1''}{dx}\right) + \mathcal{T}_{x_1}^{x_1'}\int dx_2\left(p' - \frac{dx_1'}{dx}\right)\right\} = 0.$$

143. Telles sont les diverses équations auxquelles la surface cherchée devra satisfaire. Comme d'ailleurs il nous paraît difficile d'en tirer plus que nous ne l'avons fait, nous nous bornerons à indiquer que l'on peut supprimer les signes $\mathcal{T}_{x_2}^{x_2''}$ et $\mathcal{T}_{x_2}^{x_2'}$ dans toutes ces équations, parce qu'aucune d'elles ne renferme x_2.

2.

144. Pour seconde application, nous chercherons les équations, soit indéfinies, soit aux limites, d'où dépend la solution de la question suivante :

Quelle doit être la loi des densités des molécules d'un corps dont la forme, la position et la masse sont connues, pour que, en supposant que v exprime la densité d'une molécule dont les coordonnées seraient x, x_1, x_2, l'intégrale

$$\int dx\int dx_1\int dx_2\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_2}\right)^2},$$

soit un minimum? Il est, d'ailleurs, sous-entendu que cette intégrale doit être prise dans toute l'étendue du corps cherché.

145. De ce que la forme et la position du corps sont connues, les variations $\overline{\delta}x'$, $\overline{\delta}x''$, $\overline{\delta}x'_1$, $\delta''x_1$, $\overline{\delta}x'_2$, $\overline{\delta}x''_2$, doivent être supposées nulles.

146. La masse du corps cherché a pour expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, v,$$

et, par suite, sa variation tronquée sera (au moyen des considérations de l'article précédent):

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, \overline{\delta} v.$$

Comme la masse est supposée donnée, sa variation doit être nulle; d'un autre côté, c'est une expression définie, et, par conséquent, sa variation complète ou sa variation tronquée sont égales: nous aurons donc l'équation de condition (voir articles 80 et 81)

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, \overline{\delta} v = 0.$$

147. Par un motif semblable, pour que l'expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_2}\right)^2},$$

soit un minimum, il faut que la variation tronquée soit nulle (article 79). Or, cette variation sera (en faisant pour abréger $\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx_2}\right)^2} = r$),

égale à

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{d\overline{\delta}v}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{d\overline{\delta}v}{dx_1} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\frac{d\overline{\delta}v}{dx_2}\right),$$

pourvu que l'on ait égard aux conditions de l'article 145.

148. Maintenant, nous aurons l'équation aux variations $V = 0$. En ajoutant l'expression de l'article précédent avec celle de l'article 146, multipliée par une constante c, convenablement déterminée, nous aurons donc

$$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c\,\bar{\delta} v + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{d\bar{\delta}v}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{d\bar{\delta}v}{dx_1} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\frac{d\bar{\delta}v}{dx} \right\}.$$

149. Pour passer de cette équation à l'équation $V_3 = 0$, nous commencerons par transformer le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{d\bar{\delta}v}{dx},$$

au moyen de la formule 31 de l'article 115 : cela nous donnera pour résultat équivalent

$$\begin{aligned}
&- \int dx \int dx_1 \int dx_2 \, \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}}{dx}\,\bar{\delta} v \\
&+ \int_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\,\bar{\delta} v \quad - \int_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\,\bar{\delta} v \\
&- \int dx \int_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_1}{dx}\,\bar{\delta} v + \int dx \int_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx'_1}{dx}\,\bar{\delta} v \\
&- \int dx \int dx_1 \int_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_2}{dx}\,\bar{\delta} v + \int dx \int dx_1 \int_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx'_2}{dx}\,\bar{\delta} v.
\end{aligned}$$

Après cela, nous transformerons le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{d\bar{\delta}v}{dx_1},$$

au moyen de la formule 35 de l'article 115 : cela nous donnera pour résultat équivalent

$$\begin{aligned}
&- \int dx \int dx_1 \int dx_2 \, \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}}{dx_1}\,\bar{\delta} v \\
&+ \int dx \int_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\,\bar{\delta} v \quad - \int dx \int_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\,\bar{\delta} v \\
&- \int dx \int dx_1 \int_{x_2}^{x''_2} \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx''_2}{dx_1}\,\bar{\delta} v + \int dx \int dx_1 \int_{x_2}^{x'_2} \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx_1}\,\bar{\delta} v,
\end{aligned}$$

Enfin, nous transformerons le terme

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 . \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$$

au moyen de la formule 39 de l'article 115, et nous trouverons pour résultat équivalent

$$- \int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2}}{dx_2}$$
$$+ \int dx \int dx_1 \, 1 \, {}^{x''_2}_{x_2} \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \bar{\delta}v - \int dx \int dx_1 \, 1 \, {}^{x'_2}_{x_2} \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \bar{\delta}v.$$

150. Si, maintenant, nous substituons les différents résultats que nous venons de trouver dans l'équation aux variations de l'article 148, nous trouverons, pour l'équation $V_3 = 0$ réduite à la forme la plus simple,

$$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 \left\{ c - \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx}}{dx} - \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1}}{dx_1} - \frac{d \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2}}{dx_2} \right\} \bar{\delta}v$$
$$- \int dx \int dx_1 \, 1 \, {}^{x''_2}_{x_2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx''_2}{dx} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \right\} \bar{\delta}v$$
$$+ \int dx \int dx_1 \, 1 \, {}^{x'_2}_{x_2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx'_2}{dx} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \frac{dx'_2}{dx_1} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_2} \right\} \bar{\delta}v$$
$$- \int dx \, 1 \, {}^{x''_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \right\} \bar{\delta}v$$
$$+ \int dx \, 1 \, {}^{x'_1}_{x_1} \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \frac{dx'_1}{dx} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dx_1} \right\} \bar{\delta}v$$
$$+ 1 \, {}^{x''}_{x} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \right\} \bar{\delta}v$$
$$- 1 \, {}^{x'}_{x} \int dx_1 \int dx_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \right\} \bar{\delta}v.$$

151. Comme la variation $\bar{\delta}v$ peut renfermer les trois variables x, x_1, x_2, les différents termes de cette équation sont irréductibles, et chacun d'eux donnera une équation, soit indéfinie,

soit aux limites, que l'on formera en supprimant les signes d'intégration. Nous aurons donc pour résultat

$$c - \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}}{dx} - \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}}{dx_1} - \frac{d\frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}}{dx_2} = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x''_2}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_2}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx''_2}{dx_1} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\right\} = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x'_2}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_2}{dx} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx_1} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_2}\right\} = 0.$$

$$\int_{x_1}^{x''_1}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx''_1}{dx} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\right\} = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x'_1}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\frac{dx'_1}{dx} - \frac{1}{r}\frac{dv}{dx_1}\right\} = 0,$$

$$\int_{x}^{x''}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\right\} = 0,$$

$$\int_{x}^{x'}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dx}\right\} = 0.$$

La première de ces équations se rapportera à tous les points du corps; la seconde à la face supérieure F''_2; la troisième, aux points de la face inférieure F'_2; la quatrième, à ceux de la face cylindrique F''_1; la cinquième, à ceux de la face cylindrique F'_1; la sixième, à ceux de la face plane F''; enfin, la dernière, à ceux de la face plane F'.

152. Si, par cas, il est possible de ramener le cas particulier que l'on traite à celui d'une surface dont tous les points seraient donnés par une seule équation $w = 0$ en x, x_1 et x_2, les six équations aux limites du dernier article se réduiront à cette équation unique

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dx_1}\frac{dw}{dx_1} + \frac{dv}{dx_2}\frac{dw}{dx_2}\right\} = 0$$

qui devra être satisfaite par tous les points de la surface du corps: ce qui peut avoir lieu de deux manières différentes, qu'il faudra discuter séparément.

3.

153. Pour troisième et dernière application, nous chercherons les équations d'où dépend la solution de la question suivante :

Quelle doit être la loi des densités des molécules d'un corps dont on connaît la forme et la position, pour que, en désignant par v la densité de la molécule ayant x, x_1, x_2, pour coordonnées et par w une fonction quelconque donnée de x, x_1, x_2 et v, l'intégrale

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, w \frac{d^3v}{dx\, dx_1\, dx_2},$$

soit un maximum (ou un minimum), en supposant, d'ailleurs, cette intégrale prise dans toute l'étendue du corps?

154. Comme dans le dernier paragraphe, les variations tronquées $\overline{\delta}x'$, $\overline{\delta}x''$, $\overline{\delta}x'_1$, $\overline{\delta}x''_1$, $\overline{\delta}x'_2$, $\overline{\delta}x''_2$, devront être nulles, et, par suite, l'équation aux variations $V = 0$ sera

$$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 . \overline{\delta}\, w \frac{d^3v}{dx\, dx_1\, dx_2},$$

c'est-à-dire

$$0 = \int dx \int dx_1 \int dx_2 . \frac{dw}{dv} \frac{d^3v}{dx\, dx_1\, dx_2} \overline{\delta}v$$
$$+ \int dx \int dx_1 \int dx_2 . \, w \frac{d^3\overline{\delta}v}{dx\, dx_1\, dx_2}.$$

155. Le second terme de cette équation est passible des transformations prescrites dans les articles 84, 85,....., et auxquelles nous allons procéder.

D'abord, au moyen de la formule 31 de l'article 115, l'expression

$$\int dx \int dx_1 \int dx_2 \, w \frac{d^3\overline{\delta}v}{dx\, dx_1\, dx_2}$$

se transformera en

$$
\begin{aligned}
&- \int dx \int dx_1 \int dx_2 . \frac{dw}{dx} \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2},\\
&+ \mathcal{T}_x^{x''} \int dx_1 \int dx_2 . \; w \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2} - \mathcal{T}_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \; w \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2}\\
&- \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \; w . \frac{dx''_1}{dx} \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2} + \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \; w \frac{dx'_1}{dx} \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2}\\
&- \int dx \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; w \frac{dx''_2}{dx} \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2} + \int dx \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; w \frac{dx'_2}{dx} \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2}.
\end{aligned}
$$

Ces derniers termes étant encore eux-mêmes passibles de transformations, nous procéderons à celles qui se rapportent à la variable x_1, au moyen des formules 36 et 37 de l'article 115. Nous trouverons ainsi que leur somme peut être remplacée par

$$
\begin{aligned}
&\int dx \int dx_1 \int dx_2 \frac{d^2w}{dx\, dx_1} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&- \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \frac{dw}{dx} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} + \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \frac{dw}{dx} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&+ \int dx \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \frac{dw}{dx} \frac{dx''_2}{dx_1} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} - \int dx \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \frac{dw}{dx} \frac{dx_2}{dx_1} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&- \mathcal{T}_x^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \frac{dw}{dx_1} \frac{d\delta v}{dx_2}\\
&+ \mathcal{T}_x^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \; w \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} - \mathcal{T}_x^{x''} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, w \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&- \mathcal{T}_x^{x''} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; w \frac{dx''_2}{dx_1} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} + \mathcal{T}_x^{x'} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; w \frac{dx'_2}{dx_1} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&+ \mathcal{T}_x^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \frac{dw}{dx_1} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&- \mathcal{T}_x^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \; w \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} + \mathcal{T}_x^{x'} \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, w \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&+ \mathcal{T}_x^{x'} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; w \frac{dx''_2}{dx_1} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} - \mathcal{T}_x^{x'} \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x'_2} \; w \frac{dx'_2}{dx} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&- \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \; w \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2} + \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \, w \frac{d^2\bar{\delta}v}{dx_1\, dx_2}\\
&+ \int dx \int dx_1 \, \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \left(w \frac{d^2 x''_2}{dx\, dx_1} + \frac{dw}{dx_1} \frac{dx''_2}{dx} \right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}\\
&- \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \; w \frac{dx''_2}{dx} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2} + \int dx \, \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1} \mathcal{T}_{x_2}^{x''_2} \, w \frac{dx''_2}{dx} \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}
\end{aligned}
$$

$$+\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\frac{dw}{dx_2}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{d\bar\delta v}{dx_2}$$

$$+\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\,w\,\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\frac{d^2\bar\delta v}{dx_2^2}$$

$$-\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\left(w\,\frac{d^2x'_2}{dx\,dx_1}+\frac{dw}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx}\right)\frac{d\bar\delta v}{dx_2}$$

$$+\int dx\,\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\,w\,\frac{dx'_2}{dx}\frac{d\bar\delta v}{dx_2}\qquad-\int dx\,\mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\,w\,\frac{dx'_2}{dx}\frac{d\bar\delta v}{dx_2}$$

$$-\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\frac{dw}{dx_2}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\frac{d\bar\delta v}{dx_2}$$

$$-\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\,w\,\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\frac{d^2\bar\delta v}{dx_2^2}.$$

Comme cette somme renferme encore des termes dans lesquels on trouve en même temps et le signe d'intégration $\int dx_2$ et la dérivée, $\frac{d\bar\delta v}{dx_2}$, nous transformerons ces derniers termes, et, substituant ces résultats dans l'équation $V=0$ de l'article 154, nous aurons, pour l'équation $V_3=0$,

1 $$0=\int dx\int dx_1\int dx_2\left(\frac{dw}{dv}-\frac{d^2v}{dx\,dx_1\,dx_2}-\frac{d^2w}{dx\,dx_1\,dx_2}\right)\bar\delta v$$

2 $$+\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_1}\right)\bar\delta v$$

3 $$+\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\left(w\frac{d^2x''_2}{dx\,dx_1}+\frac{dw}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}+\frac{dw}{dx_1}\frac{dx''_2}{dx}+\frac{dw}{dx_2}\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\right)\frac{d\bar\delta v}{dx_2}$$

4 $$+\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\left(w\frac{dx''_2}{dx}\frac{dx''_2}{dx_1}\right)\frac{d^2\bar\delta v}{dx_2^2}$$

5 $$-\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_1}\right)\bar\delta v$$

6 $$-\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\left(w\frac{d_2x'_2}{dx\,dx_1}+\frac{dw}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}+\frac{dw}{dx_1}\frac{dx'_2}{dx}+\frac{dw}{dx_2}\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\right)\frac{d\bar\delta v}{dx_2}$$

7 $$-\int dx\int dx_1\,\mathcal{T}_{x_2}^{x'_2}\left(w\frac{dx'_2}{dx}\frac{dx'_2}{dx_1}\right)\frac{d^2\bar\delta v}{dx_2^2}$$

8 $$+\int dx\,\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_2}\right)\bar\delta v$$

9 $$+\int dx\,\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\int dx_2\left(\frac{dw}{dx_2}\right)\frac{d\bar\delta v}{dx_1}$$

10 $$-\int dx\,\mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\int dx_2\left(\frac{d^2w}{dx\,dx_2}\right)\bar\delta v$$

11 . . . . . $- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_1}$

12 $+ \gamma_{x}^{x''} \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{d^2w}{dx_1 dx_2}\right) \bar{\delta}v$

13 . . . . . $- \gamma_{x}^{x'} \int dx_1 \int dx_2 \left(\frac{d^2w}{dx_1 dx_2}\right) \bar{\delta}v$

14 $+ \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1''} \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx}\right) \bar{\delta}v$

15 . . . . . $- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1''} \gamma_{x_2}^{x_2''} (w) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_1}$

16 $- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1''} \gamma_{x_2}^{x_2''} \left(w \frac{dx_2''}{dx}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$

17 . . . . . $- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1''} \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx}\right) \bar{\delta}v$

18 . . . . . $+ \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1''} \gamma_{x_2}^{x_2'} (w) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_1}$

19 . . . . . $+ \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1''} \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(w \frac{dx_2'}{dx}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$

20 $- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \gamma_{x_2}^{x_2''} \left(\frac{dw}{dx}\right) \bar{\delta}v$

21 . . . . . $+ \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \gamma_{x_2}^{x_2''} (w) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_1}$

22 $+ \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \gamma_{x_2}^{x_2''} \left(w \frac{dx_2''}{dx}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$

23 . . . . . $+ \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx}\right) \bar{\delta}v$

24 $- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \gamma_{x_2}^{x_2'} (w) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_1}$

25 . . . . . $- \int dx \, \gamma_{x_1}^{x_1'} \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(w \frac{dx_2'}{dx}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$

26 $- \gamma_{x}^{x'} \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \bar{\delta}v$

27 . . . . . $- \gamma_{x}^{x'} \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x_2''} \left(w \frac{dx_2''}{dx_1}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$

28 $+ \gamma_{x}^{x''} \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(\frac{dw}{dx_1}\right) \bar{\delta}v$

29 . . . . . $+ \gamma_{x}^{x''} \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x_2'} \left(w \frac{dx_2'}{dx_1}\right) \frac{d\bar{\delta}v}{dx_2}$

30 $+ \gamma_{x}^{x'} \int dx_1 \, \gamma_{x_2}^{x_2''} (w) \bar{\delta}v$

$$31 \ldots\ldots + 1_{x}^{x'} \int dx_1 \, 1_{x_2}^{x''_2} \left(w \frac{dx''_2}{dx_1} \right) \frac{d\overline{\delta} v}{dx_2}$$

$$32 \quad - 1_{x}^{x'} \int dx_1 \, 1_{x_2}^{x'_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$33 \ldots\ldots - 1_{x}^{x'} \int dx_1 \, 1_{x_2}^{x'_2} \left(w \frac{dx'_2}{dx_1} \right) \frac{d\overline{\delta} v}{dx_2}$$

$$34 \quad - 1_{x}^{x'} 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2} \right) \overline{\delta} v$$

$$35 \ldots\ldots + 1_{x}^{x''} 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2} \right) \overline{\delta} v$$

$$36 \quad + 1_{x}^{x'} 1_{x_1}^{x''_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2} \right) \overline{\delta} v$$

$$37 \ldots\ldots - 1_{x}^{x'} 1_{x_1}^{x'_1} \int dx_2 \left(\frac{dw}{dx_2} \right) \overline{\delta} v$$

$$38 \quad + 1_{x}^{x''} 1_{x_1}^{x''_1} 1_{x_2}^{x''_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$39 \ldots\ldots - 1_{x}^{x''} 1_{x_1}^{x''_1} 1_{x_2}^{x'_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$40 \quad - 1_{x}^{x''} 1_{x_1}^{x'_1} 1_{x_2}^{x''_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$41 \ldots\ldots + 1_{x}^{x''} 1_{x_1}^{x'_1} 1_{x_2}^{x'_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$42 \quad - 1_{x}^{x'} 1_{x_1}^{x''_1} 1_{x_2}^{x''_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$43 \ldots\ldots + 1_{x}^{x'} 1_{x_1}^{x''_1} 1_{x_2}^{x'_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$44 \quad + 1_{x}^{x'} 1_{x_1}^{x'_1} 1_{x_2}^{x''_2} \, (w) \, \overline{\delta} v$$

$$45 \ldots\ldots - 1_{x}^{x'} 1_{x_1}^{x'_1} 1_{x_2}^{x'_2} \, (w) \, \overline{\delta} v.$$

156. Comme la variation $\overline{\delta} v$, qui entre dans l'équation que nous venons de calculer, peut être une fonction quelconque de x, x_1, x_2, chaque terme de cette équation fournira une équation, soit indéfinie, soit aux limites, que l'on formera en supprimant les signes d'intégration qui entrent dans ce terme, et qui aura lieu dans toute l'étendue compatible avec la forme de ce même terme (article 98).

Ainsi,

1° Le premier terme nous donnera l'équation indéfinie

$$\frac{dw}{dv}\,\frac{d^2v}{dx\,dx_1\,dx_2} - \frac{d^2w}{dx\,dx_1\,dx_2} = 0,$$

qui aura lieu dans toute l'étendue du corps.

2° Les trois termes suivants nous donneront

$$\begin{aligned}
&\int_{x_2}^{x''_2} \frac{d^2w}{dx\,dx_1} = 0,\\
&\int_{x_2}^{x''_2} \left(w\,\frac{d^2x''_2}{dx\,dx_1} + \frac{dw}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1} + \frac{dw}{dx_1}\,\frac{dx''_2}{dx} + \frac{dw}{dx_2}\,\frac{dx''_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\right) = 0,\\
&\int_{x_2}^{x''_2} \left(w\,\frac{dx''_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\right) = 0,
\end{aligned}$$

qui auront lieu dans toute l'étendue de la face supérieure F''_2.

D'ailleurs, comme x''_2 ne renferme point la variable x_2, la dernière pourra se mettre sous la forme

$$\frac{dx''_2}{dx}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\int_{x_2}^{x''_2} w = 0,$$

d'où nous conclurons

$$\int_{x_2}^{x''_2} w = 0.$$

Cette dernière, différentiée par rapport à x et à x_1, nous donnera

$$\begin{aligned}
&\int_{x_2}^{x''_2} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dx_2}\,\frac{dx''_2}{dx}\right) = 0,\\
&\int_{x_2}^{x''_2} \left(\frac{dw}{dx_1} + \frac{dw}{dx_2}\,\frac{dx''_2}{dx_1}\right) = 0,
\end{aligned}$$

dont la combinaison, avec la seconde des trois équations ci-dessus, conduit à

$$\int_{x_2}^{x''_2} \frac{dw}{dx} = 0, \quad \int_{x_2}^{x''_2} \frac{dw}{dx_1} = 0, \quad \int_{x_2}^{x''_2} \frac{dw}{dx_2} = 0.$$

Nous pourrons encore différentier ces dernières par rapport à

x et à x_1, et comparer les résultats avec ceux déjà trouvés, et ainsi de suite. De cette manière, nous arriverons à conclure que

Toutes les dérivées de w, d'un ordre quelconque, doivent se réduire à zéro toutes les fois que l'on remplacera x_2 par x''_2, c'est-à-dire, toutes les fois qu'il s'agira d'un point de la face F''_2.

3° Les trois termes suivants de l'équation aux variations de l'article 155 nous donneront

$$\int_{x_2}^{x'_2} \frac{d^2 w}{dx\, dx_1} = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x'_2} \left(w \frac{d^2 x'_2}{dx\, dx_1} + \frac{dw}{dx} \frac{dx'_2}{dx_1} + \frac{dw}{dx_1} \frac{dx'_2}{dx} + \frac{dw}{dx_2} \frac{dx'_2}{dx} \frac{dx'_2}{dx_1} \right) = 0,$$

$$\int_{x_2}^{x'_2} \left(w \frac{dx'_2}{dx} \frac{dx'_2}{dx_1} \right) = 0,$$

qui auront lieu pour tous les points de la face inférieure F'_2 et qui fourniront des conclusions analogues aux précédentes.

4° Les huitième et neuvième termes nous donneront

$$\int_{x_1}^{x''_1} \frac{d^2 w}{dx\, dx_2} = 0, \qquad \int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx_2} = 0,$$

qui auront lieu pour tous les points de la face cylindrique F''_1, et sur lesquels nous nous arrêterons un moment.

Faisons pour abréger

$$\int_{x_1}^{x''_1} w = P, \qquad \int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx} = Q,$$

en les différentiant par rapport à x_2, et observant que x''_1 ne renfermant pas cette variable, on a $\frac{dx''_1}{dx_2} = 0$, nous trouverons

$$\int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx_2} = \frac{dP}{dx_2}, \qquad \int_{x_1}^{x''_1} \frac{dw}{dx_2} = \frac{dQ}{dx_2},$$

dont la comparaison avec les équations ci-dessus nous montre que $\frac{dP}{dx_2} = 0$ et $\frac{dQ}{dx_2} = 0$, c'est-à-dire que les fonctions P et Q ne

doivent pas renfermer la variable x_2; mais alors, en désignant par q une fonction quelconque, nous aurons identiquement

$$\mathcal{T}_{x_2}^{q}\,\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\,w = \mathcal{T}_{x_2}^{q}\,\mathrm{P} = \mathrm{P}, \quad \mathcal{T}_{x_2}^{q}\,\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\,\frac{dw}{dx} = \mathcal{T}_{x_2}^{q}\,\mathrm{Q} = \mathrm{Q}.$$

D'un autre côté, les quatorzième et quinzième termes nous donneront

$$\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\,\mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\,w = 0, \quad \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\,\mathcal{T}_{x_2}^{x''_2}\,\frac{dw}{dx} = 0,$$

dont les premiers membres seront égaux aux précédents, si, par cas, on a pris pour q une valeur convenable (article 35); nous pouvons donc conclure que l'on doit avoir $\mathrm{P} = 0$ et $\mathrm{Q} = 0$, c'est-à-dire

$$\mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\,w = 0 \qquad \text{et } \mathcal{T}_{x_1}^{x''_1}\,\frac{dw}{dx} = 0.$$

En partant de ces différentes équations et en les différentiant successivement une ou plusieurs fois, par rapport aux variables x et x_2, nous arriverons encore à la conclusion que

Pour tous les points de la face cylindrique F''_1, la fonction w et toutes ses dérivées doivent se réduire à zéro comme pour les faces déjà considérées.

5° Les dixième et onzième termes de l'équation aux variations nous donneront encore

$$\mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\,\frac{d^2w}{dx\,dx_2} = 0, \quad \mathcal{T}_{x_1}^{x'_1}\,\frac{dw}{dx_2} = 0,$$

qui se rapportent aux points de la face cylindrique F'_1, et d'où nous pourrions tirer des conclusions analogues aux précédentes.

6° Les deux termes suivants nous donneront

$$\mathcal{T}_{x}^{x'}\,\frac{d^2w}{dx_1\,dx_2} = 0, \quad \mathcal{T}_{x}^{x'}\,\frac{d^2w}{dx_1\,dx_2} = 0,$$

qui se rapportent, la première aux points de la face plane F″, et l'autre à ceux de la face plane F′.

Par des procédés analogues aux précédents, et au moyen des équations données par quelques-uns des termes suivants de l'équation aux variations, nous pourrons en déduire encore que

Pour tous les points de ces deux faces comme pour ceux des précédentes, la fonction w et toutes ses dérivées partielles doivent se réduire à zéro.

7° Enfin, les autres termes donneraient

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}\frac{dw}{dx}=0, & \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}\frac{dw}{dx}=0, & \mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,\\
\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}\frac{dw}{dx}=0, & \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}\frac{dw}{dx}=0, & \mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,\\
\mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}\frac{dw}{dx_1}=0, & \mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & \mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}\frac{dw}{dx_1}=0, & \mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,\\
, \mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & & \mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,\\
\mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\frac{d^2w}{dx_2}=0, & \mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}w=0, & \mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}w=0, & \mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}w=0,
\end{array}$$

qui se rapportent aux différentes arêtes, et

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & \mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,\\
\mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & \mathcal{T}^{x''}_{x}\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,\\
\mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & \mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x''_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,\\
\mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x''_2}_{x_2}w=0, & \mathcal{T}^{x'}_{x}\mathcal{T}^{x'_1}_{x_1}\mathcal{T}^{x'_2}_{x_2}w=0,
\end{array}$$

qui se rapportent aux huit sommets.

En rapprochant les différentes conditions précédentes, qui se rapportent aux limites, on voit qu'elles se réduisent à signifier que,

Pour tous les points de la surface du corps dont il est question, il faut que l'on ait

$$w=0.$$

157. Si la forme connue du corps eût été comme celle d'un ellipsoïde, telle que nous l'avons supposée dans le premier cas de l'article 43, l'équation aux variations de l'article 154 se serait réduite aux sept premiers, aux seizième, dix-neuvième, vingt-deuxième et vingt-cinquième termes.

Nous terminerons cette application en faisant observer que, dans le calcul des dérivées $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dx_1}$, $\frac{dw}{dx_2}$, $\frac{d^2w}{dx\,dx_1}$, etc. la fonction v, qui, par hypothèse, entre dans la composition de w, doit être traitée comme une fonction des variables x, x_1, x_2. Comme la solution complète de la question que nous venons de traiter n'est point l'objet de nos recherches, nous ne croyons pas nécessaire de développer les équations qui, en ayant égard à cette considération, devraient remplacer celles que nous avons données, et dont elles ne seraient qu'une simple transformation.

ERRATUM.

Partout où l'on trouvera z comme indice, on doit remplacer cette lettre par λ : c'est ce qui doit avoir lieu notamment aux pages 34, 35-38.

CATALOGUE GÉNÉRAL
DES ÉTOILES FILANTES

ET

DES AUTRES MÉTÉORES OBSERVÉS EN CHINE

PENDANT VINGT-QUATRE SIÈCLES,

DEPUIS LE VII^e^ SIÈCLE AVANT J. C. JUSQU'AU MILIEU DU XVII^e^ DE NOTRE ÈRE,

DRESSÉ, D'APRÈS LES DOCUMENTS CHINOIS,

PAR M. ÉD. BIOT.

(PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LES 31 MAI ET 26 JUILLET 1841.)

INTRODUCTION.

L'attention qui s'est fixée, depuis quelques années, sur les apparitions des étoiles filantes et des autres météores célestes a engagé plusieurs savants à rechercher dans nos anciennes chroniques les phénomènes de ce genre qui ont pu être remarqués autrefois en Europe, et ils ont réuni un assez grand nombre de citations qui paraissent s'y rapporter. J'ai entrepris de faire un travail analogue sur les annales de la Chine, dont l'histoire authentique remonte au XXIV^e^ siècle avant notre ère, et j'ai trouvé dans ces annales un nombre considérable de citations de météores et d'étoiles filantes, avec la date de l'année, celle du mois, généralement celle du

jour, et avec l'indication constante de la direction suivie par les météores observés. J'ai pensé qu'il serait utile de soumettre une traduction exacte de ces documents à l'examen des astronomes, et j'ai effectué cette traduction, qui comprend plus de seize cents observations.

Ces documents méritent toute confiance, parce que leur conservation dérive, non pas seulement d'un souvenir assez vague, comme dans les chroniques de notre moyen âge, mais d'une institution spéciale qui remonte en Chine à une haute antiquité. En effet, depuis plus de dix siècles avant l'ère chrétienne, les Chinois ont attribué à divers groupes stellaires une influence directe sur les diverses provinces de leur pays. Plusieurs des groupes qu'ils ont formés dans le ciel représentent même des palais de leurs empereurs, des fleuves, des montagnes, des routes de la Chine. Ainsi, le ciel chinois a toujours été une véritable représentation du monde chinois, et tout phénomène extraordinaire qui se passait dans une partie du ciel ou dans un groupe stellaire était considéré comme l'indication infaillible d'un événement qui devait alors avoir lieu dans les parties correspondantes de la Chine. D'après cette croyance, l'observation habituelle des comètes, des météores, et l'interprétation des pronostics qui s'en déduisaient, formaient un des principaux devoirs des astronomes impériaux, et c'est ainsi qu'ils ont généralement noté avec soin les dates de l'apparition des grandes étoiles filantes, leur direction et le nom des groupes stellaires où elles ont paru et disparu. Ces indications, jointes aux autres circonstances du phénomène, ont été conservées dans les archives impériales, et publiées ensuite dans une section particulière des annales chronologiques de chaque dynastie, intitulée : *Section de l'ordre du ciel ou de l'astronomie*. Les documents contenus dans cette section ont donc en Chine un véritable caractère officiel, et leur authenticité semble complétement irrécusable.

Pour rédiger le catalogue que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie des sciences, j'ai consulté d'abord les livres CCXCI,

CCXCII, du grand recueil de Ma-touan-lin, célèbre auteur chinois qui vivait à la fin du XIII^e^ siècle de notre ère et fut témoin de la conquête de la Chine par les Mongols. Ma-touan-lin a réuni dans ces deux livres un grand nombre de documents relatifs aux étoiles filantes et aux pierres tombées du ciel, qu'il a trouvés dans la section astronomique des annales officielles antérieures à son époque. M. Abel Rémusat a déjà extrait de ces deux livres, en 1819, cent observations environ qui peuvent se rapporter à des chutes de pierres météoriques, soit par la mention directe des pierres trouvées après l'apparition, soit par la simple mention d'une détonation. Mon but étant plus général, je devais donner la traduction complète de ces deux livres de Ma-touan-lin.

J'ai donc entrepris cette traduction; et la première partie de mon catalogue, qui comprend les anciennes observations, depuis le VII^e^ siècle avant notre ère jusqu'à l'an 960, époque de l'avénement de la dynastie Soung, est extraite totalement du livre CCXCI de Ma-touan-lin. Mais j'ai trouvé alors, folio 15 du livre CCXCII, une note dans laquelle cet auteur dit qu'avant la dynastie Soung les faits relatifs aux météores et aux étoiles filantes sont peu nombreux dans les recueils historiques, tandis que les annales de la dynastie Soung ne laissent aucun mois lunaire sans citation de météores; il ajoute qu'il n'a fait qu'un extrait de ces citations, pour ne pas donner trop de développement à ce sujet particulier. Cette note de Ma-touan-lin m'a fait comprendre que j'avais un autre travail à effectuer que de continuer à traduire ses deux livres, et j'ai été naturellement conduit à recourir aux annales mêmes de la dynastie Soung (*Soung-sse*), qui font partie de la grande collection des vingt-quatre historiens de la Chine. J'ai relevé dans la section astronomique de ces annales, depuis l'an 960 jusqu'à l'an 1275, plus de treize cents observations, que j'ai traduites entièrement. Cette traduction forme la seconde partie de mon catalogue. Les dates cycliques fournies par les annales des Soung diffèrent quelquefois de celles qu'on lit dans Ma-touan-lin pour les mêmes

observations; j'ai placé les deux dates en regard et j'ai indiqué celle que je préférais.

Pour les siècles postérieurs, l'obligeance extrême de M. Stanislas Julien m'a permis de consulter la continuation de Matouan-lin par des auteurs modernes, et la section astronomique des annales des dynasties Youen et Ming, dans la grande collection des vingt-quatre historiens de la Chine, qui s'étend jusqu'à l'an 1647 de notre ère. Les observations extraites de ces ouvrages forment la troisième partie de mon travail, que j'ai conduit ainsi jusqu'à l'époque où finissent les annales de la dynastie Ming. Celles de la dynastie actuelle des Mantchoux, qui lui a succédé, n'ont pas encore été publiées en Chine, l'usage voulant que les annales de chaque dynastie restent dans les archives impériales jusqu'à l'époque où cette dynastie finit par le changement de son nom ou par toute autre cause.

J'ai mis une grande attention à identifier les noms des étoiles et les groupes du ciel chinois avec les noms et les groupes de notre ciel européen. Cette comparaison m'a été facilitée par les recherches des missionnaires du XVIII^e^ siècle, tels que Gaubil, Noël, qui ont fait une étude spéciale de l'astronomie chinoise en Chine même, et par la table comparative donnée par M. Reeves à la fin de la deuxième partie du Dictionnaire de Morrison. Je me suis d'ailleurs servi des planisphères chinois que l'on possède dans divers ouvrages originaux, tels que le *Pou-thien-ko* et l'Encyclopédie japonaise. Les étoiles principales et les groupes se reconnaissent bien, et l'assimilation se fait ainsi avec exactitude. S'il y a quelque incertitude sur la position absolue de certaines étoiles secondaires des planisphères chinois, cette incertitude est renfermée entre des limites assez resserrées, et l'on peut toujours bien reconnaître la direction des météores, d'après les repères donnés par les textes.

J'ai transformé en dates juliennes les dates que ces textes expriment en années de règne, lunes et cycles de jours. Les années de règne se convertissent en années juliennes à l'aide d'un tableau

chronologique, dont M. Klaproth a donné une édition, et l'identification des jours s'obtient par une règle que Gaubil a établie dans son Traité de chronologie chinoise. M. Rémusat n'avait pas appliqué la transformation en jours juliens aux dates des cent observations qu'il a traduites; j'ai donné les dates juliennes, afin qu'on pût les comparer plus facilement avec les dates originales: on fera aisément la correction grégorienne pour celles qui sont postérieures au IV^e^ siècle de notre ère.

J'ai donné à la fin de mon catalogue un tableau général de toutes les observations, classées par années, mois et jours juliens. Ce tableau présente d'un seul coup d'œil le résumé de mon travail; je l'ai divisé en trois parties correspondantes aux trois séries de mon catalogue, et j'ai joint à la seconde partie, qui contient seule plus de treize cents observations, une récapitulation du nombre des météores observés dans chaque mois, avec la correction grégorienne. Je n'ai pas cru devoir faire un semblable relevé pour les observations comprises dans la première et la troisième partie de mon catalogue, parce qu'elles me semblent trop peu nombreuses, relativement aux espaces de temps qu'elles embrassent, savoir, d'une part plus de seize cents ans, et de l'autre plus de trois cent soixante. Il m'a semblé plus prudent de m'en tenir aux observations régulièrement faites sous les Soung: il résulte de leur récapitulation, que les mois d'octobre et de juillet sont ceux qui présentent le plus grand nombre de météores.

Les apparitions composées de beaucoup d'étoiles filantes ensemble sont moins nombreuses dans les textes chinois que je ne l'aurais pensé; il n'y a, au plus, que cinquante apparitions en masse clairement énoncées. J'ai donné une table particulière de ces apparitions à la fin de la table générale. La plupart ne semblent pas soumises à une période évidente de retour régulier: quelques-unes ont même, d'après les circonstances décrites, une ressemblance sensible avec les aurores boréales, quoique les observateurs fussent généralement placés dans des parallèles inférieurs aux 40^e^ et 41^e^ degrés, limite nord de la Chine. Cependant,

on remarque la périodicité d'une apparition d'étoiles filantes en grand nombre, observée quatre fois, de l'an 820 à l'an 841, et ensuite cinq fois, de l'an 924 à l'an 933, entre le 20 et le 25 juillet juliens, ou, avec la correction grégorienne, entre le 25 et le 30 juillet du calendrier actuel. Avant cette époque, trois apparitions de météores isolés se voient, entre les mêmes jours, aux années 352, 568, 642; et plus tard, on en compte treize, toujours entre les mêmes jours, dans les années 1006, 1011, 1019, 1045, 1047, 1048, 1059, 1068, 1070, 1073, 1076, 1091, 1131. Le 27 juillet julien 1451, ou 7 août grégorien, est également remarquable par une quantité considérable d'étoiles filantes. Au XVII^e^ siècle, en 1602, on trouve une grande apparition d'étoiles filantes le 7 novembre julien : cette date, qui correspond au 16 novembre grégorien, est peu éloignée de celle du 13 ou 14 novembre, signalée à l'attention des observateurs modernes. Je pourrais citer encore les dates du 27 octobre 1602 et du 24 octobre 1533, ainsi que celles d'autres apparitions d'étoiles filantes en masse, observées dans deux siècles précédents, vers le commencement de novembre; mais j'aime mieux soumettre purement à l'examen des savants les documents que j'ai traduits, en espérant que mon travail pourra leur offrir quelque intérêt.

PREMIÈRE SÉRIE D'OBSERVATIONS, DEPUIS LE VII^e^ SIÈCLE AVANT J. C. JUSQU'À L'AN 960 DE NOTRE ÈRE.

Ces observations sont extraites du livre CCXCI du *Wen-hian-thoung-khao*.

Années avant J. C. 687. En été, à la 4^e^ lune, jour *sin-mao* (23 mars), pendant la nuit, les étoiles fixes ne parurent pas, quoique la nuit fût claire. Au milieu de la nuit, des étoiles tombèrent comme une pluie.

644. Au printemps, à la 1re lune, jour *wou-chin*, 1er de la lune (24 décembre 645), il tomba cinq pierres dans le pays de Soung (Ho-nan oriental) : c'étaient des étoiles tombantes [1].

211. Pendant que la planète Mars était près du groupe stellaire *Sin* (σ, τ, α, Scorpion), une étoile tomba dans la province Toung-kiun (Chan-toung), et lorsqu'elle eut touché la terre, elle se changea en pierre. Quelques individus gravèrent sur cette pierre l'inscription suivante : « L'empereur va mourir, et la terre sera partagée. » L'empereur Chi-houng apprit cette nouvelle; il envoya des officiers informer sur les lieux, et comme on ne répondit pas à leurs questions, il fit saisir les habitants du canton où la pierre était tombée, les fit exécuter, et ordonna qu'on brûlât la pierre.

192. Une pierre tomba dans le district de Mien-tcheou (latitude 31° 17′, province de Sse-tchouen).

134-128. Période *Youen-kouang*, les étoiles du ciel furent dans une grande agitation.

89. Période *Tching-ho*, 4e année, 12e lune, jour *ting-yeou* (9 mars), deux pierres tombèrent à Young, près de la capitale Tchang-ngan du Chen-si; le ciel était serein, sans nuages : le bruit fut entendu à quarante lieues.

86-81. Période *Chi-youen*, une étoile filante tomba dans le pays de Yen (Pe-tchi-li boréal), sur le palais de Wang-tsaï; elle venait de l'orient.

74. Période *Youen-p'ing*, année unique, 2e lune, jour *kia-chin* (7 avril), au lever du jour, il parut une étoile grande comme la lune : beaucoup d'étoiles la suivaient, et toutes se dirigeaient vers l'ouest. — Au jour *y-yeou* (8 avril), on vit un nuage en forme de chien; sa couleur était rouge, et il avait trois longues queues: il se dirigea à l'O. près de la voie lactée. — A la 3e lune, jour

[1] Les deux citations des années 687, 645, sont extraites du Tchun-thsieou de Confucius, qui est daté d'après la forme d'année des Tcheou, en prenant pour la première lune celle que contient le solstice d'hiver. Depuis le commencement de la dynastie Han (204 avant J. C.), l'année légale a commencé par la lune qui précède celle où se trouve l'équinoxe vernal.

ping-su (9 avril), une étoile filante parut au N. E. des astérismes *Y* (α de l'Hydre et Coupe, et environnantes) et *Tchin* (γ, ε, α, Corbeau), et disparut dans l'enceinte du *Thai-weï* (grande enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion). Quand elle commença à paraître, elle était petite; elle grossit ensuite et devint brillante. Peu après, il y eut un bruit comme un coup de tonnerre qui se répéta trois fois.

38. Période *Khien-tchao*, 1re année, 1re lune, jour *wou-tchin* (13 mars), il tomba six pierres dans le royaume de Liang (environs de Khaï-foung-fou, Ho-nan).

32. Période *Khien-chi*, 1re année, 9e lune, jour *wou-tse* (26 octobre), une étoile filante parut dans le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse). Sa couleur était blanche, sa lumière éclairait la terre; elle pouvait avoir en longueur 40 degrés, en largeur un demi-degré. Ce météore s'agitait comme un serpent. En un instant sa longueur augmenta jusqu'à 50 ou 60 degrés, et sa largeur fut d'environ 2 degrés. En formant des ondulations, il passa à l'E. du *Tse-koung* (enceinte formée par les étoiles de la queue du Dragon, cercle de perpétuelle apparition par latitude 35°). Il se dirigea au N. O. de *Teou* (probablement *Pe-teou*, les sept principales de la grande Ourse) pendant quelques minutes, puis il se courba, et forma un anneau dont le côté nord n'était pas fermé : en quelques minutes, il disparut.

29. Même période, 4e année, 1re lune, jour *kouei-mao* (29 février), il tomba quatre pierres à Khao (Khao-tching, latitude 30° 5′, Pe-tchi-li), et une à Feï-lo (Feï-tching, latitude 36° 39′, Pe-tchi-li).

22. Période *Yang-so*, 3e année, 2e lune, jour *jin-su* (12 avril), il tomba huit pierres à Pe-ma (ville du Toung-kiun, près de Hoa, Pe-tchi-li).

21. Même période, 4e année, lune intercalaire, jour *keng-ou* (le texte ne donne pas le rang de cette lune dans l'année), une étoile volante, grosse comme une cruche, parut au S. O. et disparut au-dessous du groupe *Teou* (φ et autres, Sagittaire).

19. Période *Chun-kia*, 2e année, 5e lune, jour *koueï-oueï* (16 juin), il tomba trois pierres à Tou-yen, ancienne ville près de Nan-yang du Ho-nan.

15. Période *Young-chi*, 2e année, 2e lune, jour *koueï-oueï* (27 mars), après le milieu de la nuit, des étoiles tombèrent comme une pluie; elles étaient longues de 10 à 20 degrés : ce phénomène se répétait continûment. Avant d'arriver à terre, elles s'éteignaient. Au chant du coq, le phénomène cessa.

12. Période *Youen-yen*, 1re année, 3e lune (vers avril), une pierre tomba à Tou-kouan (Chan-yang, latitude 33° 29′, dans le Chen-si). — A la 4e lune, jour *ting-yeou* (24 mai), entre trois et cinq heures de l'après-midi, le ciel étant clair et serein, on entendit à plusieurs reprises un bruit pareil au tonnerre. Il parut un météore dont la partie antérieure était grosse comme un vase, et qui était long de plus de cent pieds ou degrés. Sa lumière était rouge blanchâtre; il se tenait éloigné au S. E. du soleil. Des quatre côtés, il jetait des éclats de feu gros, les uns comme un bassin, les autres comme un œuf, et qui tombaient comme une pluie : ce phénomène dura jusqu'au soir. Dans les diverses provinces, tout le monde dit que c'était une étoile tombante, et l'on cita celles de l'an 687.

8. Période *Souï-ho*, 1re année, 1re lune, jour *sin-oueï* (6 février), une étoile filante, venant du S. E. entra dans le *Pe-teou* (α, β, γ, δ, ε, ζ, η, grande Ourse) : elle était longue d'environ 120 degrés.

6. Période *Khien-ping*, 1re année, 1re lune, jour *ting-oueï* (4 mars), il tomba dix pierres dans les districts du nord (Chen-si boréal). — A la 9e lune, jour *kia-tchin* (27 octobre), il tomba deux pierres à Yu du royaume de Liang (Yu près de Ngan-y, latitude 35° 5′, du Chan-si).

Années de l'ère chrétienne 2. Période *Youen-chi*, 2e année, 6e lune, il tomba deux pierres dans le Kiu-lo (Pe-tchi-li nord).

34. Période *Khien-wou*, 10e année, 3e lune, jour *koueï-mao* (4 avril), une étoile filante, grosse comme la lune, parut dans

le *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion) et disparut près de la 6e du *Kouei du Pe-teou* (ζ, grande Ourse). Sa lumière était blanche; auprès, on voyait une dizaine d'étoiles plus petites. Quand le météore s'éteignit, on entendit un bruit semblable à celui du tonnerre : un instant après, tout disparut. — A la 12e lune, jour *ki-haï* (25 janvier de l'an 35), une grande étoile filante, semblable à un vase, parut au S. O. de l'astérisme *Lieou* (δ, ε, ζ, Hydre), se dirigea vers l'astérisme *Tchin* (γ, ε et autres du Corbeau), où elle disparut. Au moment où elle s'éteignit, elle se divisa en une dizaine de jets de flamme semblables au reste d'un feu abandonné, et on entendit un bruit sourd pareil à celui du tonnerre.

36. Période *Khien-wou*, 12e année, 1re lune, jour *ki-oueï* (9 février), on vit de petites étoiles filantes au nombre d'un cent au plus : les unes allaient au N. O. d'autres allaient directement au N. et d'autres au N. E. Après deux nuits, ce phénomène cessa. — A la 6e lune, jour *wou-yn* (27 juin), au lever du jour, on vit une centaine de petites étoiles filantes allant vers les quatre points cardinaux; elles étaient semblables à un peuple nombreux qui émigre. — A la 10e lune, jour *ting-mao* (14 octobre ou 13 décembre), on vit une grande étoile filante, très-lumineuse, qui partit de l'astérisme *Tsing* (μ, γ, ε, ζ, Gémeaux), se dirigea de l'orient à l'occident, et fit un grand bruit.

57. Période *Tchoung-youen*, 2e année, 10e lune, jour *wou-tse* (14 novembre), une grande étoile filante se dirigea du S. O. au N. E. avec un bruit pareil à celui du tonnerre.

58. Période *Young-p'ing*, 1re année, 4e lune, jour *Ting-yeou* (22 mai), il parut une étoile filante grande comme une mesure d'un boisseau; elle partit du groupe *Leou* (μ, ν, Serpent) de l'enceinte du Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus, du Serpent et d'Antinoüs) et se dirigea au S. O. sa lueur éclaira la terre.

64. Même période, 7e année, une étoile filante, grande comme une tasse, sortit du groupe de la Fileuse (*Tchi-niu*, la Lyre) et se dirigea vers l'O. sa lumière éclaira la terre.

76. Période *Khien-tsou*, 1re année, 2e lune, jour *kia-yn* (5 mars), une étoile traversa le *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon); elle était longue de 10 degrés et se divisa en trois.

81. Même période, 6e année, 7e lune, jour *ting-yeou* (20 juillet), pendant la nuit, une étoile sortit du *Kien-youen* (α, γ, ζ, Lion); elle était grosse comme le poing; elle alla à l'O. jusqu'au *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse).

89. Période *Young-youen*, 1re année, 1re lune, jour *sin-mao* (2 février), il y eut une étoile filante qui parut dans l'astérisme *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était longue de 40 degrés et jetait une lumière jaune blanchâtre. — A la 2e lune, une étoile filante parut dans le *Thien-pang* (β, γ, Dragon et une petite) et se dirigea vers le N. E. elle était longue de 30 degrés; elle s'éteignit : sa couleur était bleuâtre. — Le jour *jin-chin* (15 mars), pendant la nuit, une étoile filante parut à l'E. du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion); elle était longue de 30 degrés. — A la 3e lune, jour *ping-tchin* (28 avril), une étoile filante parut dans le Gué céleste (α, γ, δ, Cygne). — Le jour *jin-su* (4 mai), une étoile filante parut dans le groupe du Général céleste (γ, Andromède et Triangle); elle alla au N. E.

90. Période *Young-youen*, 2e année, 2e lune, jour *ting-yeou* (4 avril), une étoile filante, grande comme une pêche, parut à l'E. du *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon); elle alla au N. O. sur une longueur de 50 degrés, et peu à peu s'éteignit. — 4e lune, jour *ping-tchin* (22 juin), on vit une étoile filante grosse comme un melon; elle parut au N. E. du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse), et alla au S. O. jusqu'à l'O. du *Siao-weï* (étoiles du petit Lion), où elle s'éteignit. Peu après on entendit un bruit semblable à un coup de tonnerre. — 8e lune, jour *ting-oueï* (11 octobre), une étoile filante, grosse comme un œuf de poule, parut à l'O. du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion); elle alla au S. E. sur une étendue de 40 degrés environ, puis elle se dissipa. — 10e lune, jour *koueï-oueï* (16 no-

vembre), une étoile filante, grosse comme une pêche, parut dans le Gué céleste (α, γ, δ, Cygne) et alla à l'O. sur une étendue de 60 degrés environ, puis elle s'éteignit. — 11e lune, jour *sin-yeou* (24 décembre), étoile filante, grosse comme le poing, qui parut à l'O. du *Tse-koung* (enceinte des étoiles du Dragon), alla à l'O. jusqu'au groupe *Oeï* (étoiles de la Mouche) et se dissipa.

91. Période *Young-youen*, 3e année, 9e lune, jour *ting-mao* (26 octobre), on vit une étoile filante grosse comme un œuf; elle parut au S. O. du *Tse-koung* (enceinte des étoiles du Dragon), alla jusqu'au milieu du manche du *Pe-teou* (ζ, grande Ourse) et se dissipa.

94. Période *Young-youen*, 6e année, 6e lune, jour *ki-tcheou* (4 juillet), une étoile filante, grosse comme une pêche, parut au N. O. de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle alla jusqu'au S. de la queue de *Tsan* (ζ, Orion) : elle était peu lumineuse.

95. Période *Young-youen*, 7e année, 1re lune, jour *ting-oueï* (18 janvier), une étoile filante parut dans le Gué céleste (α, γ, δ, Cygne), entra dans le milieu du *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon) et s'éteignit : sa lumière était de couleur jaune et bleue.

96. Période *Young-youen*, 8e année, 9e lune, jour *sin-tcheou* (2 novembre), dans la nuit, on vit une étoile filante grosse comme le poing; elle parut dans l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier).

99. Période *Young-youen*, 11e année, 5e lune, jour *ping-ou* (25 juin), une étoile filante, grosse comme une courge, parut dans l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et alla au S. O. elle avait peu d'éclat : sa couleur était blanche.

103. 6 janvier, jour *ting-cheou*, 11e lune de l'année 102, période de *Young-youen* (15e année), une étoile filante, grosse comme le poing, parut dans le *Koueï* du *Pe-teou* (les quatre du Chariot de la grande Ourse); elle alla jusqu'au Chemin volant (*Ko-tao*, ν, ξ, π, Cassiopée); elle avait peu d'éclat : sa couleur était

rouge jaunâtre. Quand elle disparut, on entendit dans le N. O. un coup de tonnerre.

104. Période *Young-youen*, 16e année, 10e lune, jour *sin-haï* (30 novembre), une étoile filante parut dans le *Keou-tchin* (ζ jusqu'à α, petite Ourse); elle alla au N. et parcourut 30 degrés. Elle avait de l'éclat, sa couleur était jaune.

105. Période *Youen-hing*, 1re année, 2e lune, jour *keng-chin* (8 avril), une étoile filante parut entre les astérismes *Kio* (α, Vierge) et *Kang* (χ, Vierge); elle parcourut 50 degrés.—4e lune, jour *sin-haï* (29 mai), une étoile parut à l'orient de *Teou* (φ, Sagittaire et voisines); elle alla au N. jusqu'à l'astérisme *Siu-niu* (ε, Verseau).—7e lune, jour *ki-sse* (15 août), une étoile filante parut dans le Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent, d'Ophiucus et d'Antinoüs); elle parcourut 50 degrés : sa couleur était rouge.—A la lune intercalaire, jour *sin-haï* (25 novembre [1]), pendant que la planète de l'eau (Mercure) et celle du métal (Vénus) étaient dans la division stellaire *Ti* (α, β, Balance), une étoile filante parut à l'E. de *Teou* (φ, Sagittaire et voisines); elle alla au N. jusqu'à *Siu-niu* (ε, Verseau).

106. Période *Yen-p'ing*, 1re année, 9e lune, il tomba quatre pierres à *Tchin-lieou* (Ho-nan); on dit que c'étaient des étoiles tombées.

138. Période *Young-ho*, 3e année, 2e lune, jour *sin-tcheou* (27 mars), on vit une étoile filante grande comme une mesure d'un boisseau. Du N. O. elle alla à l'E. elle était longue de 8 à 9 degrés; sa couleur était jaune rougeâtre. On entendit un bruit répété comme un roulement de tonnerre.

164. Période *Yen-hi*, 7e année, 2e lune, jour *koueï-haï* (1er avril), il tomba une pierre à Yeou-fou-foung (ville du Chen-si, près de l'ancienne capitale Si-ngan-fou); il en tomba deux autres à Khien. Toutes ces chutes furent accompagnées d'un bruit pareil à celui du tonnerre.

[1] La 12e lune est citée dans le Thoung-kien-khang-mou; la lune intercalaire dut être la précédente.

178. Période *Kouang-ho*, 1re année, 4e lune, jour *kouei-tcheou* (8 mai), une étoile filante passa près de la deuxième étoile (η, Lion) du groupe *Hien-youen* (α, γ, ζ, η, Lion); elle alla au N. E. et entra dans le milieu du *Kouei* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse).

184-190. Période *Tchoung-p'ing*, en été, on vit une étoile filante rouge comme le feu et longue de 30 degrés; elle parut dans le Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle), entra dans le Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus, autour de α, Ophiucus) et se jeta sur le groupe des officiers *Hoan-tche* (β, Hercule et voisines); alors la couleur de l'étoile fut blanche et sa longueur de 30 degrés : sa queue se recourbait après elle. Un instant après, le météore s'éteignit. Sa forme ressemblait à une flèche serpentante (probablement à une fusée).

235. Période *Khien-hing*, 13e année, pendant que les troupes du pays de Chou attaquaient le camp des Weï à Weï-nan (latitude 34° 29′, Chen-si), une grande étoile rouge, avec des pointes rayonnantes, et allant du N. E. au S. O. tomba dans le camp.

238. Période *King-tsou*, 2e année, 8e lune, jour *keng-yn* (26 septembre), dans la nuit, il parut une grande étoile filante, longue d'une centaine de degrés. Sa couleur était blanche; elle avait une auréole rayonnante. Du N. E. de Cheou-chan, elle coula et tomba au S. E. de Siang-p'ing.

263. Période *King-youen*, 4e année, 6e lune, deux grandes étoiles filantes, aussi grosses ensemble qu'une mesure d'un boisseau[1], furent vues dans l'O. elles se séparèrent et coulèrent l'une au S. et l'autre au N. Leur lumière éclaira la terre, et on entendit un bruit répété.

268. Période *Thaï-chi*, 4e année, 7e lune, des étoiles tombèrent comme une pluie : toutes allaient à l'O.

288. Période *Thaï-khang*, 9e année, 8e lune, jour *jin-tseu* (26 septembre), étoiles tombant comme une pluie.

[1] Le Teou, ou boisseau chinois, contient 240,000 grains de millet, et peut être évalué à environ dix décimètres cubes.

303. Période *Thaï-ngan*, 2e année, 11e lune, jour *sin-sse* (5 décembre), une étoile tomba en plein jour du N. du zénith. Sa lumière devint blanche, et il y eut une explosion semblable à un coup de tonnerre.

304. Période *Young-hing*, 1re année, 7e lune, jour *y-tcheou* (15 septembre), chute d'étoile avec bruit.

305. Même période, 2e année, 10e lune, autre chute d'étoile avec bruit.

307. Période *Young-kia*, 1re année, 9e lune, jour *sin-mao* (26 septembre), il parut une étoile grande comme le soleil. Du S. O. elle glissa au N. E. Une autre plus petite, et grosse comme une mesure d'un boisseau, la suivait. Le ciel était tout rouge, et l'on entendit un bruit semblable à celui du tonnerre. — 12e lune, jour *ting-haï* (308, 20 janvier), on vit beaucoup d'étoiles filantes dispersées.

310. Même période, 4e année, 10e lune, jour *keng-tseu* (23 octobre), une étoile de feu tomba au N. O. avec un grand bruit.

322. Période *Young-tchang*, 1re année, 7e lune, jour *kia-ou* (10 septembre), il parut une étoile filante grande comme une cruche, et longue de plus de cent pieds ou degrés (il y a mille pieds dans le texte). Sa couleur était bleu rougeâtre. De l'O. elle vint jusqu'à l'astérisme *Oueï* (ε, μ, Scorpion) et se divisa en plus de cent éclats.

333. Période *Hien-ho*, 8e année, dernière année du Tartare Che-li, il y eut une chute d'étoile six lieues au N. E. de *Ye* (Tchang-te-fou du Ho-nan). Le météore était d'abord de couleur rouge noirâtre; un nuage jaune s'étendait comme un rideau, occupant plusieurs centaines de pieds; un roulement sourd, pareil au bruit du tonnerre, se faisait entendre. Le météore tomba à terre et répandit une vapeur brûlante : la poussière s'éleva au ciel. Des laboureurs allèrent examiner le lieu : la terre était chaude. Ils virent une pierre large de plus d'un pied, de couleur bleu foncé et assez légère; elle résonnait comme l'instrument en pierre appelé *king*.

337. Période *Hien-khang*, 3e année, 6e lune, jour *sin-oueï* (30 juillet), il parut une étoile filante grande comme un double boisseau. Sa couleur était bleu rougeâtre : sa lumière éclairait la terre. Elle parut dans l'astérisme *Kocï* (ζ, β, δ, Andromède) et disparut au N. de *Leou* (α, β, Bélier).

340. Même période, 6e année, 2e lune, jour *keng-ou*, 1er de la lune (15 mars), il parut une étoile filante grosse comme une cruche : sa lumière éclaira la terre. Elle parut au N. O. du Marché céleste (enceinte d'étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Ophiucus, et de α, Hercule); elle entra dans le *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles de la Vierge et du Lion autour de β, Lion).

352. Période *Young-ho*, 8e année, 6e lune, jour *sin-sse* (21 juillet), avant le coucher du soleil, il parut une étoile filante grande comme trois boisseaux; elle s'éleva dans la direction de l'heure *Sse* (9 à 11 heures du matin) sur le cadran solaire; elle alla vers le S. et, d'après le degré de l'ombre solaire, on estima qu'elle était entre les divisions stellaires *Ki* (déterminatrice γ, Sagittaire) et *Teou* (déterminatrice φ, Sagittaire).

354. Même période, 10e année, 4e lune, jour *koueï-oueï* (14 mai), il parut une étoile filante grande comme une mesure d'un boisseau : sa couleur était jaune rougeâtre. Elle sortit du groupe de la Fileuse (la Lyre) et disparut dans le groupe *Tsao-fou* (δ, ε, ζ, Céphée). On entendit un bruit semblable à celui du tonnerre.

369. Période *Thaï-ho*, 4e année, 10e lune, jour *jin-chin* (10 décembre), une grande étoile filante tomba dans l'O. On entendit un bruit semblable à celui du tonnerre.

381. Période *Thaï-youen*, 6e année, 10e lune, jour *y-mao* (20 novembre), une étoile courut dans le S. E. elle passa dans les groupes *Y* (déterminatrice α, Hydre et Coupe) et *Tchin* (γ, ε, α, Corbeau). Il y eut un bruit semblable à celui du tonnerre.

388. Période *Thaï-youen*, 13e année, lune intercalaire, jour *wou-tchin*, un *chien céleste* (météore) tomba au N. E. avec bruit.

389. Même période, 14e année, 3e lune, jour *ting-weï* (4 avril), une grande étoile vint de l'E. et alla au S. Elle avait une queue de 60 à 70 pieds ou degrés qui touchait la terre. On entendit du bruit.

394. Période *Teng-koue* (dyn. Weï), 9e année, une étoile tomba dans la province Ho-pe (nord du fleuve Jaune); elle fit un bruit semblable à celui du tonnerre, et jeta une lueur qui éclaira le ciel et la terre.

401. Période *Loung-ngan*, 5e année, 3e lune, jour *kia-yn* (8 avril), des étoiles filantes, de couleur rouge et en très-grand nombre, allèrent vers l'O. elles passaient dans les astérismes *Khien-nieou* (β, α, Capricorne), *Hiu* (β, Verseau), *Oeï* (α, Verseau), le Gué céleste (α, δ, γ, Cygne), le Chemin volant (ε, ξ, δ, θ, Cassiopée); elles traversaient le *Thaï-weï* (enceinte formée par des étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion), le *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon).

433. Période *Young-kia*, 10e année, 12e lune (vers décembre), il parut une étoile filante grosse comme une cruche et longue de plus de 200 degrés.

452. Période *Hing-ngan*, 1re année, 5e lune, jour *sin-haï* (6 juillet), il parut dans le S. O. une étoile grosse comme cinq boisseaux; elle se divisa en six ou sept éclats. On entendit du bruit.

455. Période *Thaï-ngan*, 1re année, 11e lune, jour *y-yeou* (22 octobre), une grande étoile filante éclaira la terre. On entendit un bruit répété, plusieurs coups successifs.

511. Période *Thien-kien*, 10e année, 9e lune, jour *ping-chin* (10 octobre), au N. O. du ciel, on entendit à plusieurs reprises un bruit sourd. Une vapeur rouge descendit jusqu'à terre.

532. Période *Tchoung-ta-thoung*, 4e année, 7e lune, jour *kia-tchin* (28 août), des étoiles tombèrent comme une pluie.

545. Période *Wou-ting* des Weï orientaux, 4e année, 9e lune, jour *ting-weï* (22 octobre), pendant le siége de Yu-pi (probablement Pi-tcheou du Sse-tchouen), une étoile tomba dans le camp des assiégeants.

549. Période *Thaï-thsing*, 3e année, il parut une étoile filante longue de trois cents pieds; elle tomba dans la place de Wou (Wou-kiun).

552. Période *Tching-ching*, 1re année, 12e lune (vers décembre), une étoile tomba à Ou-kiun, chef-lieu de la province d'Ou (Sou-tcheou-fou).

554. Même période, 3e année, 11e lune (vers novembre), pendant que les troupes du royaume de Tcheou assiégeaient Kiang-ling (actuellement King-tcheou-fou du Hou-kouang), une étoile filante tomba dans la ville.

565. Période *Thien-kia*, 6e année, 3e lune, jour *ting-mao* (31 mars), après le coucher du soleil et avant que l'on vît beaucoup d'étoiles, il parut une étoile filante de couleur blanche, et grosse comme un boisseau; elle sortit du milieu du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion) et alla au S. Sa queue était longue de plus d'un degré.

568. Période *Thien-ho* des Tcheou, 3e année, 2e lune, jour *keng-ou* (18 mars), une étoile filante, grande comme une mesure d'un boisseau, sortit du groupe *Che-ti* de gauche (ζ, ξ, π, Bouvier) et alla vers le Gué céleste (α, γ, δ, Cygne). Quand elle s'éteignit, on entendit un bruit pareil à celui du tonnerre.

578. Période *Kien-te*, 6e année, 12e lune, jour *koueï-tcheou* (8 janvier), il parut une étoile filante grosse comme la lune; elle coula à l'O. en serpentant et avec bruit : sa lumière éclaira la terre.

578. Période *Ta-tching*, 1re année, 6e lune, jour *ting-mao* (21 juillet), il parut une étoile filante grosse comme un œuf; elle sortit de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et coula au N. O. Elle avait une queue ou trace longue de plus de 10 degrés; elle entra dans la lune et s'éteignit. — Le jour *ki-tcheou* (12 août), il parut une autre étoile filante, grosse comme un boisseau, de couleur bleue, et assez brillante pour éclairer la terre; elle sortit du *Yng-tchi* (groupe d'α, Pégase), toucha *Pi* (le mur, γ, Pégase) et disparut dans les vapeurs.

579. Période *Ta-tching*, 2e année, 4e lune, jour *y-tcheou* (15 mai), une étoile grosse comme un boisseau sortit du *Thien-chou* (δ, ε, π, Dragon), entra dans le *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon), passa près du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse) et s'éteignit. — Le 23 juin (5e lune, jour *kia-tchin*), une étoile filante, grande comme trois boisseaux, parut à la porte principale du *Thaï-weï* (entre β et η, Vierge) et coula dans *Y* (α, Hydre et Coupe). Sa couleur était blanc bleuâtre; sa lumière éclaira la terre. On entendit un bruit pareil à celui des drapeaux agités par le vent. — 30 août (7e lune, jour *jin-tseu*), tandis que les planètes Jupiter et Vénus étaient réunies dans la division stellaire *Tchang* (de ν_1, Hydre, jusqu'à α, Hydre et Coupe), une étoile filante, grosse comme un boisseau, sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre, β, Cocher, β, Taureau et deux autres); elle coula au N. E. Sa lumière éclaira la terre.

581. Période *Khaï-hoang*, 1re année, 11e lune, jour *ki-sse* (3 janvier), il parut une grande étoile filante, qui fit un bruit semblable à celui d'un mur qui s'écroule : sa lumière éclaira la terre.

585. Même période, 5e année, 8e lune, jour *wou-chin* (23 septembre), il parut des centaines d'étoiles filantes qui tombèrent, en se dispersant de tous côtés.

599. Même période, 19e année, 12e lune, jour *y-oueï* (26 décembre), pluie d'étoiles à Po-haï (ancien district du Pe-tchi-li et du Chan-toung, comprenant Pin-tcheou, Ho-kien-fou) ou dans la mer du Pe-tchi-li, appelée aussi Po-haï.

616. Période *Ta-nie*, 11e année, 12e lune, jour *wou-yn* (14 janvier), une étoile filante, grande comme dix boisseaux, tomba dans le camp de Ming-youe; elle fracassa des chariots et tua dix hommes.

616. Période *Ta-nie*, 12e année, 5e lune, jour *koueï-sse* (28 mai), une grande étoile filante tomba dans le chef-lieu de la province de Ou (*Ou-kiun*, actuellement Sou-tcheou-fou du Kiang-nan); elle se changea en pierre. — 8e lune, jour *jin-tseu* (14 octobre), une étoile filante, grosse comme un boisseau, parut au milieu des groupes

Wang-lang (α, β, γ, κ, Cassiopée) et *Ko-tao* (ε, ν, ξ, π, Cassiopée); elle fit un bruit semblable à celui d'un mur qui s'écroule. — 15 octobre (jour *koueï-tcheou*), une étoile filante, grosse comme une cruche, sortit du groupe *Yu-lin* (δ, τ, χ, Verseau, et autres des Poissons).

617. Période *Ta-nie*, 13e année, 5e lune, jour *sin-haï* (11 juin), une étoile filante, grosse comme une cruche, tomba à Kiang-tou (Yang-tcheou-fou du Kiang-nan).

620. Période *Wou-te*, 3e année, 10e lune, jour *ki-oueï* (29 novembre), une étoile tomba à Toung-tou (Ho-nan-fou du Ho-nan): à plusieurs reprises on entendit du bruit.

628. Période *Tching-kouan*, 2e année, un *chien céleste* (météore) tomba dans la ville du district de Hia (Ning-hia-fou, latitude 38°, dans le Chen-si nord).

640. En septembre (même période, 14e année, 8e lune), chute d'étoile dans la ville de Kao-tchang (pays des Ouigours).

642. Même période, 16e année, 6e lune, jour *kia-tchin* (22 juillet), à l'O. il parut une étoile filante grande comme la lune; elle alla au S. O. sur une longueur de 30 degrés, et s'éteignit.

644. Vers juin, même période, 18e année, 5e lune, une étoile filante sortit de l'astérisme *Toung-pi* (γ, Pégase). Il y eut un bruit semblable à celui du tonnerre.

645. Même période, 19e année, 4e lune, jour *ki-yeou* (12 mai), une étoile filante parut en avant du manche du *Pe-teou* (ε, ζ, η, grande Ourse); elle passa et s'éteignit.

652. Vers novembre, période *Young-hoeï*, 3e année, 10e lune, une étoile filante traversa le pôle nord.

653. En novembre (même période, 4e année, 10e lune, 10e jour), une étoile tomba dans le camp des révoltés des districts de Motcheou et d'Ou-tcheou (Yen-tcheou-fou et Kin-hoa-fou du Tchekiang).

666. Période *Khien-foung*, 1re année, 1re lune, jour *koueï-yeou* (15 février), il parut une étoile qui sortit de l'espace *Thaï-wei* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion);

elle coula vers l'orient. On entendit un bruit pareil à celui du tonnerre.

670. Vers décembre (période *Tsoung-tchang*, 3e année, 11e lune), on vit une étoile filante qui fit un bruit pareil à celui du tonnerre.

679. Période *Thiao-lou*, 1re année, 11e lune, jour *wou-yn* (9 décembre), une grande étoile filante entra dans l'intérieur du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse).

680. Période *Thiao-lou*, 1re année, 11e lune, jour *y-sse* (5 janvier), une grande étoile filante éclaira la terre.

707. Période *King-loung*, 3e lune, jour *ping-tchin* (24 avril), il parut une étoile filante qui fit un bruit pareil à celui du tonnerre : sa lumière éclaira le ciel et la terre.

708. Même période, 2e année, 2e lune, jour *koueï-oueï* (16 mars), il y eut une grande étoile qui tomba dans le S. O. elle fit un bruit semblable à celui du tonnerre.

710. Période *King-yun*, 1re année, jour *ki-oueï* (8 octobre), une étoile filante sortit du groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre, β, Cocher, β, Taureau et deux autres); elle alla jusqu'au *Chang-taï* (ι, $\varkappa$, grande Ourse) et s'éteignit. — 9e lune, jour *kia-chin* (2 novembre), il y eut une étoile filante qui sortit du groupe *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse); elle alla jusqu'à *Siang* (petites étoiles entre δ et ε, grande Ourse) et s'éteignit.

712. Période *Thaï-ki*, année unique, 1re lune, jour *sin-mao* (5 mars), une étoile filante parut dans le *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion); elle alla jusqu'à *Siang* (petites étoiles entre δ et ε, grande Ourse) et s'éteignit.

713. Vers juillet (période *Khaï-youen*, 1re année, 6e lune), il y eut dans le district Yieou (nord du Pe-tchi-li) une étoile qui tomba le soir dans le camp du général Sun-thsiouen.

714. Période *Khaï-youen*, 2e année, 5e lune, jour *y-mao* (15 juillet), le soir, il parut des étoiles filantes au N. O. Les unes étaient grandes comme une cruche; les autres étaient grandes comme un boisseau : elles traversaient le pôle nord. Le nombre

des petites ne pouvait être compté. Les étoiles du ciel étaient dans une extrême agitation. Au matin seulement, ce phénomène cessa.

724. Même période, 12e année, 10e lune, jour *jin-tchin* (27 octobre), il parut une étoile filante grosse comme une pêche; sa couleur était jaune rougeâtre : sa lumière éclaira la terre.

744. Période *Thien-pao*, 3e année, 2e lune intercalaire, jour *sin-haï* (4 avril), une étoile grande comme la lune tomba au S. E. Après sa chute, on entendit du bruit.

757. Période *Tchi-te*, 2e année, 4e lune, jour *kia-tchin* (19 mai), au milieu de la nuit, il parut une grande étoile de couleur jaune rougeâtre, longue d'environ 100 degrés : sa lumière éclairait la terre; elle tomba dans le camp des rebelles qui assiégeaient Nan-yang (Ho-nan : latitude, 33° 6′). — 11e lune, jour *jin-su* (3 décembre), il parut une étoile filante grande comme une mesure d'un boisseau; elle coula au N. E. elle était longue d'environ 10 degrés; elle avait une marche sinueuse comme un serpent; elle jetait de tous côtés des éclats de feu.

764. Période *Kouang-te*, 2e année, 6e lune, jour *ting-mao* (4 juillet), une étoile de mauvais augure tomba dans le chef-lieu du district Fen-tcheou (Thaï-youen-fou du Chan-si). — 12e lune, jour *ping-yn* (30 décembre), depuis la deuxième heure de la nuit jusqu'au matin, il y eut une pluie d'étoiles filantes.

767. Période *Ta-li*, 2e année, 9e lune, jour *y-tcheou* (15 octobre), en plein jour, il parut une étoile grosse comme une mesure d'un boisseau. Sa couleur était jaune; elle avait une queue longue de plus de 60 degrés : elle parut au midi et s'évanouit dans le N. E.

768. Période *Ta-li*, 3e année, 9e lune, jour *y-haï* (19 octobre), il parut une étoile grande comme un boisseau; elle coula au N. et sa lueur éclaira la terre.

771. Même période, 6e année, 9e lune, jour *kia-tchin* (2 novembre), il parut dans l'O. une étoile filante grande comme une

mesure d'un boisseau. Sa lumière éclairait la terre; elle avait une queue qui brillait comme des perles : cette queue était longue de 50 degrés. L'étoile sortit de l'astérisme *Niu* (ε, μ, ν, Verseau), entra dans le bord austral du Marché céleste (enceinte d'étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Ophiucus, et de α, Hercule), et elle disparut.

773. Même période, 8e année, 6e lune, jour *wou-tchin* (18 juillet), on vit une étoile filante grande comme un dixième de boisseau; elle avait une queue longue de plus de 10 degrés; elle entra dans le *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion).

774. Même période, 8e année, 12e lune, jour *jin-chin* (18 janvier), il parut une étoile filante grande comme un dixième de boisseau; elle avait une queue longue au moins de 20 degrés; elle sortit du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon) et entra dans des vapeurs.

775. Même période, 10e année, 3e lune, jour *wou-su* (9 avril), il parut une étoile filante à l'O. elle était grosse comme deux dixièmes de boisseau; elle avait une queue longue de 20 degrés; elle entra dans des vapeurs.

777. Même période, 12e année, 2e lune, jour *sin-haï* (11 avril), il parut une étoile filante grande comme une pêche. Sa queue était longue de 100 degrés environ; elle sortit du groupe *Pao-koua* (α, β, γ, δ, Dauphin) et entra dans l'enceinte du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion).

783. Période *Kien-tchoung*, 8e lune, jour *keng-chin* (16 septembre), une étoile tomba dans la capitale (Tchang-ngan, actuellement Si-ngan-fou du Chen-si).

784. Période *Hing-youen*, 1re année, 6e lune, jour *wou-ou* (10 juillet), des étoiles parurent par groupes de cinq ou de dix, et tombèrent.

787. Période *Tching-youen*, 3e année, 5e lune intercalaire, jour *wou-yn* (15 juillet), un météore qui serpentait tomba dans

les divisions stellaires *Hiu* (déterminatrice β, Verseau) et *Oeï* (déterminatrice α, Verseau).

798. Même période, 14e année, 5e lune, jour *sin-haï* (20 juin), une étoile tomba dans le N. E. Son éclat était égal à celui du jour; elle fit un bruit pareil à celui du tonnerre.

808. Période *Youen-ho*, 2e année, 12e lune, jour *ki-sse* (17 janvier), il y eut une étoile filante qui traversa le ciel : sa queue était brisée comme une file de perles.

809. Période *Youen-ho*, 4e année, 8e lune, jour *ting-tcheou* (16 septembre), au N. O. il parut une grande étoile qui coula vers le S. E. On entendit un bruit semblable au roulement du tonnerre.

811. Même période, 6e année, 3e lune, jour *wou-su* (30 mars), entre trois et cinq heures du soir, le ciel étant couvert et le temps froid, il y eut une étoile filante, grande comme une mesure de dix boisseaux, qui tomba sur la limite des arrondissements de Yen-tcheou et de Yun-tching (Chan-toung). Le bruit fut entendu à une dizaine de lieues : les faisans sauvages crièrent. Au-dessus du lieu où elle tomba, il s'éleva une vapeur rouge semblable à un serpent debout, et longue de plus de dix pieds : cette vapeur ne se dispersa qu'au soir.

814. Même période, 9e année, 1re lune, en février, une étoile, grande comme une demi-natte de paille, partit d'en bas et s'éleva. Sa lumière éclaira la terre : une quantité de petites étoiles la suivaient. — 4e lune, jour *sin-sse* (27 avril), il parut une grande étoile filante. Sa queue était longue de plus de 50 degrés; sa lueur éclairait la terre : elle vint à l'orient du *Che-ti* de droite (η, τ, γ, Bouvier) et s'éteignit.

817. Même période, 12e année, 9e lune, jour *ki-haï* (26 octobre), au commencement de la nuit, une grande étoile filante parut au milieu du ciel. Sa tête était comme une cruche; sa queue était comme une barque du port de deux mille boisseaux et longue de plus de 100 degrés. Elle faisait un bruit semblable à celui d'une troupe de canards qui volent, et brillait comme une

torche allumée. Elle passa au-dessous de la lune et coula vers l'orient; peu après, on entendit une détonation composée de plusieurs coups. Au moment où l'étoile tomba à terre, il y eut, par trois fois, un grand bruit aussi fort que celui d'une maison qui s'écroule. Ce phénomène eut lieu entre les districts de Tchin (Tchin-tcheou du Ho-nan) et de Thsaï (actuellement Jou-ning-fou du Ho-nan).

819. Même période, 14e année, 5e lune, jour *ki-haï* (18 juin), une grande étoile filante sortit du *Kouei du Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était longue de plus de 20 degrés; elle se dirigea au midi du groupe *Hien-yun* (α, γ, δ, Lion) et s'éteignit.

820. Même période, 15e année, 7e lune, jour *kouei-haï* (5 septembre), une grande étoile sortit du groupe *Keou-tchin* (de α jusqu'à ζ, petite Ourse); elle alla au midi jusqu'à l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier) et s'éteignit.

821. Période *Tchang-khing*, 1re année, 1re lune, jour *ping-tchin* (24 février), il y eut une grande étoile qui parut au N. de l'étoile *Lang* (Sirius). Sa couleur était rouge; elle avait une queue longue de plus de 30 degrés. Sa lueur éclairait la terre; elle coula au N. E. jusqu'au midi du groupe des Sept Étoiles (*Tsi-sing*, α, cœur de l'Hydre, τ, ι et autres) et s'éteignit. — A la 4e lune, il y eut une grande étoile qui tomba dans la ville de Ou (Sou-tcheou-fou); elle fit un bruit semblable à celui des ailes des oiseaux qui volent. — A la 7e lune, jour *y-sse* (12 août), il y eut une grande étoile filante qui parut au N. O. de l'astérisme *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion). Sa couleur était jaune; elle avait une queue de 60 à 70 degrés; sa lumière éclairait la terre. Elle vint jusqu'au groupe *Yu-lin* (δ, τ, χ, Verseau et étoiles des Poissons), et elle s'éteignit. — 8e lune, jour *sin-sse* (17 septembre), dans le N. E. il y eut une grande étoile qui sortit du milieu des nuages. Sa couleur était blanche : sa lueur éclairait la terre. Elle fut d'abord petite et ensuite grande; sa traînée était longue de plus de 20 degrés. Elle coula au N. O. elle entra dans le milieu des nuages et s'éteignit.

822. Même période, 2e année, 4e lune, jour *sin-haï* (14 juin), une étoile filante sortit du Marché céleste (enceinte formée par des étoiles du Serpent et d'Ophiucus, autour de α, Ophiucus, et de α, Hercule). Sa lueur éclairait la terre, et l'on entendait un bruit sourd; elle s'éteignit dans le groupe *Lang-weï* (amas d'étoiles de la Chevelure de Bérénice).—6e lune, jour *ting-weï* (30 juillet), une petite étoile tomba entre les astérismes *Sin* (α, σ, τ, Scorpion) et *Fang* (β, π, δ, Scorpion). — 11e lune intercalaire, jour *ping-chin* (26 novembre) une étoile filante, grande comme un boisseau, se dirigea vers les étoiles du *Tchoung-taï* (λ et μ, grande Ourse).

823. Même période, 3e année, 8e lune, jour *ting-yeou* (23 septembre), pendant la nuit, il y eut une grande étoile filante de la grosseur de plusieurs boisseaux; elle parut au N. O. traversa les astérismes *Koeï* (β, δ, ζ, Andromède) et *Leou* (α, β, Bélier), et coula au S. E. Elle passa très-près de la lune, jeta une vive lumière et s'éteignit en se divisant. Quand elle tomba à terre, on entendit du bruit.

824. Même période, 4e année, 4e lune, en mai, au milieu de l'enceinte *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon), beaucoup d'étoiles tombèrent. — 7e lune, jour *y-mao* (7 août), une grande étoile sortit du groupe du Navire céleste (α, γ, η, Persée); elle passa près de l'étoile *Gond du Koueï du Pe-teou* (α, grande Ourse) et s'éteignit.—Jour *ping-tseu* (28 août), une grande étoile filante parut au S. E. du Camp du général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle) et entra dans les vapeurs.

825. Période *Pao-li*, 1re année, 1re lune, jour *y-mao* (2 février), il y eut une étoile filante qui sortit de l'étoile *Gond du Pe-teou* (α, grande Ourse). Sa lumière éclaira la terre; elle entra dans les vapeurs.

826. Même période, 2e année, 5e lune, jour *koueï-sse* (5 juillet), au N. O. il parut une étoile filante longue de plus de 30 degrés; sa lueur éclaira la terre. Elle entra dans l'intérieur du Marché céleste (enceinte d'étoiles du Serpent et d'Ophiucus

autour de α, Hercule, et de α, Ophiucus) et elle s'éteignit. — 7e lune, jour *ping-su* (27 août), au moment du coucher du soleil, une étoile filante parut au S. E. elle se dirigea vers le midi et disparut. D'après le degré de l'ombre solaire, on examina sa position : elle était entre les astérismes *Ki* (γ, δ, Sagittaire) et *Teou* (σ, τ, ϕ, Sagittaire). — 8e lune, jour *ping-chin* (6 septembre), il y eut une grande étoile filante qui sortit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée). Sa traînée était longue de plus de 40 degrés; elle arriva au Manche du *Pe-teou* (ε, ζ, η, grande Ourse) et s'éteignit.

830. Période *Thaï-ho*, 4e année, 6e lune, jour *sin-oueï* (22 juillet), depuis le commencement de l'obscurité jusqu'à la quatrième heure de la nuit, on vit des étoiles filantes, les unes grandes, les autres petites. On ne put compter le nombre de toutes celles qui parurent.

833. Période *Thaï-ho*, 7e année, 6e lune, jour *wou-tse* (23 juillet), depuis le commencement du soir jusqu'au matin, dans les quatre parties du ciel, il y eut des étoiles filantes, grandes et petites, allant en ligne droite et en ligne transversale; il y en eut plus d'un cent.

834. Même période, 8e année, 6e lune, jour *sin-sse* (11 juillet), au milieu de la nuit, il y eut une étoile filante qui sortit du groupe Tambour du fleuve (α, β, γ, Aigle). Sa couleur était rouge; elle laissa une longue traînée dont la lueur éclaira la terre, et semblable à une enfilade de perles; elle alla au nord, s'approcha du groupe du Fléau céleste (*Thien-pang*, β, γ, Dragon, et une petite), et elle s'éteignit. On entendit un bruit pareil à un coup de tonnerre.

835. Même période, 9e année, 6e lune, jour *ting-yeou* (22 juillet), depuis le commencement de l'obscurité jusqu'à la troisième heure de la nuit, il parut plus de vingt étoiles filantes; elles allaient en droite ligne et en ligne transversale; elles paraissaient et disparaissaient : beaucoup s'approchaient de la Voie lactée (*Thien-han*, le fleuve céleste).

837. Période *Khaï-tching*, 2e année, 9e lune, jour *ting-yeou*

(8 novembre), on vit une étoile grande comme un boisseau et longue de 50 degrés; elle sortit de *Tchi* (déterminatrice, α, Pégase) et de *Pi* (déterminatrice, γ, Pégase); elle fila au N. O. et disparut au-dessous de *Ta-kio* (Arcturus). Quand elle s'éteignit, on vit jaillir des jets de feu qui ondulaient (ces jets sont appelés dans le texte *flèches qui serpentent*). Au milieu du ciel, il y eut du bruit. Plusieurs centaines de petites étoiles suivaient la grande. — 11e lune, jour *ting-tcheou* (18 décembre), une grande étoile tomba à Hing-youen (Han-tchong-fou du Chen-si), sur la chambre à coucher du gouverneur. La lumière éclaira toute la maison.

838. Période *Khaï-tching*, 3e année, 5e lune, jour *y-tcheou* (4 juin), il y eut une grande étoile qui partit vers les divisions stellaires *Lieou* (déterminatrice, δ, Hydre) et *Tchang* (déterminatrice, κ, Hydre). Sa queue était longue de plus de 50 degrés. Deux fois elle parut, deux fois elle disparut.

839. Même période, 4e année, 2e lune, jour *y-haï* (13 avril), depuis la quatrième jusqu'à la cinquième heure de la nuit, dans les quatre parties du ciel et au milieu du ciel, on vit des étoiles filantes grandes et petites, en tout plus de deux cents; elles filaient ensemble à l'O. et laissaient des traînées longues de 20 à 50 degrés. — 8e lune, jour *sin-oueï* (3 octobre), une étoile filante sortit du groupe *Iu-lin* (δ, τ, χ, Verseau et étoiles des Poissons); elle avait une queue de plus de 80 degrés; elle fit un bruit semblable à celui du tonnerre.

841. Période *Hoeï-tchang*, 1re année, 6e lune, jour *wou-tching* (21 juillet), depuis le commencement de l'obscurité jusqu'à la cinquième heure de la nuit, des dizaines de petites étoiles allèrent en ligne droite et transversale; elles coulaient et se séparaient. — 7e lune, jour *keng-ou* (23 juillet), au nord, il y eut une étoile qui éclaira la terre; elle coula au N. E. et traversa le groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée). On entendit un bruit semblable à celui du tonnerre. — 11e lune, jour *jin-yn* (22 décembre), une grande étoile coula au N. sa lumière éclaira la terre. Il y eut un bruit semblable à celui du tonnerre.

844. Même période, 4e année, 8e lune, jour *ping-ou* (1er octobre), il parut une grande étoile semblable à une torche de paille en feu; sa lumière éclaira le ciel et la terre. Partant des divisions stellaires *Koueï* (ζ, β, δ, Andromède) et *Leou* (α, β, Bélier), elle traversa les sept divisions stellaires du nord jusqu'à *Teou* (déterminatrice, β, Capricorne) et tomba.

846. Même période, 6e année, 2e lune, jour *sin-haï* (8 avril), au milieu de la nuit, il parut une étoile filante de couleur rouge et semblable à une pêche. Sa lumière éclaira la terre; elle avait une queue brillante; elle traversa l'espace *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon) et entra dans les vapeurs.

865. Période *Hien-thoung*, 6e année, 7e lune, jour *y-yeou* (1er août), à la première heure de la nuit, on vit une grande étoile filante longue d'une dizaine de degrés et plus. Sa lumière était éclatante comme celle d'un éclair. Beaucoup de petites étoiles suivaient la grande : du midi elles allèrent au nord.

868. Même période, 9e année, 11e lune, jour *ting-yeou* (25 novembre), il parut une étoile semblable à un écheveau de soie; elle parcourut le ciel, se transforma en nuage et disparut.

872. Au printemps, même période, 13e année, on vit deux étoiles qui s'élevèrent de la limite du ciel (l'horizon) et vinrent ensemble jusqu'au centre du ciel (le zénith); elles ressemblaient à un étendard et tombèrent. — A la 9e lune, on vit l'étendard de *Tchi-yeou* (une comète).

875. En hiver, période *Khien-fou*, 2e année, il parut deux étoiles, l'une rouge, l'autre blanche, et grandes comme une mesure d'un boisseau; elles se suivirent toutes deux et coulèrent au S. E. elles éclairèrent la terre comme la lune presque pleine.

876. Même période, 3e année, en plein jour, il parut une étoile semblable à une torche enflammée et grande comme un demi-boisseau; elle parut au N. E. alla lentement et tomba dans le N. O.

877. Vers août, même période, 4e année, 7e lune, on vit une étoile filante, grande comme une écuelle, qui sortit des asté-

rismes *Hiu* (β, Verseau) et *Oeï* (α, Verseau), traversa le Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent, d'Ophiucus et d'Antinoüs), entra dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau et autres des Poissons) et s'éteignit.

881. Période *Tchoung-ho*, 1re année, une étoile singulière sortit de l'astérisme *Yu-koueï* (γ, δ, η, θ, Cancer). — Même année, 8e lune, jour *ki-tcheou* (10 septembre), dans la nuit, des étoiles tombèrent comme une pluie. Quelques-unes étaient grandes comme des tasses ou des gobelets; elles coulaient ensemble comme une sorte de tissu. — Jour *keng-yn* (11 septembre), pendant la nuit, même phénomène. Cela dura jusqu'au jour *ting-yeou* (18 septembre), où le phénomène n'eut plus lieu.

883. Vers la fin de novembre ou le commencement de décembre, même période, 3e année, 11e lune, dans la nuit, des étoiles tombèrent au N. O. comme une pluie.

886. Vers octobre, période *Kouang-khi*, 2e année, 9e lune, une grande étoile tomba à Yang-tcheou-fou du Kiang-nan; elle fit un bruit semblable à celui du tonnerre; sa lumière éclaira la terre. — 10e lune, jour *jin-su* (16 novembre), une étoile parut à l'O. Sa couleur était blanche. Cette étoile était longue de 15 degrés; elle décrivit des sinuosités et tomba.

887. Vers juin, même période, 3e année, 5e lune, pendant que les troupes impériales étaient au N. de Pien-tcheou (Khaïfoung-fou du Ho-nan), on vit, en plein jour, une grande étoile qui tomba dans le camp, avec un bruit semblable à celui du tonnerre.

894. En été, période *Khien-ning*, 1re année, une étoile tomba dans le district d'Youe (Chao-hing-fou du Tche-kiang). Après elle, on vit une trace lumineuse, longue de plusieurs degrés. Sa figure était comme celle d'un serpent.

896. Vers juillet, même période, 3e année, 6e lune, le ciel étant orageux, au milieu de la pluie, des éclairs, des coups de tonnerre, une étoile, grande comme une écuelle, parut dans le S. O. et tomba dans le N. E. Sa couleur était comme celle d'une

plume de cigogne, et elle fit un bruit pareil à celui d'une volée de canards sauvages.

898. Période *Kouang-hoa,* 1re année, 9e lune, jour *ping-tse* (27 novembre), une grande étoile tomba dans le nord.

900. Même période, 3e année, 3e lune, jour *ping-ou* (20 avril), il parut une étoile grande comme une barque du port de deux cents boisseaux. Sa couleur était jaune. En avant elle était mince, et en arrière elle était grande ou large; elle alla au S. O.—Vers décembre, à la 11e lune, il parut au milieu du ciel une grande étoile, qui coula lentement à l'orient en se déroulant comme une ceinture. La trace sinueuse de sa lumière se condensa et s'attacha au ciel : en un instant elle disparut.

903. Vers l'équinoxe vernal, période *Thien-fou,* 3e année, 2e lune, le lendemain du jour où l'empereur vint de Foung-tsiang (Chen-si), il parut une étoile grande comme la lune, qui sortit des vapeurs du côté de l'orient et coula à l'O. Elle fit un bruit semblable à celui du tonnerre; elle laissa une traînée qui traversait obliquement le milieu du ciel : cette trace dura trois nuits et disparut.

904. Période *Thien-yeou,* 1re année, 5e lune, jour *wou-yn* (30 juin), à la deuxième heure de la nuit, il pleuvait : le temps était sombre. On vit une étoile longue de 200 degrés; elle parut à l'orient et se dirigea au S. O. La partie antérieure était noire, la queue était rouge, le milieu blanc. (Le devin la classa parmi les météores *ouang-chi,* flèches qui serpentent.)

905. Même période, 2e année, 3e lune, jour *y-tcheou* (12 avril), dans la nuit, on vit une grande étoile qui sortit du milieu du ciel; elle était grosse comme une mesure de cinq boisseaux; elle coula vers le N. O. jusqu'à une distance de près de 100 degrés et s'arrêta. Au-dessus était un épi d'étoiles; il brillait comme une flamme rouge jaunâtre, longue de 50 degrés, et allait en serpentant. Toutes ces petites étoiles se mouvaient, et au S. E. elles tombaient comme une pluie. En un instant, elles disparurent; ensuite, on vit une vapeur bleu blanchâtre, sem-

blable à un faisceau de bambous, dont le point de réunion supérieur était le milieu du ciel et dont l'éclat fatiguait les yeux. (Cette description indique une aurore boréale).

911. Période *Khien-hoa*, 1re année, 11e lune, jour *kia-tchin* (17 décembre), pendant la nuit, on vit une étoile filante grosse comme un dixième de boisseau environ; elle sortit de l'ouverture du groupe *Pi* (les Hyades). Sa lumière occupait plus de 30 degrés : on entendit un bruit semblable au tonnerre.

924. Période *Toung-kouang*, 2e année, 6e lune, jour *kia-chin* (21 juillet), on vit quantité d'étoiles filantes ensemble. — Jour *ping-su* (23 juillet), on vit quantité d'étoiles filantes ensemble.

925. Même période, 3e année, 6e lune, jour *keng-yn* (22 juillet), pendant la nuit, au premier coup de tambour, on vit dans le S. O. plus de soixante et dix étoiles filantes : toutes avaient une traînée lumineuse et coulaient au S. O. — 7e lune, jour *sin-mao* (23 juillet), un grand nombre d'étoiles filantes furent vues au S. O. — 9e lune, jour *ting-oueï* (7 octobre), un chien céleste (météore) tomba avec un bruit pareil à celui du tonnerre.

926. Période *Thien-tching*, 1re année, 6e lune, jour *y-oueï* (22 juillet), on vit une grande quantité d'étoiles filantes ensemble.

927. Même période, 2e année, 3e lune, jour *keng-chin* (12 avril), on vit une grande quantité d'étoiles filantes au N. O.

928. Même période, 3e année, de la 1re à la 6e lune (de février à juillet), les étoiles *Thsoung-jin*, *Thsoung-tching* (β, γ, Ophiucus, et petites étoiles à l'E.), furent constamment agitées.

930. Période *Tchang-ching*, 1re année, 9e lune, jour *sin-yeou* (24 novembre), on vit une grande quantité de petites étoiles qui filaient ensemble et tombaient.

931. Même période, 2e année, 9e lune, jour *ping-su* (15 octobre), aussitôt après le deuxième coup de tambour (dix heures du soir), on vit au N. E. une petite étoile filante qui entra dans le carré du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse) et s'éteignit. — Au cinquième coup de tambour, d'abord au N. O. et ensuite au N.

il parut une étoile filante grosse comme un demi-dixième de boisseau. D'abord elle était petite, ensuite elle grandit ; elle se dirigea vers l'astérisme *Koeï* (ζ, β, δ, Andromède), y entra et s'éteignit. Sa traînée lumineuse se réunit sur un point du ciel ; elle s'y courba en forme de nuage et disparut. Sa lumière éclaira la terre. On vit aussi dans le N. E. une étoile filante, semblable à une grosse pêche, qui sortit des étoiles *Hia-taï* (ν, ξ, grande Ourse) ; elle coula vers le N. O. arriva près de la 3e étoile du manche du *Pe-teou* (η, grande Ourse) et s'éteignit. — Après le cinquième coup de tambour, jusqu'au jour, on vit, au milieu et dans les quatre parties du ciel, plus de cent petites étoiles filantes allant en sens divers.

933. Même période, 4e année, 6e lune, jour *keng-ou* (20 juillet), on vit une quantité de petites étoiles filantes ensemble. — 25 juillet (7e lune, jour *y-haï*, 1re de la lune), on vit quantité d'étoiles filantes au même instant.

934. Période *Yng-chun*, année unique, 2e lune, jour *ting-yeou* (13 avril), on vit quantité d'étoiles filantes au N. O.

934. Période *Thsing-thaï*, 1re année, 9e lune, jour *sin-tcheou* (14 octobre), pendant la nuit, au commencement du 5e coup de tambour, on vit une étoile, grande comme cinq boisseaux, qui coula du S. O. Sa queue était longue d'une dizaine de degrés. Sa couleur était rouge. Elle changeait d'un instant à l'autre et se courbait en forme de dragon ; puis elle figurait deux sarcloirs ou bêches, qui se rapprochaient et se séparaient. Une autre étoile bien plus petite coula dans l'E. elle avait une queue lumineuse. Elle était d'un blanc mat. En un instant, elle se brisa en éclats. — Le recueil *Sin-ou-taï-sse* dit simplement à cette même date : « Il y eut beaucoup d'étoiles filantes ensemble. »

938. Période *Thien-fo*, 3e année, 3e lune, jour *jin-chin* (27 avril), pendant la nuit, après le 4e coup de tambour, on vit, dans l'E. une grande étoile filante semblable à un vase de trois dixièmes de boisseau. Sa couleur était blanche. Sa queue était longue de plus de 20 degrés. Elle glissa en serpentant. Elle pa-

rut 3 degrés à l'E. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle). Elle coula à l'E. sur plus de 10 degrés, et s'éteignit.

954. Période *Kien-tc*, 1re année, 1re lune, jour *keng-yn* (20 février), on vit une grande étoile qui tomba avec un bruit aussi fort que celui du tonnerre; des bœufs et des chevaux se sauvèrent. On crut dans la capitale que les tambours du palais donnaient un signal, et tous les tambours de la ville y répondirent.

956. Même période, 3e année, 1re lune, jour *kouei-haï* (15 mars), après le 5e coup de tambour (3 heures du matin), on vit une grande étoile qui sortit du *Teou* austral (φ, τ, σ, Sagittaire). Elle parcourut plus de 10 degrés en coulant au N. E. et s'éteignit. — 3e lune, sans date (vers avril), il y eut une apparition d'étoile filante (recueil *Sin-ou-taï-sse*.)

DEUXIÈME SÉRIE D'OBSERVATIONS, DEPUIS L'AN 960 JUSQU'À L'AN 1275 DE NOTRE ÈRE.

Toutes ces observations sont extraites de la section astronomique (*Thien-wen*) des Annales de la dynastie Soung, dans la grande collection des vingt-quatre historiens de la Chine. Sous cette dynastie, les météores furent observés avec un grand soin par l'ordre des empereurs. Ma-touan-lin n'a donné qu'une partie des observations qui furent alors faites, et, en conséquence, j'ai dû recourir au texte original des historiens de cette époque. Sous les dynasties antérieures, l'histoire ne présente que les observations rapportées par Ma-touan-lin.

ANNALES DES SOUNG. — SECTION DE L'ASTRONOMIE, LIVRE X.

960. Période *Khien-loung*, 1re année, 1re lune, jour *wou-ou* (17 février), une étoile parut au N. E. Sa couleur était bleu rougeâtre (violette). Elle alla au N. D'abord elle fut petite, ensuite elle fut grande. Sa trace était discontinue. Sa lumière éclaira la terre.

960. Même année, 4e lune (vers mai), une étoile parut dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus, du Serpent et d'Antinoüs, autour de α, Ophiucus, et de α, Hercule).

960. Même année, 6e lune, jour *koueï-yeou* (1er juillet), une grande étoile rouge sortit de la grande étoile de l'astérisme *Sin* (Antarès).

960. Même année, 6e lune, jour *kia-chin* (12 juillet), une étoile rouge sortit de l'enceinte du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles de la Vierge et du Lion, autour de β, Lion).

960. Même année, même lune, jour *y-oueï* (23 juillet), une grande étoile rouge coula au N. E. de l'astérisme *Hiu* (β, Verseau et environnantes).

960. Même année, 9e lune, jour *koueï-haï* (19 octobre), une étoile sortit de *Mao* (les Pléiades). Elle était grande comme une cruche.

960. Même année, même lune, jour *kia-tseu* (20 octobre), une étoile, grosse comme un vase, sortit de *Mao* (les Pléiades). Sa lumière éclaira la terre.

960. Même année, 12e lune, jour *wou-tchin* (23 décembre), une étoile de couleur bleu rougeâtre parut au drapeau de *Tsan* (π et autres d'Orion, dans la peau du Lion). Elle alla lentement au S. O. et disparut. Une lueur bleuâtre éclaira la terre. Dans l'Extrait donné par le Wen-hian-thoung-khao, on lit qu'elle était grosse comme un demi-dixième de boisseau.

961. Sans observations.

962. Même période, 3e année, 5e lune, jour *y-tcheou* (13 juin), un Chien céleste (météore qui fait du bruit) tomba au S. O.

962. Même année, sixième lune, jour *ting-yeou* (15 juillet), une étoile parut dans le Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent, autour de α, Ophiucus, et de α, Hercule). Elle entra dans le carré du Nan-teou (φ, σ, ζ, μ, Sagittaire).

963. Période *Khien-te*, 1re année, 2e lune, jour *ping-ou* (21 mars), une étoile, grosse comme une pêche et de couleur

rouge, sortit du groupe Arc et Flèche (η, δ, ε, $\varkappa$, grand Chien), et disparut au S. E. Sa lumière fut brillante.

964. Même période, 2^{e} année, 2^{e} lune, jour *y-tcheou* (3 avril), il parut une étoile grosse comme une mesure de trois dixièmes de boisseau. Sa couleur était jaune blanchâtre. Elle parut au S. des *Cinq-ti* (β, Lion et petites environnantes) du *Thaï-weï*. Elle alla jusqu'au Magasin extérieur (α_1, α_2, Cancer) et se réduisit en fragments. Sa lueur éclaira la terre.

965. Même période, 3^{e} année, 6^{e} lune, jour *ting-sse* (19 juillet), il parut une étoile grosse comme une pêche. Sa couleur était jaune bleuâtre. Elle sortit du carré du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse), traversa le N. du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion) et passa à l'O. de *Kio* (α, Vierge). Peu à peu elle grandit, parcourut 5 degrés environ et disparut. Sa traînée se condensa en un point du ciel et jeta une vive lumière.

966. Même année, 12^{e} lune, jour *ting-sse* (15 janvier), une étoile sortit du *Thien-ho* (la Voie lactée) ou, suivant le Wen-hian-thoung-khao, du *Thien-'o* (ε, Bélier). Sa couleur était d'un blanc bleuâtre. Elle alla au midi, jusqu'au Magasin céleste (*Thien-tsang*, ε, η, θ, τ, Baleine), et disparut. D'abord elle était petite, ensuite elle devint grande comme un demi-dixième de boisseau. Sa lumière éclaira la terre.

966. Même période, 4^{e} année, 1re lune, jour *y-oueï* (22 février), une étoile sortit du *Thien-che* (ι, ξ, τ, $\varkappa$, Navire). Sa couleur était d'un blanc bleuâtre. Elle allait très-vite et laissa une traînée de plus de 80 degrés. D'abord elle était petite, ensuite elle grandit. Elle s'éteignit en jetant une vive lumière.

966. Même année, 4^{e} lune, jour *kia-yn* (12 mai), une étoile sortit du *Thien-jou* (ω, Serpent et une petite). Sa couleur était bleu rougeâtre. Elle était grosse comme un dixième de boisseau. Elle alla rapidement au S. E. traversa l'astérisme *Fang* (π, β, δ, Scorpion) et disparut. Sa lumière éclaira la terre.

966. Même année, 8^{e} lune intercalaire, jour *ki-tcheou* (14 octobre), une étoile parut dans le Navire céleste (α, δ, μ, Persée).

Elle était grosse comme un dixième de boisseau. Elle alla rapidement au N. O. et disparut dans le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse).

968. Période *Khaï-pao*, 1re année, 7e lune, jour *wou-tseu* (3 août), il sortit de *Ta-kio* (Arcturus) une étoile grande comme un dixième de boisseau. Sa couleur était blanc bleuâtre. Elle alla au N. et disparut. Sa lumière éclaira la terre. — Dans le Wen-hian-thoung-khao, cette même apparition est rapportée au 9 août 967 (5e année de la période précédente).

968. Même année, 9e lune, jour *wou-tseu* (12 octobre), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse). Elle était bleu rougeâtre. Elle alla rapidement au N. et disparut.

969. Même période, 2e année, 6e lune, jour *ki-mao* (20 juillet), une étoile sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle). Elle était grosse comme un dixième de boisseau et allait lentement. Sa lueur éclaira la terre.

970. Même période, 3e année, 9e lune, jour *keng-ou* (3 novembre), les habitants du Kouang-tcheou (le district de Canton) virent un grand nombre d'étoiles qui filaient toutes au N.

971. Même période, 4e année, 8e lune, jour *sin-mao* (20 septembre), une étoile sortit du groupe de la Fileuse (la Lyre) et alla au N. O. sur une étendue de 30 degrés. Elle disparut, et, longtemps après, on entendit du bruit.

972. Même période, 5e année, 8e lune, jour *y-sse* (28 septembre), une étoile sortit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et alla au N. O. sur une étendue de 40 degrés. On entendit du bruit et elle se divisa.

973. Sans observations.

974. Même période, 7e année, 9e lune, jour *kia-ou* (14 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Tchi* (α, β, Pégase) et alla au N. O. Puis le corps de l'étoile se divisa avec bruit et sa lumière éclaira la terre.

976. Sans observations.

977. Période *Thaï-ping-hing-koue*, 2e année, 3e lune, jour *ping-*

ou (6 mai), une grande étoile parut dans le groupe du Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite). Sa lumière éclaira la terre.

978. Même période, 3e année, 10e lune, jour *kia-yn* (5 novembre), une étoile sortit du Navire céleste (α, δ, μ, Persée). Sa lumière était jaune rougeâtre. Elle était grosse comme un dixième de boisseau. Elle alla jusqu'au groupe du Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite) et se divisa en fragments. Sa lumière éclaira la terre.

979, 980, 981, 982. Sans observations.

983. Même période, 8e année, 3e lune, jour *ping-yn* (25 avril), une étoile parut en plein jour dans le S. O. Sa couleur était blanc bleuâtre. Sa trace s'étendait sur 30 degrés environ. Elle disparut au S. E. en jetant une vive lueur. — 7e lune, jour *sin-sse* (4 août), il parut une étoile grosse comme un poids de balance; elle disparut dans l'astérisme *Leou* (β, γ, Bélier). — 8e lune, jour *jin-yn* (25 août), une étoile parut à l'O. du *Keou-tchin* (de α à ζ, petite Ourse), du *Tse-weï* (cercle de perpétuelle apparition). Elle était grande comme une petite écuelle. Sa couleur était jaune rougeâtre. Elle marcha rapidement vers le N. s'approcha du pôle N. et disparut.

984. Période *Young-hi*, 1re année, 10e lune, jour *ting-yeou* (16 novembre), une étoile sortit de *Mao* (les Pléiades). Sa couleur était rouge. Elle alla en serpentant au S. E. sur près de 20 degrés, et disparut.

985. Même période, 2e année, 1re lune, jour *jin-su* (9 février), une étoile sortit du groupe *Toung-tsing* (μ, δ, pieds des Gémeaux). Elle était double de la planète de l'Or (Vénus). Elle vint jusqu'à l'astérisme *Koueï* (θ, η, γ, δ, Cancer) et disparut.

987. Même période, 4e année, 6e lune, jour *keng-su* (17 juillet), au commencement de l'heure *yeou* (vers cinq heures du soir), une étoile parut au N. O. Sa couleur était bleu blanchâtre. Elle entra dans les vapeurs. En même temps, dans le N. O. on entendit un bruit pareil à celui du tonnerre. — 8e lune, jour *i-kaï* (10 oc-

tobre), une étoile parut à l'E. du *Thien-kouan* (ζ, Taureau); sa couleur était jaune rougeâtre. Sa traînée lumineuse traversa la lune.

988. Période *Touan-koung*, 1re année, 4e lune, jour *sin-hai* (13 mai), à l'heure *haï* (neuf à onze heures du soir), une étoile sortit du groupe du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne). Elle était grande comme une coupe. Sa couleur était jaune rougeâtre. Elle allait en serpentant et faisait du bruit. Sa lumière éclaira la terre. Elle passa sur l'étoile au N. E. du Gué céleste (α, Cygne). — 5e lune intercalaire, jour *sin-haï* (12 juillet), à l'heure *tcheou* (de une à trois heures de la nuit), une étoile parut dans l'astérisme *Koeï* (ζ, β, δ, Andromède). Elle était grande comme la moitié de la lune. Elle alla au N. et disparut. — Jour *y-mao* (16 juillet), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* (de α à ζ, petite Ourse), du *Tse-weï* (queue du Dragon). Elle était grande comme une coupe. Sa couleur était bleue et sa queue assez courte. Une lumière rougeâtre éclaira la terre. Elle alla au N. et disparut.—9e lune, jour *koueï-tcheou* (11 novembre), une étoile parut au N. O. Elle était grande comme Vénus. Elle avait une queue. Elle alla au zénith, et auprès d'elle parut une petite étoile. Elle parcourut environ 10 degrés, et une autre petite étoile parut. Elles allèrent ensemble vers le groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre, β, Cocher, β, Taureau et deux autres) et disparurent.

989. Même période, 2e année, 4e lune, jour *sin-haï* (8 mai), à l'heure *su* (sept à neuf heures du soir), une étoile parut au N. E. elle était grande comme un dixième de boisseau. Sa couleur était blanche. Elle tomba entre les divisions *Ti* (α, β, Balance) et *Fang* (π, β, δ, Scorpion).

990. Période *Chun-hoa*, au printemps, 1re année, jour *jin-chin* (25 mars), une étoile sortit du groupe *Tchi-taï* (β, γ, Lyre). Elle alla rapidement au S. E. toucha le Drapeau de gauche (étoiles de la Flèche entre l'Aigle et le Dauphin). Elle dépassa le Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle) et disparut.

990. Même année, 9e lune, jour *sin-sse* (30 septembre), une

étoile sortit du groupe *Yu-lin* (δ, τ, χ, Verseau et autres des Poissons). Sa couleur était bleue. Elle alla au S. Son éclat effaça celui de la lune. — 11e lune, jour *jin-ou* (30 novembre), une étoile filante parut dans le *Thien-kouan* (ζ, Taureau); elle était grande comme la moitié de la lune et marchait au S. Elle passa près de l'astérisme *Toung-tsing* (μ, δ, γ, Gémeaux), du *Lang-weï* (Chevelure de Bérénice), des *Che-ti* (ζ, ξ, π et η, τ, υ, Bouvier), alla jusqu'au N. E. de *Takio* (Arcturus) et tomba à terre en jetant une vive lumière. Elle fit un bruit semblable à celui d'un mur qui s'écroule.

991. Même période, 2e année, 1re lune, jour *ping-chin* (12 février), une étoile parut à l'O. du *Chouï-fou* (υ, ξ, Orion, ou χ Orion, au-dessous de μ, Gémeaux). Elle était grande comme une tasse. Sa couleur était jaune rougeâtre. Elle traversa le groupe *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion), et se divisa en trois étoiles qui allèrent ensemble jusqu'à l'E. de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, $\varkappa$, η, Éridan), où elles disparurent. Leur lumière éclaira la terre. — 7e lune, jour *kouei-yeou* (19 juillet), une étoile parut à côté du groupe *Yun-yu* ($\varkappa$, λ, Poissons). Elle était grande comme une tasse, et sa couleur blanc bleuâtre. Elle parcourut lentement environ 3 degrés et disparut.

992. Même période, 3e année, 3e lune, jour *ki-yeou* (20 avril), à l'heure *oueï* (une à trois heures du soir), dans la partie N. O. du ciel, il parut une étoile qui coula rapidement au N. O. Elle était grande comme une tasse. Sa couleur était bleu blanchâtre. Elle avait une queue brillante. — 4e lune, jour *ki-mao* (20 mai), une étoile parut au S. O. du groupe *Wen-tchang* (θ, φ, υ, grande Ourse). Elle alla rapidement vers *Lieou* (δ, ε, η, Hydre), se divisa en deux étoiles et disparut. — 6e lune, jour *ki-tcheon* (29 juillet), une étoile parut à l'E. du *Thou-sse* (F, D, Cerbère) du Marché céleste. Sa couleur était bleu blanchâtre. Elle alla lentement au N. O. sur une longueur de près de 10 degrés, se divisa en trois étoiles, et disparut.

993. Même période, 4e année, 5e lune, jour *y-oueï* (31 mai), au jour, une étoile parut dans le S. E. au groupe *Nan-teou* (φ,

τ, σ, ξ, Sagittaire). Elle était grande comme une tasse. Sa couleur était blanc bleuâtre. Elle alla au N. O. et disparut.

994. Même période, 5e année, 8e lune, jour *ki-yeou* (8 octobre), avant que les étoiles ordinaires (étoiles fixes) fussent vues, une étoile parut à l'E. Sa couleur était blanc bleuâtre. Elle alla lentement vers le N. E. entra dans les vapeurs et disparut. On estima qu'elle avait paru entre les divisions stellaires *Koeï* (ζ, β, δ, Andromède) et *Leou* (α, β, Bélier). — 9e lune, jour *keng-ou* (28 octobre), une étoile parut au N. de *Mao* (les Pléiades). Elle était grande comme une tasse, et avait un mouvement assez lent. Elle passa auprès du groupe *Khiouen-che* (ε, ζ, ν, Persée), vint à l'astérisme de la *Meule* (φ, χ, ψ, Taureau) et disparut.

995. Période *Tchi-tao*, 1re année, 4e lune, jour *y-sse* (31 mai), avant que les étoiles ordinaires fussent vues, une étoile parut au N. du groupe *Sin* (α, σ, τ, Scorpion). Elle était grande comme une tasse. Sa couleur était bleu rougeâtre. Elle alla rapidement et tomba. — 7e lune, jour *koueï-tcheou* (7 août), une étoile sortit de l'astérisme *Oeï* (α, Verseau). Elle était grande comme une tasse. Sa couleur était blanc bleuâtre. Elle entra dans le groupe *Yu-lin* (δ, τ, χ, Verseau) et disparut.

996. Même période, 2e année, 5e lune, jour *sin-tcheou* (21 mai), une étoile parut au N. du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon). Sa queue occupait plus de 10 degrés. Elle rayonnait comme une comète, et produisit du bruit. Elle tomba entre les divisions stellaires *Tchi* (α, β, Pégase) et *Pi* (γ, Pégase). — 5e lune, jour *ki-oueï* (8 juin), lorsque le soleil était encore environ 5 degrés au-dessous de la terre, une étoile parut au zénith. Elle était grande comme une tasse. Sa couleur était jaune rougeâtre. Elle avait une queue. Elle alla rapidement au N. E. sur une longueur de 30 degrés et disparut. — 6e lune, jour *ki-mao* (28 juin), une étoile parut à l'O. du groupe *Khien-nieou* (β, α, Capricorne). Elle traversa le groupe *Kieou-koue* (ω, Sagittaire et petites). Sa lueur rayonnait sur près de 10 degrés. Elle tomba au S. E. et atteignit la terre sans bruit. Une autre étoile sortit de l'astérisme *Y* (déter-

minatrice α, Hydre et Coupe), traversa le Temple céleste (groupe de la Boussole et petites du Navire) et tomba à l'E. des étoiles *Tsi* (étoiles boréales du Navire). Sa lumière éclaira la terre. — 9e lune, jour *ting-yeou* (14 septembre), au jour, une étoile parut du côté du N. Elle était grande comme une tasse. Elle alla à l'E. sur une longueur de 30 degrés, se divisa en trois étoiles et disparut.

997. Période *Tchi-tao*, 3e année, 9e lune, jour *ting-tcheou* (19 octobre), deux étoiles tombèrent au S. O. l'une sortit du *Nan-teou* (φ, σ, τ, Sagittaire), l'autre sortit du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne). Leur lumière s'étendit sur plus de 30 degrés.

Point d'observations pendant quatre années.

1002. Période *Khien-ping*, 5e année, 3e lune, jour *ping-ou* (25 avril), en plein jour, une étoile sortit de l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion). Elle alla jusqu'au *Teou* du Midi (φ, σ, τ, Sagittaire) et disparut. Sa lumière était rouge, et s'étendait sur 10 degrés environ. — 8e lune, jour *sin-sse* (27 septembre), une étoile parut dans le *Yng-tchi* (α, Pégase). Elle était grosse comme une tasse. Sa lumière était de couleur blanche. — 9e lune, jour *ping-chin* (12 octobre), une étoile parut à l'orient et alla au S. O. elle était grande comme un boisseau et faisait un bruit semblable au mugissement d'un bœuf. Plusieurs dizaines de petites étoiles la suivaient et elles tombèrent ensemble. — Le jour *wou-su* (14 octobre), il parut encore des milliers de petites étoiles qui entrèrent dans le groupe *Koueï* (θ, γ, δ, Cancer) et allèrent jusqu'au groupe *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse). En général, on voyait une grande étoile suivie d'une dizaine de petites étoiles. Parmi elles, on aperçut deux étoiles grosses comme un dixième de boisseau : celles-ci allèrent, l'une jusqu'à l'étoile *Lang* (Sirius), l'autre jusqu'au *Teou* du midi (φ, σ, τ, Sagittaire) et elles disparurent. — Jour *ting-oueï* (23 octobre), une étoile parut en plein jour dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle traversa le *Pe-teou* (les sept principales de la grande Ourse) et tomba. — Jour *jin-tseu* (28 octobre), une étoile grande comme un vase parut au zénith. Sa queue s'étendait, en diverses direc-

tions, comme une flamme qui se divise; elle coula à l'O. jusqu'à l'Arc de *Lang* (δ, γ, η, grand Chien) et disparut.

1003. Période *Khien-p'ing*, 6e année, 5e lune, jour *y-ouei* (8 juin), une étoile parut à l'O. du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); une autre parut un peu au N. E. du pôle nord, alla jusqu'à l'extérieur de l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon) et disparut. On entendit un bruit semblable à celui du tonnerre. — 6e lune, jour *keng-ou* (13 juillet), en plein jour, une étoile parut au N. E. Sa couleur était blanche; elle laissa une traînée lumineuse. — 7e lune, jour *jin-tchin* (4 août), une étoile sortit de l'astérisme *Mao* (les Pléiades). Sa trace lumineuse occupait plus de 10 degrés. Sa couleur était blanche; elle produisit un bruit sourd et répété: elle alla jusqu'à l'astérisme *Lang* (Sirius) et disparut. — 11e lune, jour *koueï-tcheou* (23 décembre), une étoile sortit de l'astérisme *Pi* (les Hyades); elle alla au N. des étoiles *P'ing* (α, β, Lièvre) et disparut. Sa trace lumineuse s'étendait sur 30 degrés et ondulait comme un serpent.

1004. Période *Khien-p'ing*, 6e année, 12e lune, jour *y-yeou* (25 janvier), dans le district de Weï (*Weï-tcheou* du *Sse-tchouen*), il parut une étoile grande comme un boisseau; elle passa au N. O. de la ville. Sa queue s'étendait sur un *li* (dixième de lieue); sa lumière éclaira la terre. On entendit trois coups semblables au bruit du tonnerre.

1004. Période *King-te*, 1re année, 6e lune, jour *wou-ou* (25 juin), en plein jour, une étoile parut dans le S. O. elle était jaune rougeâtre; elle avait une queue; elle parcourut 10 degrés et disparut. — 10e lune, jour *wou-chin* (12 décembre), dans le district de Thien-hioung (*Thaï-ming-fou* du *Pe-tchi-li*), on vit au N. une étoile grande comme un boisseau; elle tomba au N. O. Sa lumière était rouge et sa queue longue d'environ 10 degrés.

1005. Période *King-te*, 1re année, 12e lune, jour *keng-tchin* (13 janvier), une étoile parut dans le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla lentement au S. O. se divisa en plusieurs étoiles qui allèrent au N. E. de l'enceinte *Tse-weï* (la queue

du Dragon) et disparurent. — Jour *wou-tseu* (21 janvier), une étoile sortit de *Mao* (les Pléiades); elle alla vers le drapeau de *Tsan* (π et autres d'Orion dans la peau de Lion), se divisa en plusieurs étoiles et disparut.

1005. Période *King-te*, 2e année, 1re lune, jour *ping-tseu* (10 mars), avant le coucher du soleil, une étoile coula rapidement au S. O. elle était grosse comme une pêche. — 2e lune, jour *ki-haï* (2 avril), une étoile sortit du général supérieur du *Tse-weï* (λ, Dragon) : sa lumière éclaira la terre. — 4e lune, jour *koucï-mao* (5 juin), une étoile fila au N. et entra dans le Marché céleste (étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Ophiucus); elle était grande comme un dixième de boisseau. Sa trace fut sinueuse et occupait plus de 10 degrés. — 10e lune, jour *wou-yn* (7 novembre), une étoile sortit de l'enceinte intérieure du *Tse-weï* (la queue du Dragon); elle alla au N. jusqu'à la division *Y* (déterminatrice α, Hydre et Coupe), se divisa en trois étoiles qui se suivirent et disparurent : sa trace lumineuse était bleu blanchâtre. — 11e lune, jour *jin-tseu* (11 décembre), en plein jour, une étoile parut au S. de l'astérisme *Oeï* (α, Mouche et Lys); elle fit un bruit semblable au tonnerre : une vive lueur éclaïra la terre.

1006. Même période, 3e année, 5e lune, jour *y-mao* (12 juin), une étoile parut au N. E. du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne); elle alla jusqu'au N. de l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle se divisa en quatre étoiles qui se suivaient et disparut. Sa couleur était jaune rougeâtre; elle avait une queue lumineuse. — 6e lune, jour *y-haï* (2 juillet), une étoile sortit du groupe *Yun-yu* (petites étoiles au N. E. de ι, Baleine); elle alla au N. vers les groupes *Yu-lin* (δ, τ, Verseau), *Thien-ki* (o, d'Hercule), se divisa en trois étoiles et disparut. — Jour *ting-yeou* (24 juillet), une étoile parut au N. de l'astérisme *Oeï* (la Mouche); elle entra dans le Grenier céleste (α, γ, δ, μ, Baleine) et se divisa en plusieurs étoiles. Sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *keng-chin* (16 août), une étoile parut à l'astérisme *Hiu* (β, Verseau).

Près d'elle était une courte queue rayonnante. On entendait un bruit semblable à celui du tonnerre. Elle alla au N. E. et disparut; sa lumière était rouge et éclaira la terre. — 11e lune, jour *sin-tcheou* (25 novembre), une étoile parut au N. E. du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse); elle marchait rapidement avec bruit; sa lueur éclaira la terre.

1007. Même période, 4e année, 3e lune, jour *keng-chin* (13 avril), une étoile parut en plein jour dans le S. du ciel. — 6e lune, jour *ping-tchin* (7 août), une étoile parut dans le N. elle alla lentement jusqu'au groupe des huit Fruits (*Pa-ko*, δ, ξ, Cocher et petites de la Girafe), se divisa en plusieurs étoiles et disparut. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-oueï* (10 août), une étoile sortit du Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Ophiucus); elle se divisa en trois étoiles qui allèrent jusqu'à l'astérisme *Oueï* (μ et autres, queue du Scorpion) et disparurent. — 7e lune, jour *sin-mao* (11 septembre), une étoile parut au S. de la grosse Courge (*Hou-koua*, α, β, γ, δ, Dauphin); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement, dépassa le Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle), entra dans le Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Ophiucus), et parvint au N. E. du *Thsoung-jin* (γ, Ophiucus ou un groupe voisin); alors elle se divisa en deux étoiles et disparut. Sa lumière était jaune rougeâtre; elle avait une queue brillante.

1008. Période *King-te*, 4e année, 12e lune, jour *koueï-sse* (11 janvier), une étoile sortit du groupe Arc et Flèche (η, γ, δ, grand Chien). Sa couleur était jaune rougeâtre; elle avait une queue brillante de plus de 10 degrés; sa lumière éclairait la terre. Elle alla rapidement et se perdit dans les vapeurs.

1008. Période *Ta-tchoung-yang-fou*, 1re année, 2e lune, jour *wou-chin* (26 mars), on vit plus de 10 étoiles qui filèrent rapidement et entrèrent dans les vapeurs; leur couleur était jaune rougeâtre et elles laissaient une trace lumineuse. — 5e lune, jour *sin-oueï* (17 juin), une étoile, grande comme la planète Vénus,

parut au S. E. du *Tsoung-jin* (petit groupe à l'E. de γ, Ophiucus) de l'enceinte du Marché céleste. Sa queue avait plus de 10 degrés en longueur et trois dixièmes de degré en largeur; elle glissa lentement vers le N. et arriva à l'E. du groupe *Niu-tchoang* (π, ρ, Hercule). Alors, elle se divisa en plusieurs étoiles et disparut. — 6e lune, jour *wou-chin* (24 juillet), une étoile sortit de l'intérieur du *Kouei* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était jaune rougeâtre; elle avait une queue lumineuse; elle alla rapidement vers le N. se divisa en plusieurs étoiles et disparut. — 8e lune, jour *ki-tcheou* (3 septembre), en plein jour, une étoile parut au milieu du ciel; elle était grande comme la planète Vénus; elle avait une queue lumineuse; elle se dirigea rapidement au S. E. s'approcha du soleil et disparut. — 9e lune, jour *y-tcheou* (9 octobre), une étoile sortit du Magasin céleste (ι, η, θ, τ, Baleine); elle fila rapidement au S. E. Le corps de l'étoile se brisa et elle disparut.

1009. Même période, 2e année, 3e lune, jour *ki-ouei* (1er avril), une étoile grande comme un boisseau parut au S. du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne); elle alla jusqu'au groupe *Li-tchu* (petites étoiles au N. de ε, Verseau) et disparut. Sa trace lumineuse avait plus de 5 degrés : sa lumière éclairait la terre. — 4e lune, jour *ping-chin* (8 mai), une étoile parut au groupe des Huit-Fruits (δ, ξ, Tête du Cocher et petites de la Girafe); elle était grosse comme un dixième de boisseau; elle avait une queue lumineuse; elle fila rapidement à l'O. jusqu'à ce qu'elle fût à l'E. des Cinq-Chars (α, Chèvre, β, θ, ι, Cocher, β, Taureau); alors elle se divisa en plusieurs étoiles et disparut. — 5e lune, jour *y-haï* (16 juin), en plein jour, une étoile parut à l'E. Elle était grande comme Vénus; elle avait une queue bleu rougeâtre; elle glissa vers le nord du soleil et disparut. — 8e lune, jour *ping-chin* (5 septembre), une étoile parut au S. O. du Manche du *Pe-teou* (ε, ζ, η, grande Ourse); elle alla rapidement jusqu'à l'O. du *Lang-tsiang* (p, Chevelure de Bérénice) et se brisa en éclats. — 9e lune, jour *y-tcheou* (4 octobre), une étoile sortit du Fleuve austral

(α, β, petit Chien); elle était grosse comme une pêche et de couleur rouge; elle alla jusqu'au *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse) et disparut.

1010. Même période, 3e année, 3e lune, jour *ting-oueï* (14 mai), une étoile parut à l'E. du groupe *thsoung-jin* du Marché céleste (petit groupe à l'E. de γ, Ophiucus); elle était grosse comme un dixième de boisseau; sa trace lumineuse occupait 20 degrés. Elle alla jusqu'au groupe du Drapeau (étoiles d'Antinoüs près de l'Aigle), se divisa en plusieurs étoiles et disparut. La lumière qu'elle jeta éclaira la terre. — 5e lune, jour *ting-haï* (23 juin), une étoile parut dans le carré du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était grosse comme une pêche; sa couleur était blanc bleuâtre; sa queue occupait plus de 20 degrés. — 6e lune, jour *ting-sse* (23 juillet), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla jusqu'au groupe *Chang-taï* (κ, ι, grande Ourse) et disparut. — Jour *y-tcheou* (31 juillet), une étoile sortit du *Tchouen-che* (étoiles de la Girafe et du Renne représentées en ligne droite auprès de la polaire); elle était grosse comme une pêche; sa couleur était jaune rougeâtre. Elle alla jusqu'au *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon) et disparut. — Jour *jin-chin* (7 août), une étoile sortit des étoiles *Kien* (ξ, π, φ, Sagittaire); elle était grosse comme un dixième de boisseau. Elle entra dans le *Teou* du midi (σ, τ, φ, Sagittaire) et disparut. Sa couleur était rouge jaunâtre; elle avait une queue. — 7e lune, jour *keng-tchin* (15 août), une étoile parut à l'O. du *Thsoung-jin* (groupe à l'E. de γ, Ophiucus); elle était grosse comme un dixième de boisseau; elle coula au N. et disparut dans des vapeurs : la lumière qu'elle jeta éclaira la terre. — 8e lune, jour *ting-oueï* (11 septembre), une étoile sortit du groupe *Kouan-tso* (Couronne boréale); elle était grande comme un dixième de boisseau; elle s'approcha du Trône impérial (*Ti-tso*, α, Hercule) et disparut. Sa queue était brillante. — 9e lune, jour *keng-tchin* (14 octobre), une étoile sortit du groupe *Hien-youen* (α, γ, δ, Lion); elle était grosse comme un demi-dixième de boisseau; elle entra

dans le *Thaï-weï* (enceinte formée par des étoiles de la Vierge et du Lion autour de β, Lion) et disparut. — 10e lune, jour *keng-su* (13 novembre), une étoile parut à l'orient. Sa couleur était jaune rougeâtre; elle n'avait pas de queue; elle se divisa en plusieurs petites étoiles et disparut lentement au midi.

1011. Même période, 4e année, 2e lune, jour *sin-haï* (14 mars), une étoile parut à l'E. sa queue était rouge jaunâtre et occupait plus de 20 degrés. — 4e lune, jour *y-tcheou* (27 mai), une étoile sortit de l'astérisme *Lieou* (δ, ε, ζ, Hydre); elle était grosse comme un dixième de boisseau; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle alla jusqu'à l'astérisme *Y* (déterminatrice α, Coupe) et disparut. — 5e lune, jour *wou-tseu* (19 juin), une étoile de couleur rouge parut à l'E. — 6e lune, jour *jin-su* (23 juillet), une étoile parut au N. E. du groupe *Tse* (λ, Orion); elle était grande comme un dixième de boisseau; elle coula et entra dans des vapeurs. — 7e lune, jour *jin-chin* (2 août), une étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était grande comme un dixième de boisseau; elle coula vers l'étoile Souverain du ciel (la polaire ou une voisine) et disparut. — Jour *wou-yn* (8 août), une étoile sortit du groupe *Neï-kiaï* (π, τ, grande Ourse); elle traversa le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse), alla jusqu'au *Chang-taï* ($\varkappa$, ι, grande Ourse), se divisa en plusieurs étoiles et disparut. — 10e lune, jour *wou-ou* (16 novembre), une étoile parut au N. E. elle était grosse comme un dixième de boisseau; elle fila vers des nuages. Une autre étoile parut à l'E. des sept Étoiles (groupe de α, Cœur de l'Hydre); elle était grande comme une tasse; elle alla jusqu'au groupe *Thien-tsi* (étoiles de la Boussole) et disparut. Sa queue occupait plus de 20 degrés.

1012. Même période, 5e année, 2e lune, jour *wou-chin* (5 mars), une étoile sortit du *Kouan-tso* (Couronne boréale); elle traversa le *Kou-leou* (ι, $\varkappa$, η, Centaure), se divisa en plusieurs étoiles et disparut. — 8e lune, jour *wou-ou* (11 septembre), on vit plus de 20 étoiles grandes et petites, toutes avec une traînée lumineuse; elles allèrent vers le N. On vit aussi une étoile grande comme

un dixième de boisseau. Sa lueur éclaira la terre. Elle parut hors de l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon). Sa trace lumineuse était longue de plus de 10 degrés et large de trois dixièmes de degré. Elle coula au N. jusqu'au groupe *Tchouen-che* (étoiles de la Girafe et du Renne représentées en ligne droite auprès de la Polaire), et disparut.

1013. Même période, 6e année, jour *jin-sse* (sans indication du mois lunaire), une étoile parut en plein jour du côté du S. Sa lumière était rouge et assez brillante pour éclairer la terre.

1014. Même année chinoise, 11e lune, jour *ting-sse* (3 janvier), une étoile parut à l'E. du *Lang-weï* (Chevelure de Bérénice). Elle était grande comme une tasse; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle avait une queue. Elle vint au N. de l'astérisme *Tchin* (γ et autres du Corbeau), se divisa en plusieurs étoiles et disparut. — Même année, 12e lune, jour *koueï-haï* (9 janvier), une étoile parut au S. O. Sa couleur était bleu blanchâtre. Elle disparut au N. E. — Même période, 7e année, 2e lune, jour *ping-su* (2 avril), une étoile sortit du Fleuve austral (α, β, petit Chien). Elle était grande comme une tasse. Elle vint jusqu'au groupe *Yu-tsing* (déterminatrice μ, Gémeaux) et disparut. — 4e lune, jour *sin-yeou* (7 mai), une étoile sortit du *Keou-tchin* (de α, Polaire, à ζ, petite Ourse). Elle était grande comme une tasse. Sa queue était jaune rougeâtre. — 7e lune, jour *ting-oueï* (21 août), une étoile parut en plein jour dans le S. E. sa couleur était jaune; elle alla rapidement au N. — 9e lune, jour *sin-haï* (24 octobre), une étoile sortit du *Kiun-chi* (ν, ξ, θ, grand Chien). Elle alla vers Lieou (δ, ε, σ, Hydre), se divisa en trois étoiles et disparut. — 11e lune, jour *koueï-oueï* (25 novembre), une étoile parut en plein jour au S. O. du soleil, Sa traînée lumineuse s'étendait sur près de 20 degrés et était large de trois dixièmes de degré. Sa couleur était bleu blanchâtre. Elle fila vers l'O. et disparut. — Même lune, jour *ki-tcheou* (1er décembre), une étoile sortit du Fleuve austral (α, β, petit Chien); elle atteignit le groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien) et disparut. Sa lueur éclaira la terre.

1015. Même période, 8e année, 2e lune, jour *ting-mao* (14 mars), une étoile parut au N. du *Lang-tsiang* (*p*, Chevelure de Bérénice); elle se divisa en plusieurs étoiles et disparut. — 4e lune, jour *kouei-tcheou* (29 avril), une étoile parut à l'O. de *Kang* (κ, λ, Vierge); elle alla au *Che-ti* de droite (η, τ, υ, Bouvier) et se divisa en plusieurs étoiles qui se suivirent et disparurent. — 5e lune, jour *y-yeou* (31 mai), on vit une étoile grande comme une tasse. Sa couleur était bleu blanchâtre. Elle sortit des étoiles de l'Homme (α, β et autres du petit Cheval), alla jusqu'au Serpent dressé (π, Cygne, $\varkappa$, Andromède et voisines) et disparut. Une vive lueur éclaira la terre. — Jour *ping-chin* (11 juin), une étoile coula vers le S. O. se divisa en plusieurs étoiles et disparut. Sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *ki-haï* (7 octobre), une étoile parut dans *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion). Elle était grande comme une tasse. Elle coula au S. et entra dans les vapeurs.

1016. Même période, 9e année, 4e lune, jour *keng-tseu* (4 juin), une étoile parut en plein jour; elle était jaune rougeâtre. Elle fila rapidement au N. O et disparut.

1017. Période *Thien-hi*, 1re année, 4e lune, jour *ki-sse* (29 avril), une étoile sortit du groupe *Tchin* (γ, ε et autres du Corbeau). Elle était grande comme une tasse. Elle alla au N. de l'astérisme *Ki-fou* (étoiles du Centaure, au S. de γ, Corbeau) et disparut. Sa lumière éclaira la terre. — A la 6e lune (vers juillet, sans date de jour), une étoile sortit du tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle). Elle se dirigea vers le Champ céleste (τ, Vierge), se divisa en plusieurs étoiles et disparut.

1018. Même année chinoise, 12e lune, jour *koueï-sse* (10 janvier), une étoile parut au N. E. elle était grande comme une tasse. Sa queue était jaune rougeâtre. Elle s'avança rapidement au S. O. et disparut. — Même période, 2e année, 8e lune, jour *y-mao* (7 octobre), deux étoiles parurent; elles étaient grandes comme des tasses. Leur trace lumineuse était jaune rougeâtre. L'une parut dans les Cinq-Chars (α, Chèvre, β, θ, ι, Cocher, et β, Tau-

reau); l'autre parut au N. de Lang (*Sirius*). Toutes deux entrèrent dans les vapeurs. — Jour *wou-ou* (10 octobre), une étoile sortit du *Tsieou-ki* (étoiles du Cancer, $\varkappa$, α, π) et alla au *Ming-tang* (ν, φ, e, Lion). — 9e lune, jour *wou-tseu* (9 novembre), une étoile, grande comme deux dixièmes de boisseau, parut à l'O. de la Rivière australe (α, β, petit Chien); sa couleur était jaune rougeâtre. Elle alla jusqu'à l'astérisme *Lieou* (δ, ε, Hydre) et s'éteignit.

1019. Même période, 3e année, 6e lune, jour *y-sse* (24 juillet), une étoile sortit de *Mao* (les Pléiades). Elle était grande comme une tasse. Elle coula rapidement jusqu'au Magasin céleste (η, θ, ι, τ, Baleine) et disparut.

1020. Même année chinoise, 12e lune, jour *jin-yn* (17 janvier), une étoile sortit du groupe *Hien-youen* (α, γ, δ, Lion); elle était grosse comme une tasse; sa queue était de couleur jaune. Elle s'avança lentement jusqu'au *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion). Longtemps après, on entendit un bruit semblable à un coup de tonnerre. — 4e année, 1re lune, jour *ting-tcheou* (21 février), une étoile sortit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée). Elle était grande comme une tasse. Sa lumière éclairait la terre. Elle alla jusqu'au groupe du Serpent dressé (π, Cygne; $\varkappa$, Andromède, et autres de Cassiopée), puis elle disparut.

1021. Même période, 5e année, 4e lune, jour *ping-tchin* (25 mai), une étoile parut aux étoiles antérieures du groupe *Hien-youen* (ε, μ, Lion); elle était grande comme une pêche, et sa forme était semblable à une pelotte de farine. Elle passa près du *Tse-tsiang* (ι, Lion), entra dans l'enceinte du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion), près de *Ma-ping* (ϖ et autres, tête de la Vierge). Cette apparition dura soixante et quinze jours; puis elle entra dans les vapeurs et disparut[1]. — Jour *ki-oueï* (28 mai); une étoile parut au midi. Elle était grosse comme deux dixièmes

[1] Cette étoile est une comète. Ma-touan-lin la mentionne, kiv. 294, parmi les étoiles extraordinaires, et je l'ai donnée, d'après lui, dans les additions à la Connaissance des temps pour 1846. Par une erreur qui m'est échappée, je l'ai placée à l'année 1018 au lieu de l'année 1021. Le jour de l'apparition doit être de même corrigé et reporté au 25 mai.

de boisseau. Sa couleur était bleu rougeâtre. Elle alla au N. et entra dans les vapeurs. Sa queue occupait trente degrés. — 7e lune, jour *sin-sse* (18 août), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse). Sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *y-sse* (10 novembre), une étoile parut à l'O. du Gué céleste (α, β, γ, Aigle); elle était grosse comme une tasse.

1022. Période *Kien-hing*, 1re année, 3e lune, jour *keng-yn* (24 avril), une étoile sortit du groupe *Tsi-sing* (déterminatrice α, Hydre; elle avait une trace lumineuse. Elle alla jusqu'à *Y* (déterminatrice α, Coupe) et disparut. — 5e lune, jour *ki-sse* (2 juin), une étoile parut au groupe du Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite). Elle alla rapidement dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon), à l'O. de l'étoile du pôle, et disparut. — Jour *koueï-yeou* (6 juin), une étoile parut au N. O. de *Tchang* (ν, λ, Hydre) et disparut dans les vapeurs. — Jour *jin-ou* (15 juin), une étoile sortit de *Oeï* (déterminatrice α, Verseau). Elle était grosse comme un gobelet. Sa couleur était rouge jaunâtre. Elle avait une queue lumineuse; elle s'avança rapidement vers l'E. elle brillait comme une flamme divisée; elle alla jusqu'au midi du groupe *Yu-lin* (ϑ, τ, Verseau et autres des Poissons) et disparut. La lueur qu'elle répandit éclaira la terre. — Jour *ki-tcheou* (22 juin), une étoile sortit du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle alla jusqu'au groupe *Hien-youen* (α, γ, η, Lion) et disparut. — 9e lune, jour *ki-sse* (30 septembre), une étoile sortit du groupe *Yu-lin* (δ, τ, Verseau et autres des Poissons), coula jusqu'au *Tsou-kao* (ξ, ο, Taureau au-dessous des Pléiades) et disparut. — Jour *ki-tcheou* (20 octobre), une étoile parut près de l'enceinte du Marché céleste. Elle traversa lentement le ciel; de l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour d'α, Ophiucus), elle alla au groupe *Yng-tchi* (α, β, Pégase) et disparut. — Jour *jin-tchin* (23 octobre), une étoile sortit du groupe *Yng-tchi* (α, β, Pégase), alla jusqu'au *Thien-thsang* (ν, η, θ, τ, Baleine) et disparut. — 10e lune, jour *ting-yeou* (28 octobre), une étoile sortit de l'Étendard de droite (étoiles d'Antinoüs, à l'O.

de l'Aigle). Elle était grande comme la planète Vénus. Elle alla rapidement au S. O. vers le groupe *Thien-pien* (λ, $\varkappa$, Antinoüs et petites de Sobieski) et disparut. La lumière qu'elle jeta éclaira la terre. — 11e lune, jour *jin-tchin* (22 décembre), avant que les étoiles ordinaires fussent toutes vues, une étoile sortit du groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher, et β, Taureau); elle alla au midi jusqu'au groupe *Koeï* (β, ζ, Andromède) et disparut.

1023. Période *Thien-ching*, 1re lune, jour *ping-su* (14 février), une étoile sortit du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle alla à l'O. jusqu'au groupe *Pa-ko* et disparut. — 3e lune, jour *wou-tchin* (28 mars), une étoile sortit du *Kouan-tso* (Couronne boréale); elle alla jusqu'au groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. — 6e lune, jour *wou-su* (26 juin), une étoile sortit du *Thien-pien* (λ, g, Antinoüs, Écu de Sobieski). Elle alla jusqu'aux étoiles *Kien* (ξ, π, ϱ, Sagittaire) et disparut. — 7e lune, jour *ki-tcheou* (16 août), une étoile parut au N. E. des étoiles du *Pe-teou* (les sept principales de la grande Ourse); elle disparut dans les vapeurs. — Jour *keng-yn* (17 août), une étoile parut dans le groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; θ, ι, Cocher; β, Taureau) et alla jusqu'aux Cinq-Chefs (*Ou-tchoue-keou*, étoiles du Rameau de la Vierge). — 9e lune intercalaire, jour *koueï-sse* (19 octobre), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau). Elle alla jusqu'à *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion) et disparut. — Jour *ping-chin* (22 octobre), une étoile sortit du *Toung-pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle alla jusqu'au *Thien-thsang* (ν, η, θ, τ, Baleine) et disparut. — Jour *kia-tchin* (30 octobre), avant que les étoiles ordinaires (étoiles fixes) fussent vues, une étoile parut dans le groupe *Yng-tchi* (α, β, Pégase), alla jusqu'au groupe *Waï-ping* (α, δ, ε, Poissons) et disparut.

1024. Même période, 2e année, jour *sin-tcheou*, présumé 3e lune (24 avril), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle alla jusqu'à *Pi* (les Hyades) et disparut. — 6e lune, jour *ting-mao* (19 juillet), au commencement du jour, une étoile parut au zénith. Elle était de couleur rouge

jaunâtre. Elle avait une queue brillante. Elle alla lentement au S. O. et entra dans les vapeurs. — Jour *sin-sse* (2 août), une étoile parut au midi du groupe *Khien-nieou* (β, α, Capricorne). Elle alla dans les vapeurs. — 9^{e} lune, jour *sin-mao* (11 octobre), une étoile sortit de l'enceinte *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion) et disparut près du *Tchi-fa* de droite (β, Vierge).

1026. Même période, 4^{e} année, 1re lune, jour *jin-ou* (25 janvier), une étoile parut dans l'astérisme *Kang* (κ, ι, Vierge); elle coula au S. E. et entra dans les vapeurs. — Jour *ting-sse* (1er mars), une étoile sortit de l'astérisme *Ling-thaï* (*r*, *s*, *g*, Lion); elle alla jusqu'à *Y* (déterminatrice α, Coupe) et disparut. — Jour *ping-ou* (19 avril), une étoile sortit du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse), traversa le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Cette nuit, on vit encore une étoile qui sortit de l'astérisme *Ki* (déterminatrice γ, Sagittaire), alla au midi et entra dans les vapeurs. — 4^{e} lune, jour *ping-yn* (9 mai), une étoile parut auprès du *Thsoung-kouan* (2567, Lion), du *Thaï-weï*. Elle alla au midi et entra dans les vapeurs. — 5^{e} lune, jour *sin-sse* (24 mai), une étoile parut dans l'intérieur du Marché céleste (enceinte d'étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Hercule), à côté du *Chi-heou* (μ, Ophiucus et petites du Serpent). Elle coula au N. E. et disparut dans les vapeurs. — 5^{e} lune intercalaire, jour *ping-tchin* (28 juin), une étoile parut dans le Navire céleste (α, σ, δ, γ, Persée) et disparut près du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (groupe de α, Polaire, à ζ, petite Ourse). — 6^{e} lune, jour *y-haï* (17 juillet), une étoile parut au S. E. du *Tou-sse-kioung* (vide de l'Officier terrestre; o, Baleine) et entra dans les vapeurs. — 8^{e} lune, jour *y-oueï* (15 octobre), une étoile parut dans le Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite); elle s'approcha du *Thien-thsang* (θ, δ, κ, Bouvier) et disparut. — 9^{e} lune, jour *ting-oueï* (17 octobre), une étoile parut au N. O. du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et entra dans les vapeurs. — 11^{e} lune, jour *ping-tchin* (25 octobre), une étoile sortit du *Toung-tsing* (μ, δ, γ, Gémeaux); elle disparut près du Fleuve austral (α, β, petit Chien).

1027. Période *Thien-ching*, 4e année, 12e lune, jour *ting-tcheou* (15 janvier), une étoile sortit du *Keou-tchin* (groupe de α, Polaire, jusqu'à ζ, petite Ourse); elle disparut près du Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite d'Hercule). — Jour *wou-su* (5 février), une étoile sortit du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion); elle alla jusqu'au groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. — Même période, 5e année, 1re lune, jour *jin-yn* (9 février), une étoile parut au S. O. du *Thien-che* (ι, ξ, τ, $\varkappa$, Navire); elle entra dans des vapeurs. — 9e lune, jour *koueï-mao* (8 octobre), une étoile parut au N. du *Thien-tchu* (δ, ε, π, ρ, σ, Dragon); elle coula dans des vapeurs. — Jour *ting-oueï* (12 octobre), une étoile sortit du pôle N. elle disparut près du *Thien-tchoung* (petites entre α et ι, Dragon). — Jour *kia-tseu* (29 octobre), une étoile sortit du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut dans le *Toung-tsing* (μ, δ, γ, Gémeaux).

1028. Même période, 6e année, 4e lune, jour *kia-chin* (16 mai), à la fin de la nuit, il parut une étoile grosse comme un boisseau. Elle alla du N. au S. O. sa lueur éclaira la terre. Elle fit un bruit semblable à celui du tonnerre et laissa une traînée lumineuse, longue d'une dizaine de degrés, qui se dispersa lentement et devint un nuage d'un blanc verdâtre.

1029. Même période, 7e année, 2e lune, jour *y-tcheou* (21 février), une étoile sortit du *Thien-jou* (ω, Serpent), traversa le Marché céleste (enceinte d'étoiles du Serpent et d'Ophiucus, autour de α, Ophiucus) et disparut dans les vapeurs.

1030. Même période, 8e année, 2e lune, jour *ting-yeou* (19 mars), une étoile parut à côté de la grande étoile du groupe *Hien-youen* (α, Lion, Régulus); elle était grosse comme un gobelet; elle alla rapidement jusqu'au groupe *Tsao-fou* (δ, ε, $\varkappa$, Céphée) et disparut.

1031. Point d'observations.

1032. Période *Ming-tao*, 1re année, 3e lune, jour *koueï-sse* (4 mai), une étoile sortit du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse), traversa le Fleuve boréal (α, β, Gémeaux), entra dans le groupe

du *Tsing* oriental (μ, δ, Gémeaux) et disparut. Elle faisait un bruit semblable à celui de la flamme, et sa lumière éclairait la terre. Peu après, une autre étoile parut près du *Thsoung-jin* (groupe à l'E. de β, γ, Ophiucus), dans l'enceinte du Marché céleste. Elle fila à l'O. et entra dans les vapeurs. — 4^{e} lune, jour *y-sse* (26 mai), une étoile sortit du *Kouan-tso* (Couronne boréale); elle était grande comme une tasse, et disparut près du *Keou-tchin* (groupe de α jusqu'à ζ, petite Ourse); sa lueur éclaira la terre. — 8^{e} lune, jour *koueï-haï* (1er octobre), une étoile sortit du Navire céleste (α, γ, δ, Persée), traversa le *Keou-tchin* (groupe de α à ζ, petite Ourse) et disparut. Sa lumière éclaira la terre. — Jour *y-tcheou* (3 octobre), une étoile sortit du groupe *Oeï* (la Mouche); elle était grande comme une tasse; elle avait une queue, et se dirigea lentement au N. O. elle se divisa en six ou sept petites étoiles qui allèrent ensemble dans le groupe *Ta-ling* (τ, $\varkappa$, θ, Persée). La lumière de ce météore éclaira la terre.—Jour *ping-yn* (4 octobre), une étoile sortit du *Yng-tchi* (α, β, Pégase); elle alla rapidement au S. O. jusqu'au groupe *Oeï* (déterminatrice α, Verseau) et disparut. Longtemps après, une autre étoile sortit du *Thien-youen* (γ, δ, ε, ι, ζ, Éridan); elle alla jusqu'au *Thien-che* (ι, ξ, τ, $\varkappa$, Navire) et disparut. Sa lueur éclaira la terre.—9^{e} lune, jour *ping-tseu* (14 octobre), une étoile sortit de *Leou* (α, β, Bélier) et disparut près du groupe *Yun-yu* (δ, $\varkappa$, λ et autres des Poissons). Sa traînée lumineuse se dissipa lentement. Un instant après, une autre étoile sortit du groupe du Grand général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle), s'approcha de *Koeï* (β, ζ, Andromède) et disparut. Sa trace lumineuse se dissipa lentement. Sa lueur éclaira la terre. Une troisième étoile parut au N. O. du pôle N. elle alla rapidement jusqu'au groupe *Neï-kiaï* (τ, π, tête de la grande Ourse) et disparut. Une quatrième étoile sortit de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, Éridan) et disparut dans le groupe du Jardin céleste (ι, $\varkappa$, χ, φ, Éridan). La lueur qu'elle jeta éclaira la terre.

1033. Point d'observations.

1034. Période *King-yeou*, 1re année, 8e lune, jour *ki-mao* (7 octobre), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, δ, Gémeaux); elle alla jusqu'aux étoiles *Tse* (α, β, γ, δ, Lièvre) et disparut. Sa trace lumineuse fut longtemps à se dissiper. La lueur de ce météore éclaira la terre. — Jour *y-yeou* (13 octobre), une étoile sortit du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle alla rapidement au N. O. entra dans le côté S. E. du *Tse-weï* (queue du Dragon) et disparut. Une autre étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla rapidement au N. O. jusqu'au *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse et environnantes), et disparut. Sa queue se brisa en étincelles et une vive lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *ting-haï* (15 octobre), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne); elle était grande comme Vénus. Sa couleur était bleue; elle avait une queue; elle disparut dans le groupe *Oeï* (α, Verseau). Longtemps après, une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; θ, β, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut dans le *Thien-kiun* (α, γ, μ, δ, Baleine). — Jour *ki-tcheou* (17 octobre), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, δ, γ, ζ, Gémeaux); elle était grande comme la planète Vénus; sa couleur était jaune rougeâtre, et elle avait une queue. Elle alla rapidement à l'E. atteignit le groupe *Lieou* (δ, ε, σ, Hydre) et disparut; sa lueur éclaira la terre. Ensuite une autre étoile sortit du groupe *Leou* (α, β, Bélier), alla au groupe *Koeï* (β, ζ, Andromède) et disparut; sa lueur éclaira la terre. — Au jour *y-mao* (12 novembre), une étoile parut auprès de la grande étoile du groupe *Hien-youen* (Régulus): elle était grosse comme Vénus; elle était rouge jaunâtre; elle se dirigea rapidement à l'E. et entra dans les vapeurs. Sa lueur éclaira la terre.

1035. Même période, 2e année, 8e lune, jour *keng-chin* (13 septembre), une étoile sortit du groupe *Ta-ling* (τ, $\varkappa$, θ, Persée); elle était grande comme la planète Vénus; sa couleur était jaune rougeâtre; elle alla lentement au S. E. et disparut dans *Mao* (les Pléiades); sa trace fut longtemps à se dissiper. — 9e lune, jour *ping-ou* (29 octobre), avant que les étoiles fixes fussent vues,

une étoile sortit de l'astérisme *Siu-niu* (ε. Verseau); elle allait lentement, s'approcha du *Nan-teou* (φ, σ, τ, μ, Sagittaire) et disparut. — 11e lune, jour *sin-tcheou* (23 octobre), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre, θ, β, ι, Cocher; β, Taureau); elle alla jusqu'à *Tse* (λ et tête Orion) et disparut. Une vive lueur éclaira la terre.

1037. 4e année, 4e lune intercalaire, jour *koueï-oueï* (28 mai), avant qu'on eût dressé l'horloge de nuit, une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne); elle était grosse comme une tasse; elle alla au N. E. et entra dans des vapeurs. — Jour *ki-haï* (13 juin), une étoile sortit du *Chang-taï* (κ, ι, grande Ourse); elle alla jusqu'au *Hien-youen* (α, γ, ζ, Lion). — 5e lune, jour *sin-haï* (25 juin), une étoile sortit du *Hoa-kaï* (groupe d'étoiles de la Girafe); elle alla vers le pôle N. et disparut. — 6e lune, jour *jin-chin* (16 juillet), une étoile parut au groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme la planète Vénus; sa couleur était blanc bleuâtre; elle alla rapidement au S. E. vers *Leou* (β, α, Bélier) et disparut. Sa traînée lumineuse éclaira la terre. — Jour *ki-mao* (23 juillet), une étoile sortit du *Keng-ho* (δ, μ et γ, Bouvier) et disparut dans l'astérisme *Kang* (κ, ι, Vierge). — 7e lune, jour *wou-chin* (21 août), on vit des centaines d'étoiles toutes filant au S. O. parmi elles on vit une étoile beaucoup plus grande qui se dirigea vers le *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut. Sa lumière éclaira la terre et fut longtemps à se dissiper. — 9e lune, jour *keng-tseu* (12 octobre), une étoile parut au Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle alla rapidement au S. E. s'approcha de l'étoile *Lang* (Sirius) et disparut; elle était de couleur blanc bleuâtre, avait une queue et était grosse comme Vénus. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-yeou* (21 octobre), une étoile sortit du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle était grosse comme Vénus et sa couleur blanc bleuâtre. Elle alla au S. O. dans les vapeurs. — Jour *ting-mao* (8 novembre), une étoile sortit du *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon) et disparut au Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite d'Hercule); elle avait une trace lumineuse; sa lueur éclaira la terre.

1038. Période *Pao-youen*, 1re année, 1re lune, jour *wou-su* (7 février), une étoile sortit du *Che-ti* de droite (η, τ, ν, Bouvier); elle était grande comme Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle alla vers le bord occidental du Marché céleste (enceinte d'étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Hercule) et disparut. Sa lueur éclaira la terre. — 2e lune, jour *kia-ou* (4 avril), une étoile parut dans le Tambour du fleuve (α, β, γ, Aigle), alla jusqu'aux Sept illustres (ν, Bouvier; φ, λ, τ, Hercule) et disparut. — 3e lune, jour *sin-tcheou* (11 avril), une étoile parut dans le *Toung-tsing* (μ, δ, γ, Gémeaux) et disparut près de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion). — Jour *keng-su* (20 avril), une étoile sortit de *Ta-kio* (Arcturus), s'avança vers *Ti* (α, β, Balance) et disparut. — Jour *sin-haï* (21 avril), une étoile sortit du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse), elle était grosse comme Vénus; sa couleur était blanc bleuâtre; elle avait une trace lumineuse; elle alla rapidement au N. E. et entra dans les vapeurs. Sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *jin-chin* (12 mai), une étoile sortit du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; sa couleur était bleu blanchâtre; elle avait une queue; elle se dirigea vivement au N. et entra dans des vapeurs; sa lueur éclaira la terre. Une autre étoile sortit du *Tien-kiang* (θ, A, B, Ophiucus); elle était grande comme Vénus et avait une trace lumineuse; elle alla vivement au S. O. jusqu'à *Fang* (β, π, Scorpion) et disparut. — 8e lune, jour *jin-chin* (9 septembre), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, δ, γ, Gémeaux); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. et disparut dans le *Hing-koueï* (θ, δ, γ, Cancer). Sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *jin-ou* (18 novembre), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne), alla jusqu'au *Ing-tchi* (α, β, Pégase) et disparut. — Jour *ki-tcheou* (25 novembre), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, δ, γ, Gémeaux): elle était grande comme Vénus, de couleur rouge jaunâtre, avec une queue lumineuse; elle alla auprès de l'étoile *Lang* (Sirius) et disparut; sa lueur éclaira la terre. — 11e lune, jour *koueï-tcheou* (19 décembre), une étoile sortit du

Tchoung-taï (λ, μ, grande Ourse); elle alla vers le groupe *Hien-youen* (α, γ, ζ, Lion) et disparut.

1039. Même période, 2e année, 1re lune, jour *keng-chin* (24 février), une étoile sortit de l'astérisme *Y* (α, Hydre et Coupe); elle était grande comme Vénus; elle alla vers *Kio* (α, Vierge) et disparut. — 3e lune, jour *koueï-tcheou* (18 avril), une étoile sortit du Drapeau de droite (ε, ζ, Antinoüs); sa couleur était rouge jaunâtre; elle avait une traînée lumineuse; elle se dirigea rapidement au S. et disparut dans les étoiles *Kien* (π, ρ, ξ, Sagittaire). Sa lumière éclaira la terre. — 5e lune, jour *keng-su* (14 juin), une étoile sortit de *Fang* (β, π, ρ, Scorpion); elle alla vers le *Tsi-tso* (étoiles du Loup) et disparut.

1040. Même année, 12e lune intercalaire, jour *kia-yn* (13 février), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grosse comme Vénus; elle eut une trace lumineuse; elle alla rapidement au N. O. jusqu'aux Cinq-Chars (α, Chèvre; β, ι, θ, Cocher; β, Taureau), et disparut; sa lueur éclaira la terre.

1040. Période *Khang-ting*, 1re année, 3e lune, jour *wou-yn* (7 mai), une étoile parut dans le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; sa couleur était bleu blanchâtre; elle alla au N. et entra dans des vapeurs. — 4e lune, jour *ting-ouei* (5 juin), une étoile parut auprès du *Chang-weï* (κ, Céphée) de l'enceinte orientale du *Tse-koung;* elle alla jusqu'au pôle N. et disparut. — Même lune, jour *koueï-tcheou* (11 juin) (suivant le texte de Matouan-lin 3e lune), une étoile sortit du *Pe-teou* (le chariot de la grande Ourse); elle alla au N. et entra dans des vapeurs; sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *keng-su* (7 août), une étoile parut au N. O. du *Thien-pien* (λ, *h*, *g*, Antinoüs; écu de Sobieski) et entra dans des vapeurs; sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *wou-yn* (3 novembre), une étoile sortit du Navire céleste (α, δ, γ, Persée); elle alla à l'E. entra dans le groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; θ, ι, β, Cocher; β, Taureau) et disparut. — 10e lune, jour *jin-tchin* (17 novembre), une étoile sortit du

Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle alla rapidement vers le bord occidental de l'enceinte *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon) et disparut. — Jour *jin-su* (17 décembre), une étoile grande comme une tasse parut au zénith; elle était rouge-jaune; elle avait une queue; elle alla rapidement au S. O. et disparut dans des vapeurs. Sa lueur éclaira la terre. Longtemps après, on entendit un bruit semblable à celui du tonnerre. — 11^{e} lune, jour *y-haï* (30 décembre), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla au N. éclaira la terre de sa lueur et entra dans des vapeurs.

1041. Période *Khing-li*, 1re année, 8^{e} lune, jour *koueï-oueï* (4 septembre), une étoile sortit du Navire céleste (α, δ, μ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. et entra dans des vapeurs. Sa couleur était bleu blanchâtre; elle éclaira la terre. — Jour *ki-haï* (20 septembre), une étoile sortit du *Hi-tchoung* (θ, $\varkappa$, ι, Cygne); elle était grande comme une tasse; sa couleur était bleu blanchâtre; elle alla lentement au S. O. et disparut près du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne). Sa lueur éclaira la terre. — Même lune, jour *sin-tcheou* (22 septembre), une étoile traversa le *Thien-lin* (ε, ρ, π, Bélier, ou ξ, o, 627 Taureau); elle alla lentement au S. E. et entra dans des vapeurs. — Jour *y-sse* (26 septembre), avant que l'horloge de nuit fût dressée, une étoile sortit du *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle alla vers l'E. et entra dans les vapeurs. Sa couleur était bleu blanchâtre. — 9^{e} lune, jour *ki-yeou* (30 septembre), une étoile sortit du groupe *Koeï* (β, ζ, Andromède); elle était grande comme la planète Vénus; sa couleur était jaune rougeâtre; elle avait une queue; elle alla à l'O. et disparut dans le *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède); sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tchin* (7 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Pi* (les Hyades): elle était grande comme Vénus; elle avait une queue lumineuse; elle alla rapidement au N. O. et atteignit le groupe *Wang-lang* (α; β, γ, η, Cassiopée). — Jour *ting-mao* (18 octobre), une étoile sortit du pôle N. elle était grande comme Vénus; elle alla au N.

et entra dans des vapeurs; sa lumière éclaira la terre. — Jour *wou-tchin* (19 octobre), une étoile sortit du *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau, et β Poissons); elle était grande comme Vénus; sa couleur était rouge-jaune, elle avait une queue; elle alla au S. O. et entra dans des vapeurs. Sa lueur éclaira la terre.

1042. Période *Kking-li*, 2e année, 2e lune, jour *keng-tse* (20 mars), une étoile sortit de l'astérisme *Fang* (β, π, Scorpion); elle était grande comme Vénus; elle était jaune rougeâtre; elle avait une queue; elle alla rapidement au S. O. entra dans les vapeurs et disparut. Sa lueur éclaira la terre. — 3e lune, jour *wou-yn* (27 avril), suivant Ma-touan-lin, jour *keng-su* (30 mars), une étoile parut près du *Keou-tchin* (groupe de α à ζ, petite Ourse); elle était grande comme la planète Vénus, de couleur jaune rougeâtre, et avait une traînée lumineuse. Elle alla lentement au N. O. jusqu'au Fléau céleste (β, γ, Dragon), et disparut. Sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *ting-tcheou* (26 avril), une étoile sortit du *Kouan-tso* (Couronne boréale): elle était grande comme une coupe; sa couleur était bleu blanchâtre; elle avait une queue; elle alla lentement au N. E. jusqu'au *Ko-tao* (o, ν, ξ, π, Cassiopée) et disparut. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-chin* (25 mai), une étoile sortit du *Kouan-tso* (Couronne boréale): elle était grande comme la planète Vénus; elle était de couleur rouge jaunâtre; elle alla rapidement au N. O. et disparut près du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse). Sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *jin-yn* (21 juillet), une étoile sortit du Tambour du fleuve (α, β, γ, Aigle), elle était grande comme un gobelet; sa couleur était bleu blanchâtre: elle alla rapidement à l'O. jusqu'au groupe *Khien-nieou* (β, α, Capricorne), et disparut. Sa lumière éclaira la terre. — Jour *ki-yeou* (28 juillet), une étoile sortit de *Siu-niu* (ε, Verseau); elle était grande comme la planète Vénus; elle était de couleur blanc bleuâtre; elle avait une queue; elle alla lentement au S. E. et entra dans des vapeurs. Sa lumière éclaira la terre. — Jour *y-tcheou* (11 août), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme Vénus; sa couleur

était rouge jaunâtre; elle se dirigea rapidement à l'O. jusqu'au groupe *Kouan-tso* (Couronne boréale), et disparut. Sa queue se divisa en étincelles et jeta une vive lueur qui éclaira la terre. — 8e lune, jour *jin-yn* (19 août), une étoile sortit du Manche du *Pe-teou* (ε, ζ, η, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle était bleu blanchâtre; elle alla au N. O. et disparut dans des vapeurs. — Même lune, jour *y-haï* (22 août), avant que l'horloge de nuit fût redressée, une étoile sortit du groupe *Ki* (γ et autres, Sagittaire), alla au S. et entra dans les vapeurs. Une autre étoile sortit du *Thien-thsang* (ι, η, τ, θ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle alla au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. — Jour *jin-ou* (29 août), une étoile sortit de l'astérisme *Oeï* (α, Verseau); elle alla au S. E. atteignit des vapeurs et disparut. — 9e lune, jour *sin-haï* (27 septembre), une étoile sortit du Navire céleste (α, δ, μ, Persée); elle était grande comme Vénus, alla à l'E. et entra dans les vapeurs; sa couleur était bleu blanchâtre; elle avait une queue. — Jour *keng-chin* (6 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier); elle alla jusqu'au *Toung-pi* (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut. — Jour *y-tcheou* (11 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier); elle alla jusqu'au *Thien-thsang* (ι, η, θ, Baleine) et disparut. — Jour *ting-mao* (13 octobre), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle coula au N. E. et disparut près du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse). — 9e lune intercalaire, jour *sin-oueï* (17 octobre), une étoile sortit du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre; elle alla au S. O. et entra dans des vapeurs. — Jour *y-haï* (21 octobre), une étoile sortit de *Leou* (α, β, Bélier); elle alla à l'O. et entra dans des vapeurs.

1043. Même année, 12e lune, jour *keng-chin* (3 février), une étoile sortit du groupe Arc et Flèche (η, δ, ε, grand Chien); elle alla au midi et entra dans les vapeurs; sa couleur était jaune rougeâtre; elle avait une queue dont la lueur éclaira la terre.

1043. 3e année, 2e lune, jour *jin-yn* (17 mars), une étoile sortit du *Chang-taï* (κ, ι, grande Ourse); elle alla jusqu'au *Hien-youen* (α, γ, ζ et autres, Lion) et disparut; elle avait une queue lumineuse; sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *wou-chin* (22 mai), avant que l'horloge de nuit fût redressée, au zénith (milieu du ciel), une étoile sortit de *Ta-kio* (Arcturus); elle était grande comme Vénus; elle alla à l'O. atteignit le groupe *Hien-youen* (α, γ, ζ et autres du Lion) et disparut. — Jour *sin-haï* (25 mai), une étoile sortit du groupe *Niu-tchoang* (η, σ, ou π, ρ, Hercule); elle atteignit le bord occidental du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Hercule) et disparut. — Jour *ping-tchin* (30 mai), une étoile sortit du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle était grosse comme Vénus; elle alla lentement au S. O. entra dans le *Thien-youen* (α, β, Sagittaire) et disparut. — 7e lune, jour *i-sse* (18 juillet), une étoile sortit du *Kouei* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle alla au N. O. et entra dans des vapeurs. — 7e lune, jour *kia-chin* (26 août), une étoile sortit du *Kouan-tso* (Couronne boréale); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au Manche du *Pe-teou* (ε, ζ, η, grande Ourse) et disparut. — Jour *kia-yn* (25 septembre), une étoile sortit du *Ko-tao* (ε, ν, ξ, π, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. et entra dans des vapeurs; elle avait une queue. Sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *wou-chin* (18 novembre), une étoile sortit de *Lieou* (δ, Hydre; ρ, ε, ζ) : elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. atteignit le groupe *Hou-chi* (η, δ, ε, grand Chien). Sa trace lumineuse fut longtemps à se dissiper.

1044. Sans observations.

1045. 5e année, 5e lune, jour *sin-sse* (13 juin), une étoile parut auprès du *Keou-tchin* du *Tse-koung* (α, ζ, petite Ourse et voisines); elle alla au N. et entra dans les vapeurs. — 6e lune, jour *sin-yeou* (23 juillet), une étoile sortit du groupe *Koei* (ζ, β, Andromède) : elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'O. atteignit le *Thien-thsang* (υ, η, θ, τ, Baleine) et disparut; elle

avait une queue. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-su* (24 juillet), une étoile sortit du groupe *Ing-tchi* (α, β, Pégase) : elle était grande comme Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre; elle alla rapidement au S. E. dépassa l'astérisme *Oeï* (α, Verseau), atteignit l'astérisme *Hiu* (β, Verseau) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *kia-ou* (25 août), une étoile sortit des étoiles *Kien* (ξ, π, ρ, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle se dirigea rapidement au midi, atteignit les vapeurs et disparut. — Jour *y-sse* (5 septembre), une étoile sortit du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle était grosse comme Vénus; elle alla au S. atteignit les vapeurs et disparut. — 8e lune, jour *kia-yn* (14 septembre), une étoile sortit du groupe *Pa-ko* (δ, ε, Cassiopée), alla au N. E. et entra dans des vapeurs. Un peu après, une étoile sortit du Camp du Général céleste (γ, Andromède et environnantes, avec les étoiles du Triangle); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. atteignit le groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et disparut. Elle avait une queue; sa couleur était rouge jaunâtre. — Jour *ki-mao* (9 octobre), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grande comme un gobelet; elle alla promptement au N. et entra dans des vapeurs; elle eut une queue lumineuse et éclaira la terre. — Jour *jin-ou* (11 octobre), une étoile sortit du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux), alla jusqu'à *Lieou* (δ, Hydre) et disparut. — 10e lune, jour *kia-yn* (13 novembre), une étoile sortit du groupe *Pi* (les Hyades); elle alla rapidement au S. E. jusqu'au *Thien-youen* (Ménagerie céleste; γ, δ, ε, ζ, η, Éridan), et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle avait une queue. — Jour *ping-tchin* (15 novembre), une étoile sortit du groupe *Tchang* (υ, Hydre) : elle alla rapidement au S. E. atteignit les vapeurs et disparut. — Jour *ping-yn* (25 novembre), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. E. jusqu'au groupe *Oeï* (α, Verseau), et disparut. Sa couleur était rouge jaunâtre; elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre.

1046. 6e année, 3e lune, jour *y-oueï* (23 avril), une étoile sortit de *Ta-kio* (Arcturus); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. atteignit les vapeurs et disparut. — Jour *Keng-su* (8 mai), une étoile sortit du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. et entra dans des vapeurs; sa couleur était bleu blanchâtre; elle avait une queue. Sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *ting-sse* (14 juillet), une étoile sortit du groupe *Yng-tchi* (α, β, Capricorne); elle était grande comme une tasse. Sa lueur éclaira la terre. On entendit du bruit. Elle alla au N. jusqu'au groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée), et disparut. — 7e lune, jour *koueï-sse* (19 août), une étoile sortit de *Mao* (les Pléiades), alla jusqu'à *Tsan* (quadrilatère et baudrier d'Orion) et disparut. — 9e lune, jour *sin-sse* (6 octobre), une étoile sortit du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. et entra dans des vapeurs. — Jour *y-sse* (30 octobre), une étoile sortit du Fleuve austral (α, β, petit Chien); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. et disparut près du *Hing-koueï* (θ, γ, δ, Cancer).

1047. 7e année, 4e lune, jour *ki-yeou* (2 mai), une étoile sortit du *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle alla rapidement au N. E. et entra dans des vapeurs. — Jour *wou-tchin* (21 mai), une étoile sortit du *Lang-weï* (Chevelure de Bérénice); elle était grande comme Vénus; elle alla vers le groupe *Keng-ho* (ρ, μ, δ, Bouvier) et disparut. Elle eut une queue et éclaira la terre. — 6e lune, jour *ki-sse* (21 juillet), une étoile sortit du Champ céleste (σ, τ, Vierge); sa couleur était jaune rougeâtre; elle avait une queue; elle se dirigea lentement au S. O. jusqu'au *Tche-weï* (petites étoiles entre π, Hydre, et γ, Scorpion), et disparut. — Jour *wou-tchin* (18 septembre), une étoile sortit du groupe *Oueï* (ζ, μ, η et autres, queue du Scorpion); elle alla rapidement au S. O. et entra dans des vapeurs. — 9e lune, jour *y-haï* (25 septembre), une étoile sortit du Tambour du fleuve (α, β, γ, Aigle), entra dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Hercule), at-

teignit le groupe *Thsoung-jin* (*n*, *o*, *p*, Taureau de Poniatowski) et disparut. — Jour *wou-yn* (28 septembre), une étoile sortit de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan); elle était grande comme Vénus; elle alla au midi, atteignit le groupe du Jardin céleste (ι, $\varkappa$, χ, φ, Éridan) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-tchin* (30 septembre), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, δ, γ, Gémeaux) et disparut auprès de *Lang* (Sirius). — Jour *ping-su* (6 octobre), une étoile sortit de *Pe-lo-che-men* (Fomalhaut); elle alla lentement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut.

1048. 11 janvier, même année chinoise, 12e lune, jour *koueï-haï*, une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Taureau; β, θ, ι, Cocher); sa couleur était rouge jaunâtre; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au Navire céleste (α, γ, δ, η, Persée), et disparut.

1048. 8e année, 1re lune, jour *y-yeou* (2 février), une étoile parut près du *Thien-tse* (α, β, γ, δ, Lièvre); elle alla rapidement au S. O. et entra dans des vapeurs; elle avait une queue, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-yeou* (14 février), une étoile sortit de *Lieou* (δ, ρ, ε, Hydre); elle alla rapidement droit au midi et entra dans des vapeurs. — 2e lune, jour *y-yeou* (2 avril), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); sa couleur était bleu blanchâtre; elle alla rapidement au N. E. atteignit des vapeurs et disparut. — 4e lune, jour *ki-sse* (16 mai), une étoile sortit du groupe *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. atteignit *Leou* (δ, Hydre, ρ, ε) et disparut. — 5e lune, jour *jin-yn* (18 juin), une étoile sortit du groupe *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. — Jour *wou-ou* (4 juillet), une étoile sortit du groupe *Fang* (β, π, Scorpion); sa couleur était jaune rougâtre; elle se dirigea au S. E. et entra dans des vapeurs. — 6e lune, jour *wou-yn* (24 juillet), une étoile sortit de *Pe-lo-che-men* (Fomalhaut); elle alla rapidement au S. O. et entra dans des vapeurs. — Jour

ki-mao (25 juillet), une étoile sortit du *Pe-teou* (les sept principales de la grande Ourse); elle alla jusqu'au *Lang-weï* (Chevelure de Bérénice) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-ssc* (8 août), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle alla vers le bord occidental du *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon) et disparut. — 7^{e} lune, jour *keng-chin* (4 septembre), une étoile sortit du groupe des Sept illustres (α, ψ, δ, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. entra dans des vapeurs et disparut. — 8^{e} lune, jour *y-haï* (19 septembre), une étoile sortit du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus). Cette même nuit, une étoile sortit du *Toung-pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle était rouge jaunâtre; elle alla rapidement au N. E. entra dans des vapeurs et disparut. — 9^{e} lune, jour *jin-yn* (16 octobre), une étoile sortit du *Thien-thsang* (ι, η, θ, τ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à l'astérisme *Oeï*, l'estomac (α, β, γ, de la Mouche), et disparut. — Jour *kia-tseu* (7 novembre), une étoile sortit de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan); elle alla rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. — 10^{e} lune, jour *y-yeou* (28 novembre), une étoile sortit du groupe *Pao-koua* (α, β, γ, δ, Dauphin); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'E. entra dans le Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne) et disparut.

1049. 7 janvier, même année chinoise, 12^{e} lune, jour *y-tcheou*, une étoile sortit du Fleuve austral (α, β, petit Chien); elle était grande comme Vénus; elle alla au S. E. atteignit le groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien) et disparut. — Jour *ki-tcheou* (1er février), une étoile sortit de l'enceinte du Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Hercule); elle alla au S. E. entra dans des vapeurs et disparut.

1049. Période *Hoang-yeou*, 1re année, 3^{e} lune, jour *keng-tseu* (12 avril), une étoile sortit du groupe *Tchin* (γ, α, β, Corbeau); elle alla rapidement au S. O. et disparut dans le groupe *Y* (α, Hydre et Coupe). — 4^{e} lune, jour *sin-sse* (23 mai), une étoile

sortit de la Fileuse (α, Lyre et deux petites voisines); elle se dirigea rapidement au midi, entra dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent), atteignit le groupe *Thsoung-jin* (n, p, q, o, Taureau de Poniatowski, à l'E. de β, γ, Ophiucus) et disparut. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-chin* (26 mai), une étoile sortit du groupe *Sin* (α, σ, τ, Scorpion); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. et entra dans des vapeurs. — 6^{e} lune, jour *ping-yn* (7 juillet), une étoile parut près du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et voisines) du *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon); elle était grande comme Vénus; elle alla au N. et entra dans des vapeurs. — Jour *ki-sse* (10 juillet), une étoile sortit du groupe de la grosse Courge (α, β, γ, δ, Dauphin); sa couleur était rouge jaunâtre; elle avait une queue; elle marcha rapidement vers le S. jusqu'aux étoiles *Kien* (ξ, π, ρ, Sagittaire) et disparut. — Jour *ting-tcheou* (18 juillet), une étoile sortit du groupe *Tsao-fou* (δ, ε, ζ, Céphée); elle était grande comme Vénus; elle se dirigea rapidement au S. O. atteignit le Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite d'Hercule) et disparut; elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — 9^{e} lune, jour *jin-tseu* (21 octobre), une étoile sortit du *Ko-tao* (ν, o, ξ, π, Cassiopée); elle alla rapidement au S. E. jusqu'au groupe *Leou* (α, β, Bélier), et disparut; elle avait une queue, et sa lueur éclaira la terre. — 11^{e} lune, jour *kouei-sse* (1er décembre), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla rapidement à l'E. atteignit les Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau; θ, ι, Cocher) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre.

1050. 2 janvier, même année chinoise, 12^{e} lune, jour *y-tcheou*, une étoile sortit de l'astérisme *Kang* ($\varkappa$, ι, Vierge); elle était de couleur rouge jaunâtre; elle alla lentement au N. E. entra dans le bord occidental du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent) et disparut. — Jour *ting-yeou* (3 février), une étoile sortit du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla rapidement au N. et disparut près du pôle N.

1050. Même période, 2e année, 4e lune, jour *koueï-ouei* (20 mai), une étoile sortit du groupe *Ti* (α, β, Balance); elle était rouge jaunâtre; elle alla rapidement au S. E. jusqu'au groupe *sin* (α, σ, τ, Scorpion) et disparut. — 5e lune, jour *ki-sse* (5 juillet), une étoile sortit du *Kouan-tso* (Couronne boréale); elle alla rapidement à l'E. jusqu'au groupe *Niu-tchoang* (η, σ, ou π, ρ, Hercule), et disparut. — 7e lune, jour *ki-tcheou* (23 septembre), une étoile sortit du groupe *Koeï* (ζ, β, Andromède). Elle était rouge jaunâtre; elle alla lentement au S. O. et disparut près du *Ing-tchi* (α, β, Pégase). — 9e lune, jour *sin-mao* (24 novembre), une étoile sortit de la Fileuse (α, Lyre et deux petites voisines); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut.

1051. 8 février, même année chinoise, 12e lune, jour *ting-ouei*, une étoile sortit du groupe *Kou-leou* (η, $\varkappa$, ι, Centaure); elle était grande comme Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre; elle atteignit le groupe *Y* (α, Hydre et Coupe) et disparut.

1051. 3e année, 7e lune, jour *ping-tchin* (16 août), une étoile sortit du *Nan-teou* (φ, σ, ζ, Sagittaire); sa couleur était rouge jaunâtre; sa queue se répandait sur le ciel. Elle alla lentement au S. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. — 8e lune, jour *keng-tchin* (9 septembre), une étoile sortit de *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. et disparut dans des vapeurs. — 9e lune, jour *koueï-tcheou* (12 octobre), une étoile sortit du *Chang-taï* ($\varkappa$, ι, grande Ourse), alla au N. E. et entra dans des vapeurs. — 10e lune, jour *y-sse* (3 décembre), une étoile sortit du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. et entra dans des vapeurs.

1052. 4e année, 3e lune, jour *keng-chin* (16 avril), une étoile sortit du *Lang-tsiang* (Cœur de Charles II, ou *p*, Chevelure de Bérénice), alla à l'E. jusqu'au *Kouan-tso* (Couronne boréale) et disparut. — Jour *jin-chin* (28 avril), une étoile sortit du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut près des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Co-

cher; β, Taureau; θ, ι, Cocher). — 4^{e} lune, jour *sin-sse* (7 mai), une étoile parut près du *Chi-leou* (ν, Serpent, et μ, Ophiucus) du Marché céleste; elle alla jusqu'au *Nan-teou* (φ, σ, τ, Sagittaire) et disparut. — Jour *kouei-mao* (29 mai), une étoile sortit du *Toung-pi* (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut près du Navire céleste (α, δ, μ, γ, Persée). — 6^{e} lune, jour *keng-tseu* (25 juillet), une étoile sortit de l'astérisme *Oeï* (α, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. et entra dans des vapeurs. — Jour *jin-yn* (27 juillet), une étoile sortit du Navire céleste (α, γ, δ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle alla au N. E. et entra dans des vapeurs. — 8^{e} lune, jour *ting-yeou* (20 septembre), une étoile sortit du *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. — Jour *wou-su* (21 septembre), une étoile sortit du Drapeau de *Tsan* (petites étoiles de la peau de Lion, Orion); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan) et disparut. — 9^{e} lune, jour *ping-ou* (29 septembre), une étoile parut dans *Leou* (α, β, Bélier); elle alla rapidement au S. O. et entra dans des vapeurs. — Même lune, jour *wou-chin* (1er octobre), une étoile sortit du pôle N. dans l'enceinte bleue (le cercle de la queue du Dragon). Sa couleur était rouge jaunâtre; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Kouan-tso* (Couronne boréale) et s'éteignit; sa queue se répandit sur le ciel; sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-yeou* (2 octobre), une étoile parut dans le groupe *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. et entra dans des vapeurs. Cette même nuit, une étoile parut dans *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. et entra dans des vapeurs. Sa trace lumineuse était rouge jaunâtre. — Jour *kia-tseu* (17 octobre), une étoile parut dans le Fleuve austral; elle était semblable à Vénus; elle alla au N. E. et entra dans des vapeurs. — 10^{e} lune, jour *ting-tcheou* (30 octobre), une étoile parut dans le Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite Hercule); elle

alla rapidement au N. O. et entra dans des vapeurs. Elle avait une queue; sa lumière éclaira la terre. — Jour *ping-chin* (18 novembre), une étoile sortit du *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine); elle était comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. et entra dans des vapeurs. — 11e lune, jour *ping-tchin* (8 décembre), une étoile sortit du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut près des étoiles *Siouen-ki* du *Pe-teou* (β, γ, grande Ourse).

1053. 5e année, 1re lune, jour *jin-yn* (24 janvier), avant que l'horloge de nuit fût dressée, une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. atteignit des vapeurs et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *keng-su* (31 mai), une étoile parut près du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle alla rapidement au N. O. atteignit le *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse) et disparut. Elle était de couleur bleu blanchâtre; elle avait une queue lumineuse. — 6e lune, jour *koueï-yeou* (23 juin), une étoile parut auprès du pôle N. elle était de couleur rouge jaunâtre; elle alla au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. — 7e lune, jour *koueï-mao* (23 juillet), une étoile sortit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée), alla jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne) et disparut. — Jour *kia-tchin* (24 juillet), une étoile parut dans *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle était comme Vénus); elle alla rapidement et disparut dans *Oeï* (α, Verseau). Cette même nuit, une étoile parut auprès du pôle N. elle était de couleur rouge jaunâtre; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à l'E. du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Hercule) et disparut. Elle eut une queue; sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-mao* (4 août), une étoile parut dans le groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle alla rapidement jusqu'au *Ing-tchi* (α, β, Pégase) et disparut. — Jour *wou-ou* (7 août), une étoile parut dans le *Kouan-tso* (Couronne boréale); elle alla rapidement au S. O. entra dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus), atteignit les étoiles *Hoan-tche* (e, i, Ophiucus) et disparut. — 8e lune, jour *ping-su* (4 sep-

tembre), une étoile parut près du pôle N. elle alla vers *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et disparut. Cette nuit, une autre étoile sortit de *Oeï* (α, Verseau) et disparut près de *Siu-niu* (ε, Verseau). — Jour *koueï-haï* (11 octobre), une étoile sortit du groupe *Ta-ling* (θ, $\varkappa$, ρ, Persée), atteignit *Yng-tchi* (α, β, Pégase) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *y-haï* (23 octobre), une étoile sortit de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était grande comme la planète Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à *Mao* (les Pléiades) et disparut. Elle avait une queue et sa lueur éclaira la terre.

1054. Période *Tchi-ho*, 1re année, 7e lune, jour *jin-su* (6 août), une étoile sortit du groupe *Wan-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); sa couleur était rouge jaunâtre; elle alla rapidement vers le N. jusqu'au Navire céleste (α, γ, δ, Persée) et disparut. Elle avait une queue; sa lumière éclaira la terre. — 8e lune, jour *jin-yn* (15 septembre), une étoile sortit du *Chang-taï* ($\varkappa$, ι, grande Ourse); elle alla au N. E. et entra dans des vapeurs.

1055. 2e année, 7e lune, jour *kia-chin* (23 août), une étoile sortit du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle était comme Vénus; sa couleur était rouge jaune; elle alla au S. entra dans des vapeurs. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *ki-mao* (17 octobre), une étoile parut dans le groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien); elle était comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. atteignit le *Tchang-jin* (α, ε, Colombe) et disparut. Sa queue était bleu blanchâtre. Une autre étoile sortit du groupe *Hien-youen* (α, γ, η, et autres du Lion); elle se dirigea rapidement au N. alla jusqu'au *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse) et disparut. — Jour *keng-tchin* (18 octobre), une étoile parut dans le *Thien-lin* (ε, π, ρ, Bélier); elle alla lentement au S. E. jusqu'à la Ménagerie céleste (Éridan) et disparut. — 11e lune, jour *wou-tchin* (5 décembre), une étoile sortit du Fleuve austral (α, β, petit Chien); elle alla au midi, atteignit le groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien) et disparut. — Jour *sin-yeou* (10 décembre), une étoile sortit du groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien);

sa couleur était rouge-jaune. Elle alla au midi et entra dans des vapeurs. — 12e lune, jour *kia-chin* (21 décembre), une étoile sortit de l'enceinte orientale du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles de la Vierge et du Lion autour de β, Lion); elle était comme Vénus; sa couleur était rouge-jaune. Elle alla rapidement au S. E. jusqu'à *Tchin* (γ, α, β, Corbeau) et disparut. — Jour *sin-mao* (28 décembre), une étoile sortit du groupe *Licou* (δ, Hydre, ρ, σ), elle était comme Vénus; sa couleur était rouge-jaune. Elle alla promptement droit au N. et entra dans des vapeurs.

1056. Période *Kia-yeou*, 1re année, 3e lune, jour *sin-yeou* (27 mars), une étoile sortit du *Kou-leou* (η, ι, $\varkappa$, Centaure) et disparut dans *Oueï* (μ et autres, queue du Scorpion). — Jour *y-haï* (10 avril), une étoile parut à l'E. du pôle nord; elle était comme Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle alla rapidement au S. O. atteignit le *Che-ti* de droite (η, τ, υ, Bouvier) et disparut. — Jour *jin-ou* (17 avril), une étoile parut dans *Tchang* (υ, φ, μ, Hydre); elle atteignit le *Ngeou* oriental (étoiles de la Machine pneumatique) et disparut. — 9e lune, jour *jin-ou* (14 octobre; ou, suivant Ma-touan-lin, troisième lune, jour *jin-su*, 28 mars), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était comme Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle se dirigea rapidement au N. atteignit le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut.

1057. 2e année, 1re lune, jour *ting-yeou* (26 février), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était comme Vénus; elle alla rapidement vers le pôle N. et disparut. — Jour *sin-tcheou* (2 mars), une étoile sortit du groupe *Hoa-kaï* (petites étoiles de la Girafe); elle alla lentement vers le pôle nord et disparut. — Jour *kia-tchin* (5 mars), une étoile sortit du *Tse* (λ et tête d'Orion) et alla lentement vers *Pi* (les Hyades), où elle disparut. — 2e lune, jour *kia-tseu* (25 mars), une étoile parut dans l'enceinte orientale du *Tse-koung* (partie orientale de la queue du Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au N. E. et entra dans des vapeurs. — 7e lune, jour *y-haï*

(3 août), une étoile parut à l'O. du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. et entra dans des vapeurs. — Jour *ting-tcheou* (5 août), une étoile sortit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme la planète Vénus; sa couleur était jaune rougeâtre. Elle alla lentement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Kang* (κ, ι, Vierge) et disparut. Elle avait une queue, et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *ping-tse* (3 octobre), une étoile parut dans le groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était comme Vénus; sa couleur était rouge-jaune. Elle alla rapidement à l'O. jusqu'au Serpent debout (γ, Andromède et autres du Triangle) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-haï* (4 octobre), une étoile parut au Fleuve austral (α, β, petit Chien), auprès de l'étoile *tseu* (β). — Jour *wou-yn* (5 octobre), l'horloge de jour étant dressée, on vit, au milieu du ciel, une étoile sortir de *Lang* (Sirius); elle était grande comme un gobelet; elle alla rapidement au S. E. atteignit des vapeurs et disparut. Sa queue était bleu blanchâtre.

1058. 3e année, 1re lune, jour *y-oueï* (18 février), une étoile parut dans *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); sa couleur était rouge-jaune; elle alla rapidement à l'O. jusqu'au *Thien-lin* (ε, φ, π, Bélier), et disparut. — 5e lune, jour *kia-ou* (18 juin), une étoile parut dans le Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était comme Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle alla lentement au N. E. jusqu'à l'astérisme *Hiu* (β, Verseau), et disparut. — 7e lune, jour *sin-oueï* (25 juillet), une étoile sortit du Navire céleste (α, μ, δ, Persée); elle alla au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. — Jour *y-yeou* (8 août), une étoile parut dans le Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle était semblable à la planète Vénus; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle alla lentement au S. E. se divisa en plusieurs étoiles, arriva à *Lang* (Sirius) et disparut. Sa queue se condensa en un point du ciel. — Jour *ting-yeou* (20 août), une étoile parut dans le groupe *Oeï* (α, Verseau); elle alla rapidement au S. O. et entra dans des va-

peurs. Cette même lune, une autre étoile parut dans la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan); elle alla lentement dans des vapeurs. — 8e lune, jour *ping-ou* (29 août), une étoile sortit du *Thien-kang* (β, Poisson austral); elle alla rapidement au S. E. et entra dans des vapeurs. Sa queue était rouge-jaune. — Jour *wou-chin* (31 août), une étoile parut dans le groupe *Oeï* (α, Verseau); elle alla rapidement au S. O. et entra dans des vapeurs. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-oueï* (11 septembre), une étoile parut dans *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle alla rapidement à l'O. et disparut au N. du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne). — Jour *koueï-hai* (15 septembre), une étoile sortit du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle se dirigea rapidement vers le S. atteignit le Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne) et disparut. A la fin de l'horloge de nuit, une étoile parut à *Leou* (δ, Hydre); elle était comme Vénus; sa couleur était rouge-jaune. Elle alla au N. O. jusqu'au *Pe-teou* (les sept principales grande Ourse) et disparut. — Jour *y-tcheou* (17 septembre), une étoile sortit du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla rapidement à l'O. atteignit le pôle et disparut. — 9e lune, jour *keng-ou* (22 septembre), une étoile parut dans *Leou* (α, β, Bélier); elle se dirigea promptement au S. jusqu'à l'étoile *Tou-ssc-kioung* (o, Baleine) et disparut. — Jour *kia-chin* (6 octobre), une étoile sortit du Camp du Général céleste (β, Andromède et environnantes); elle était comme la planète Vénus; sa couleur était jaune rougeâtre. Elle alla rapidement au N. E. jusqu'au Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-mao* (13 octobre), une étoile parut dans le groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle alla au N. jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut.

1059. 4e année, 2e lune, jour *ki-haï* (19 avril), une étoile parut dans le groupe *Y* (α, Hydre et Coupe) et entra dans des vapeurs. L'horloge de nuit étant à sa fin, une autre étoile sortit du *Ing-tchi* (α, β, Pégase) et disparut dans le *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes). — (3e lune), jour *koueï-mao* (23 avril),

une étoile sortit du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier), alla jusqu'au *Lang-tsiang* (Cœur de Charles II ou *p*, chevelure de Bérénice) et disparut. — Jour *y-mao* (5 mai), une étoile parut dans *Kio* (α, ζ, Vierge), alla à l'O. jusqu'au groupe *Y* (α, Hydre et Coupe) et disparut. — 5e lune, jour *sin-tcheou* (20 juin), une étoile sortit du *Che-ti* de droite (η, τ, ν, Bouvier) et alla à l'O. dans des vapeurs. — Jour *ki-yeou* (28 juin), une étoile sortit de *Ta-kio* (Arcturus), alla jusqu'à *Tchin* (γ, α, β, Corbeau) et disparut. — Jour *koueï-tcheou* (2 juillet), une étoile sortit du groupe *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme une tasse; sa couleur était jaune rougeâtre. Elle alla rapidement au S. O. jusqu'au groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau et étoiles des Poissons) et disparut. Elle brûlait avec bruit comme un feu ardent. — 6e lune, jour *koueï-haï* (12 juillet), une étoile parut dans le *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine), alla jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan) et disparut. Elle avait une queue; sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-tseu* (13 juillet), une étoile parut dans le Gué céleste (α, γ, δ, Cygne), atteignit le pôle nord et disparut. — Jour *sin-oueï* (20 juillet), une étoile sortit du groupe *Oeï* (la Mouche) et se perdit dans le *Keou-tchin* (étoiles au-dessus de β, Scorpion). Une autre étoile sortit du Navire céleste (α, γ, δ, Persée), alla jusqu'au groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et disparut. — Jour *y-haï* (24 juillet), une étoile sortit du *Fen-mo* (η, ζ, γ, Verseau), atteignit *Pe-lo-che-men* (Fomalhaut) et disparut. Une autre étoile sortit du Navire céleste (α, μ, δ, Persée), alla rapidement au S. E. et disparut dans *Mao* (les Pléiades). — Jour *koueï-oueï* (1er août), une étoile sortit de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance); elle alla au S. O. dans des vapeurs. — Jour *ki-tcheou* (7 août), une étoile sortit de *Pi* (les Hyades) et alla rapidement vers les Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau), où elle disparut. — 8e lune, jour *y-haï* (22 septembre), l'horloge de nuit étant à sa fin[1], une étoile sortit

[1] Les clepsydres dont se servent les Chinois se vident en 12 de nos heures, ou 6 heures chinoises; on les remplit le matin et le soir, et on distingue ainsi l'horloge de jour, l'horloge de nuit.

du groupe *Koueï* (θ, γ, δ, Cancer), alla rapidement vers les Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau) et disparut. Une autre étoile parut dans le groupe *Koueï* (θ, γ, δ, Cancer); elle alla rapidement jusqu'au N. du *Thaï-weï* (enceinte des étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion) et disparut. — Jour *koueï-oueï* (30 septembre), une étoile sortit du *Kiun-chi* (ν, ζ, grand Chien); elle alla rapidement au groupe Arc et Flèche (η, $\varkappa$, δ, ζ, grand Chien) et disparut. — Jour *ki-tchcou* (6 octobre), une étoile sortit du Trésor céleste (α, β, γ, tête de la Baleine); elle alla jusqu'au *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine) et disparut. — 9^{e} lune, jour *ki-haï* (16 octobre), une étoile sortit du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse), du *Tse-koung* (cercle de la queue du Dragon); elle était grande comme une écuelle; elle alla rapidement au N. E. Sa queue était longue de 5 degrés, droite en avant, courbe en arrière. Elle fila à l'E. du pôle N. et disparut. Alors sa queue se roula en forme de bassin, puis elle se brisa. — Une autre étoile parut à l'O. du *Thaï-weï* (enceinte des étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion); elle se dirigea rapidement au N. E. et entra dans des vapeurs. — Jour *sin-tcheou* (18 octobre), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle alla rapidement vers la Fileuse (α, Lyre, ε, ζ) et disparut. — Jour *koueï-tcheou* (30 octobre), des étoiles parurent, toutes grandes comme Vénus. Leur couleur était rouge-jaune. Elles avaient des queues et éclairèrent la terre. La première sortit du Fleuve céleste (β, γ, Dragon), alla rapidement au S. O. jusqu'à l'étoile *Heou* (α, Ophiucus), de l'enceinte du Marché céleste (étoiles du Serpent), et disparut; la seconde sortit du groupe *Oeï* (α, Verseau), alla rapidement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Niu* (ε, Verseau) et disparut; la troisième sortit de *Pi* (les Hyades), alla au S. et disparut près de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan); la quatrième sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau), alla au N. jusqu'au *Keou-tchin* (α, petite Ourse, ζ et environnantes) et disparut. — 10^{e} lune, jour *y-tcheou* (11 novembre), l'horloge de jour étant dressée, une étoile sortit

du camp du Général céleste (γ, Andromède et environnantes, étoile du Triangle); elle alla au S. O. dans des vapeurs et disparut. Sa couleur était bleu blanchâtre; sa queue se répandit dans le ciel et fut longtemps à se dissiper. Cette même nuit, une étoile sortit de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle alla au groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien) et disparut. — Jour *ting-mao* (13 novembre), une étoile sortit de *Siu-niu* (ε, Verseau); elle alla au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. — Jour *wou-tchin* (14 novembre), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux), alla à l'E. jusqu'à *Lieou* (δ, Hydre) et disparut. — Jour *wou-yn* (24 novembre), une étoile sortit de *Lang* (Sirius), alla au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. — Jour *ting-haï* (3 décembre), une étoile sortit du *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine). — Jour *y-oueï* (11 décembre), une étoile sortit du *Chang-taï* (α, ι, grande Ourse), alla rapidement au S. jusqu'au Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut. — 12^{e} lune, jour *Kia-tseu* (9 janvier 1060), une étoile sortit du *Kouan-so* (Couronne boréale), alla jusqu'au *Niu-tchoang* (η, σ, Hercule) et disparut.

1060. 5^{e} année, 1re lune, jour *sin-mao* (5 février), une étoile sortit du groupe *Pi* (les Hyades); elle était grande comme une petite écuelle; sa couleur était jaune rougeâtre. Elle alla rapidement jusqu'au groupe *Thien-thsang* (ν, η, θ, τ, Baleine) et disparut. Sa lumière éclaira la terre : sa queue brillait comme une flamme et se brisa avec un bruit pareil à celui du tonnerre. — 4^{e} lune, jour *sin-oueï* (15 mai), une étoile parut dans le *Ti* (α, β, Balance); elle alla lentement au S. E. et entra dans des vapeurs. — Jour *koueï-yeou* (17 mai), une étoile parut dans *Siu-niu* (ε, Verseau et environnantes); elle alla jusqu'au groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. — Jour *keng-tchin* (24 mai), l'horloge de nuit étant finie, une étoile sortit de *Ta-kio* (Arcturus); elle alla au S. O. jusqu'à ce qu'elle disparût. Sa queue était bleu blanchâtre. — Jour *koueï-oueï* (27 mai), une étoile parut dans le *Niu-tchoang* (η, σ, Hercule); elle alla à l'E. jusqu'au Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle) et disparut. — Jour *y-yeou* (29 mai), une étoile sortit

du *Ki-kouan* (étoiles du Loup); elle alla au S. O. jusqu'à ce qu'elle disparût dans des vapeurs.—Jour *kia-ou* (7 juin), une étoile parut à l'E. du Marché céleste (étoiles du Serpent); elle était comme Vénus. Elle alla à l'E. jusqu'au Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle) et disparut. Sa trace lumineuse était rouge jaunâtre. — Jour *ping-chin* (9 juin), une étoile sortit du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle alla au N. E. jusqu'au Manche du *Pe-teou* (ε, ζ, η, grande Ourse) et disparut. — Jour *sin-haï* (24 juin), une étoile sortit du Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite Hercule); elle alla au S. O. entra dans le Marché céleste, atteignit le groupe *Hoan-tche* ($\varkappa$, e, i, Ophiucus) et disparut. — 6^{e} lune, jour *ki-oueï* (2 juillet), une étoile sortit de l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier); elle alla au N. E. jusqu'à ce qu'elle disparût dans des vapeurs. — Jour *jin-su* (5 juillet), une étoile sortit du *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine); elle alla au S. E. jusqu'à ce qu'elle disparût dans des vapeurs. — Jour *sin-sse* (24 juillet), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle alla au S. O. jusqu'aux étoiles *Hoan-tche* ($\varkappa$, i, Ophiucus) du Marché céleste et disparut. Une autre étoile sortit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée), atteignit le *Tou-sse-kiun* (o, Baleine) et disparut. — Jour *koueï-oueï* (26 juillet), une étoile sortit du *Nan-teou* (φ, σ, τ, Sagittaire); elle était grande comme une tasse : elle entra dans des vapeurs. — 8^{e} lune, jour *keng-chin* (1er septembre), une étoile sortit du *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède); elle alla à l'E. et entra dans des vapeurs. — Jour *ping-yn* (7 septembre), l'horloge de nuit n'étant pas encore dressée, une étoile sortit de l'astérisme *Hiu* (β, Verseau); elle était grande comme une tasse; elle alla au S. E. dans des vapeurs. — Jour *kia-ou* (5 octobre), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau); elle atteignit le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. — Jour *y-mao* (26 octobre), une étoile sortit de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan); elle alla au S. dans des vapeurs. — 10^{e} lune, jour *y-haï* (15 novembre), une étoile sortit du groupe *Hien-youen* (α, γ, δ, Lion); elle alla près du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande

Ourse) et disparut. Sa trace lumineuse était rouge-jaune — 11e lune, jour *jin-tchin* (2 décembre), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau), atteignit *Pi* (les Hyades) et disparut. — 12e lune, jour *jin-chin* (11 janvier 1061), une étoile sortit du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux), atteignit le groupe *Hing-koueï* (θ, γ, δ, Cancer) et disparut. — Jour *wou-yn* (17 janvier 1061), une étoile sortit du groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien), atteignit le fleuve austral (α, β, petit Chien) et disparut. — Jour *ki-mao* (18 janvier 1061), l'horloge de nuit n'étant pas encore dressée, une étoile sortit de *Tchin* (γ, α, β, Corbeau), alla auprès de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et disparut.

1061. 6e année, 6e lune, jour *ting-sse* (25 juin), une étoile parut près des étoiles *Hoan-tche* (κ, *e*, *i*, Ophiucus) du Marché céleste, et disparut dans l'astérisme *Ti* (α, β, Balance). — Jour *ki-sse* (7 juillet), une étoile parut dans le Marché céleste, près de l'étoile *Tche-sse* (ν, Serpent); elle alla au S. O. jusqu'à l'astérisme *Oueï* (μ et autres, queue du Scorpion) et disparut. — 7e lune, jour *y-yeou* (23 juillet), une étoile sortit du Serpent droit (κ, ι, λ, Andromède et étoiles du Lézard), alla jusqu'à *Oeï* (α, Verseau) et disparut. Cette même nuit, une autre étoile sortit de l'astérisme *Leou* (β, α, Bélier); elle était grande comme un gobelet et de couleur rouge-jaune; elle alla rapidement vers le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. — Jour *ping-su* (24 juillet), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne), alla jusqu'à *Oeï* (α, Verseau) et disparut. Sa trace lumineuse était rouge-jaune. — Jour *keng-yn* (28 juillet), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla au N. et disparut dans des vapeurs. — 8e lune, jour *ting-sse* (24 août), une étoile sortit de l'astérisme *Leou* (β, α, Bélier); elle alla promptement au N. E. et disparut dans des vapeurs. — Jour *ting-mao* (3 septembre), ou, suivant Ma-touan-lin, *ting-oueï* (13 octobre), une étoile sortit de *Lang* (Sirius); elle était grande comme une tasse; elle alla jusqu'au groupe du Sacrifice au ciel (ξ, η, Navire) et disparut. Sa queue se

fixa en un point du ciel et se dispersa lentement. — 9e lune, jour *kia-yn* (20 octobre), une étoile sortit du *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle alla au S. O. dans des vapeurs. — 10e lune, jour *koueï-haï* (29 octobre), une étoile sortit de *Lieou* (δ, ε, ϱ, Hydre); elle alla à l'E. jusqu'à *Tchin* (γ, α, Corbeau) et disparut. — 11e lune, jour *koueï-tcheou* (18 décembre), une étoile parut au N. E. elle n'était qu'à cinquante pieds environ de la terre; elle était grande comme une écuelle; elle alla lentement au N. E. et entra dans un endroit trouble. Sa traînée était bleu blanchâtre. — Jour *jin-chin* (6 janvier 1062), une étoile sortit du Drapeau de *Tsan* (étoiles d'Orion dans la peau de Lion) et disparut dans des vapeurs. — Jour *ping-tseu* (10 janvier 1062), une étoile sortit de *Lang* (Sirius); elle était grosse comme un gobelet et de couleur rouge-jaune; elle alla lentement jusqu'au groupe Arc et Flèche (ν, δ, ζ, grand Chien) et disparut. La lueur de sa queue éclaira la terre. — 12e lune, jour *sin-tcheou* (4 février 1062), une étoile sortit du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. entra dans le Marché céleste, atteignit l'étoile *Keou* (α, Ophiucus) et disparut. Sa queue lumineuse était bleu blanchâtre.

1062. Même période, 7e année, 1re lune, jour *y-haï* (10 mars), une étoile sortit du *Hia-taï* (ν, ξ, grande Ourse), atteignit le *Chang-taï* ($\varkappa$, ι, grande Ourse) et disparut. — 2e lune, jour *ki-mao* (14 mars), une étoile sortit du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle était grande comme une tasse; sa couleur était rouge-jaune. Elle alla rapidement et disparut près du *Ko-tao* (ν, o, ξ, τ, Cassiopée). Elle avait une queue dont la lueur éclaira la terre. — Jour *jin-tchin* (27 mars), une étoile sortit du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était comme Vénus; elle atteignit *Pi* (les Hyades) et disparut. — 4e lune, jour *keng-tseu* (3 juin), une étoile sortit de *Lang-weï* (Chevelure de Bérénice), du *Thaï-weï;* elle était comme Vénus; elle alla lentement au S. O. jusqu'à *Tchang* (ν, λ, Hydre) et disparut. Sa trace lumineuse était rouge-jaune. — 6e lune, jour *ting-tcheou* (10 juillet), une étoile parut au S. de *Pe-lo-che-*

men (Fomalhaut) et entra dans des vapeurs. — 7e lune, jour *ting-oueï* (9 août), une étoile sortit de *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle alla au *Nan-teou* (φ, ξ, σ, τ, Sagittaire) et disparut. Une autre étoile sortit du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau), alla jusqu'à *Pe-loche-men* (Fomalhaut) et disparut. — Jour *ki-yeou* (11 août), une étoile sortit du groupe *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons); elle était comme Vénus; elle alla rapidement à l'O. jusqu'au *Paï-kieou* (λ, γ, Grue) et disparut. Sa trace lumineuse était rouge-jaune. — Jour *sin-yeou* (23 août), une étoile sortit du *Thien-ki* (ε, υ, θ, Jambe gauche d'Hercule), alla rapidement au N. O. et entra dans des vapeurs. — 8e lune, jour *ki-mao* (10 septembre), une étoile sortit du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse), alla jusqu'au *Hia-taï* (ν, ξ, grande Ourse) et disparut. — Jour *y-oueï* (26 septembre), une étoile parut au midi de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan) et entra dans des vapeurs. Sa trace lumineuse était rouge-jaune. — Jour *ki-haï* (30 septembre), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne), alla au S. O. et entra dans des vapeurs. — 9e lune, jour *ping-tchin* (17 octobre), une étoile parut au S. E. de l'étoile *Tou-sse-kioung* (o, Baleine) et entra dans des vapeurs. — Jour *ting-mao* (28 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Toung-pi* (α, Andromède; γ, Pégase); elle était grande comme un gobelet. Elle alla à l'O. jusqu'à *Hiu* (β, Verseau) et disparut. Sa trace lumineuse était rouge jaunâtre : sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *ping-tse* (6 novembre), une étoile parut dans *Mao* (les Pléiades); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. atteignit le camp du grand Général céleste (γ, Andromède et voisines du Triangle) et disparut. Sa trace lumineuse était rouge jaunâtre. — Jour *ting-tcheou* (7 novembre), une étoile sortit du *Ta-ling* (τ, $\varkappa$, ρ, Persée); elle était pareille à Vénus; elle alla au S. jusqu'au *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine) et disparut. — Jour *Keng-yn* (20 novembre), une étoile sortit de la Rivière australe (α, β, petit Chien); elle alla jusqu'au *Thien-che* (η ou ρ, Navire) et disparut. Sa lumière éclaira la terre. — Jour *ting-yeou* (27 novembre), une étoile parut au midi du

Thien-miao (étoiles du Navire et de la Machine pneumatique) et entra dans des vapeurs. — Jour *ki-haï* (29 novembre), une étoile sortit de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était comme Vénus; elle alla au S. O. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan) et disparut. Sa trace lumineuse était bleu blanchâtre.

1063. 8e année, 1re lune, jour *sin-yeou* (19 février), une étoile sortit de *Tchin* (γ, α, β, Corbeau); elle était de couleur rouge-jaune); elle alla rapidement au S. E. entra dans le *kou-leou* (n, τ, ι, Centaure) et disparut. — 3e lune, jour *koueï-mao* (2 avril), une étoile parut au S. E. du *Paï-koua* (ε et voisines du Dauphin), alla jusqu'à *Oeï* (α, Verseau) et disparut. Sa couleur était rouge-jaune : elle avait une queue dont la lumière éclaira la terre. — Jour *koueï-haï* (22 avril), une étoile parut dans le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse), alla au N. et entra dans des vapeurs. Sa queue était brillante et éclaira la terre. Une autre étoile sortit du groupe *Fou-che* (étoiles de la Girafe ou de Persée), alla rapidement vers le pôle nord et disparut. — 5e lune, jour *koueï-mao* (1er juin), une étoile parut près du groupe *Thsoung-jin* (n, o, p, q, Taureau de Poniatowski) du Marché céleste; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à la Tortue (Couronne australe) et disparut. — Jour *ki-haï* (27 juillet), une étoile sortit du *Tchao-yao* (β, Bouvier); sa couleur était rouge-jaune. Elle alla au S. et disparut dans *Ti* (α, β, Balance). — 7e lune, jour *y-tcheou* (22 août), une centaine d'étoiles, allant en ligne droite et en ligne transversale, coulèrent à l'O. — 8e lune, jour *keng-yn* (16 septembre), une étoile sortit du *Ko-tao* (o, ν, ξ, τ, Cassiopée), alla rapidement au S. E. et disparut dans des vapeurs. — Jour *kia-tseu* (20 octobre), une étoile sortit du *Chang-taï* (κ, ι, grande Ourse); elle était grande comme un gobelet; sa couleur était rouge-jaune. Elle alla rapidement à l'E. jusqu'au *Taï* inférieur (ν, ξ, grande Ourse) et disparut.

1064. Période *Hi-ping*, 1re année, 2e lune, jour *ting-mao* (20 avril), une étoile sortit du *Keou-tchin* du *Tse-koung* (α, ζ, petite Ourse); elle alla au N. O. entra dans des vapeurs et disparut.

Sa lumière éclaira la terre : sa queue était enflammée. On entendit du bruit. — 6e lune, jour *sin-yeou* (12 août), l'horloge de nuit n'étant pas encore dressée, une étoile parut au S. E. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle alla rapidement au S. E. atteignit le groupe *Oeï* (α, Verseau) et disparut. — 7e lune, jour *koueï-oueï* (3 septembre), une étoile parut au S. O. de *Oeï* (α, Verseau); elle alla rapidement, entra dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Hercule) et disparut. — 8e lune, jour *sin-haï* (1er octobre), une étoile parut au pôle N. elle était grande comme un gobelet; elle alla rapidement jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Sa trace lumineuse était bleue et jaune. — Jour *ting-sse* (7 octobre), une étoile sortit de *Koeï* (β, ζ, Andromède); elle était grande comme une écuelle; elle alla rapidement jusqu'aux Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. — Jour *jin-su* (12 octobre), l'horloge de nuit étant à sa fin, une étoile parut dans *Koeï* (ζ, β, Andromède), alla au S. O. et disparut dans des vapeurs. — 9e lune, jour *koueï-haï* (13 octobre), une étoile sortit du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était grande comme une coupe; elle alla rapidement au S. E. atteignit des vapeurs et disparut.

1065. 2e année, 2e lune, jour *ting-yeou* (16 mars), une étoile sortit du *Thien-miao* (étoiles du Navire et de la Machine pneumatique); sa couleur était bleu blanchâtre. Elle alla au S. O. et entra dans des vapeurs. — Jour *y-mao* (3 avril), une étoile sortit du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse); sa couleur était rouge-jaune. Elle alla lentement au N. O. atteignit le *Neï-kiaï* (étoiles de la Tête, grande Ourse) et disparut. — 5e lune, jour *jin-su* (9 juin), une étoile sortit du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était comme un gobelet; sa couleur était bleu blanchâtre. Elle alla au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. — 6e lune, jour *ki-tcheou* (6 juillet), en plein jour, une étoile parut au milieu du ciel; elle était grande comme une petite écuelle; elle alla rapidement à l'O. atteignit des vapeurs et disparut. Sa trace lu-

mineuse était rouge jaunâtre. — 8e lune, jour *y-oueï* (10 septembre), une étoile sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était grande comme une coupe; sa couleur était rouge jaunâtre. Elle alla rapidement dans l'intérieur du Marché céleste, au groupe *Thsoung-sing* (K, M, N, Hercule ou *r, s,* Taureau de Poniatowski) et disparut. — Jour *ting-sse* (2 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Oeï* (α, Verseau), alla jusqu'à des vapeurs et disparut. — 9e lune, jour *koueï-yeou* (18 octobre), une étoile sortit du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse), alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut.

1066. 3e année, 4e lune, jour *koueï-sse* (6 mai), une étoile sortit de *Fang* (β, π, Scorpion); elle alla vers des vapeurs et disparut. Sa lueur éclaira la terre: sa queue brilla vivement et se divisa en étincelles. — 7e lune, jour *keng-chin* (1er août), l'horloge de jour n'étant pas encore dressée, une étoile sortit de l'enceinte *Tse-koung* (queue du Dragon) et alla à l'O. Sa queue lumineuse était longue de 20 pieds ou degrés, et de couleur bleu blanchâtre. — 9e lune, jour *ting-tcheou* (17 août), une étoile sortit de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion), atteignit le *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine) et disparut. — 11e lune, jour *ki-mao* (19 août), une étoile sortit du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle alla rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Sa trace lumineuse était bleu jaunâtre.

ANNALES DES SOUNG. — SECTION DE L'ASTRONOMIE, LIV. XI.

1068. Période *Hi-ning,* 1re année, 1re lune, jour *sin-mao* (23 février), une étoile parut au S. O. de *Tchang* (ν', λ, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *y-oueï* (27 février), une étoile parut à l'O. du *Che-ti* de gauche (ζ, π, ξ, Bouvier); elle était pareille à Vénus; elle alla promptement au S. E. jusqu'à ce qu'elle fût au N. de l'astérisme *Kou-leou* (η, τ, ι, Centaure) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue

lumineuse. — 2e lune, jour *wou-ou* (21 mars), une étoile parut au S. du groupe *Tchang-tchin* (ψ, grande Ourse et autres au-dessus de la Chevelure de Bérénice); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement jusqu'à ce qu'elle fût à l'E. du *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-yeou* (24 mars), une étoile parut à l'E. du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle alla promptement au midi jusqu'au S. de la grande étoile du *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *jin-su* (25 mars), une étoile parut à l'E. de *Kio* (α, Vierge); elle était pareille à Vénus; elle alla promptement à l'O. jusqu'à *Tchin* (γ, α, β, Corbeau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *wou-tchin* (31 mars), une étoile parut au S. de *Ta-kio* (Arcturus); elle était pareille à Vénus; elle alla promptement au S. E. jusqu'à l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *ki-sse* (1er avril), une étoile parut dans l'intérieur du Marché céleste aux étoiles *Hoan-tche* (*e*, *i*, Ophiucus); elle était pareille à Vénus; elle coula promptement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse. — 4e lune, jour *jin-yn* (4 mai), une étoile parut au S. du groupe *Hien-youen* (α, γ, δ, η, Lion); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. E. jusqu'à *Tchin* (γ, α, β, Corbeau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *ki-yeou* (11 mai), une étoile parut dans l'intérieur du Marché céleste au S. des étoiles *Hoan-tche* (*e*, *i*, Ophiucus); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. O. jusqu'à la Fileuse (α, Lyre et deux petites voisines) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *jin-su* (24 mai), une étoile parut à l'E. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, Cygne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : il y eut une traînée lumi-

neuse. — 5e lune, jour *y-haï* (6 juin), une étoile sortit du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. E. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne) et disparut. Elle était bleu blanchâtre ; elle eut une queue, et sa lumière éclaira la terre. — 6e lune, jour *koueï-mao* (4 juillet), une étoile parut au S. du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier); elle était pareille à Vénus ; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Kio* (α, Vierge) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse. — Une autre étoile parut au S. de l'étoile *Ping* (γ ou ν, Hydre); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue. — Jour *y-sse* (6 juillet), une étoile parut à l'E. de *Tchin* (γ, α, β, Corbeau); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante. Sa lumière fut assez vive pour éclairer la terre. — Jour *ting-oueï* (8 juillet), une étoile parut à l'O. de *Khien-nieou* (α, β, Capricorne); elle était pareille à Vénus ; elle alla vivement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *wou-chin* (9 juillet), une étoile parut au N. du *Ki-kouan* (étoiles du Loup); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Une autre étoile sortit du groupe *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. — Jour *wou-ou* (19 juillet), une étoile parut au N. du *Ko-tao* (o, ν, ξ, τ, Cassiopée); elle était semblable à Jupiter; elle alla lentement au N. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *keng-chin* (21 juillet), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. du Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite d'Hercule); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'E. atteignit le bord occidental de l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent) et disparut. Elle était rouge jaunâtre et avait une queue. — Jour *jin-su* (23 juillet), une étoile parut au S. du *Wang-lang*

(α, β, γ, η, Cassiopée); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au Camp du grand Général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante. Une autre étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon), alla jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue. Une troisième étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon) au S. du pôle N. elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à ce qu'elle fût au Nord du *Si-hien* (ξ, π, θ, Balance), et disparut. Elle était rouge-jaune. — Jour *kia-tseu* (25 juillet), une étoile parut au N. de *Oueï* (μ et autres, queue du Scorpion); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle alla lentement à l'O. jusqu'à l'étoile *Ping* (γ, Hydre) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une queue lumineuse. — Jour *ping-yn* (27 juillet), une étoile parut au N. de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla rapidement au S. O. et disparut dans des vapeurs. Elle était rouge-jaune : elle avait une traînée brillante. — 7^{e} lune, jour *y-haï* (5 août), une étoile parut au S. de l'astérisme *Hiu* (β, Verseau); elle était pareille à la planète Jupiter. Elle alla vivement à l'O. jusqu'au bord occidental de l'enceinte du Marché céleste (étoiles du Serpent et d'Ophiucus) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante. — Jour *ping-tseu* (6 août), une étoile parut à l'E. du *Toung-pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une trace lumineuse. — Jour *ping-su* (16 août), une étoile parut au N. du Camp du Général céleste (γ, Andromède et le Triangle); elle était pareille à la planète Jupiter : elle alla lentement au N. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *y-oueï* (25 août), une étoile parut au N. des neuf *Koung* (étoiles du Sagittaire et du Microscope); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'au *Khien-*

nieou (α, β, Capricorne), se divisa et disparut. Elle était jaune rouge. Une autre étoile sortit du Drapeau de droite (étoiles d'Antinoüs à l'O. de l'Aigle); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une trace brillante, et sa lueur fut assez forte pour éclairer la terre. — Jour *ki-haï* (29 août), une étoile parut au N. du *Thien-lin* (δ, ζ, τ, Bélier); elle était pareille à la planète Vénus; elle alla vivement au S. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une trace brillante, et sa lueur fut assez vive pour éclairer la terre. — 8^{e} lune, jour *koueï-mao* (2 septembre), une étoile parut au N. E. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était pareille à la planète Vénus; elle alla vivement au N. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une queue lumineuse, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-tchin* (3 septembre), une étoile, perçant les nuages, parut au N. de *Hiu* (β, Verseau); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla lentement au N. jusqu'au groupe *Koeï* (ζ, β, Andromède) et disparut. Elle était rouge-jaune. — Jour *y-sse* (4 septembre), une étoile parut à l'E. du *Niu-tchoang* (η, σ, ou ρ, π, Hercule); elle était grande comme l'ouverture d'un gobelet; elle alla vivement au N. O. jusqu'à l'enceinte du Marché céleste (étoiles d'Ophiucus et du Serpent), au N. de l'étoile *Ho-tchoung* (β, Hercule), et y disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une trace brillante et une lueur assez vive pour éclairer la terre. Une seconde étoile parut au N. de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement à l'E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune; elle avait une trace brillante et une lumière assez vive pour éclairer la terre. Une troisième étoile parut au S. du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une trace brillante, et sa lumière fut assez vive pour éclairer la terre. — Jour *ping-ou* (5 septembre), une étoile parut au S.

du *Che-ti* de gauche, ζ, ο, π, Bouvier); elle était pareille à Vénus: elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle avait une queue lumineuse. — Jour *ting-oueï* (6 septembre), une étoile sortit du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle était grande comme l'ouverture d'un gobelet; elle alla lentement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *koueï-haï* (22 septembre), une étoile sortit du groupe *Louï-pi-tchin* (petites étoiles du Verseau à l'O. de β, Poissons, et β, Poissons); elle était grande comme Vénus; elle alla directement jusqu'au groupe *Keou-koue* (ω, *b*, *a*, Sagittaire) et disparut. Sa lueur était rouge jaunâtre. — Jour *y-tcheou* (24 septembre), une étoile parut au N. du groupe *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons); elle était pareille à la planète Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au groupe des douze royaumes (φ, ζ et autres, Capricorne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 9e lune, jour *kia-su* (3 octobre), une étoile parut au S. du *Chang-taï* (κ, ι, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. O. jusqu'aux étoiles *Neï-ping* (quatre étoiles du petit Lion) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante, et jeta une lueur assez vive pour éclairer la terre. — Jour *keng-tchin* (9 octobre), une étoile parut dans le *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était comme la planète Jupiter; elle alla lentement au N. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. Une seconde étoile parut à l'O. du groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au *Thien-che* (η, Navire) et disparut. Elle était bleue et blanche : elle avait une trace brillante et jeta une lueur assez vive pour éclairer la terre. — Jour *sin-sse* (10 octobre), une étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon), au N. de l'étoile du pôle N. elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. et disparut dans des vapeurs. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante et jeta une lueur assez vive pour éclairer la terre. — Jour *koueï-oueï* (12 oc-

tobre), une étoile parut au midi du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. jusqu'au *Pe-teou* (α, β, γ, δ, ε, ζ, η, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une trace brillante. — Jour *wou-tseu* (17 octobre), une étoile parut au midi de *Pi* (les Hyades); elle était pareille à Vénus : elle alla lentement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une trace brillante et jeta une lueur assez vive pour éclairer la terre. — Jour *koueï-sse* (22 octobre), une étoile parut à l'O. de la Fileuse (α, Lyre et deux petites); elle était semblable à la planète Vénus; elle coula lentement au S. O. entra dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une trace brillante et une lueur qui éclaira la terre. — Jour *kia-ou* (23 octobre), une étoile parut au N. du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement au S. E. jusqu'au *Taï* inférieur (ν, ξ, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-chin* (25 octobre), une étoile parut au N. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla vivement au N. O. jusqu'au *Niu-tchoang* (π, ρ ou η, σ, Hercule) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *ting-yeou* (26 octobre), une étoile sortit du groupe *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. O. entra dans l'intérieur du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon), atteignit le pôle N. et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue, et sa lueur éclaira la terre. — 10^{e} lune, jour *keng-tseu* (29 octobre), une étoile parut dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement à l'E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante, et jeta une lueur qui éclaira la terre. Une autre étoile parut à l'O. du *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle alla rapidement au S. O. et disparut dans des vapeurs. Elle était bleu blanchâtre : sa

lueur éclaira la terre. — Jour *jin-yn* (31 octobre), une étoile parut à l'O. du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et environnantes); elle était semblable à Vénus ; elle alla rapidement au N. jusqu'au *Peteou* (les sept principales de la grande Ourse) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante. Une autre étoile parut au N. du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était pareille à Jupiter; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace brillante. Une autre étoile parut dans le *Fou-kouang* (*b*, *c*, *d*, ξ? Dragon); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une trace lumineuse, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-tchin* (2 novembre), une étoile parut à l'E. du *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au midi, et disparut dans des vapeurs. Elle était rouge-jaune : elle avait une trace brillante et une lueur qui éclaira la terre. Une deuxième étoile parut à l'O. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au N. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre, et sa lumière éclaira la terre. Une troisième étoile parut au midi de *Mao* (les Pléiades); elle était semblable à Vénus; elle alla lentement au S. O. atteignit le Jardin céleste (ι, κ, χ, φ, Éridan) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une queue brillante, et sa lumière éclaira la terre. Une quatrième étoile parut à l'E. du *Lang-weï* (Chevelure de Bérénice); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. E. jusqu'au *Che-ti* de droite (ν, ν, τ, Bouvier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-su* (8 novembre), une étoile parut au S. de *Leou* (α, β, Bélier); elle était semblable à la planète Jupiter; elle alla rapidement au S. O. atteignit *Mao* (les Pléiades) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *y-mao* (13 novembre), une étoile parut à l'O. du bord austral de l'enceinte du Marché céleste (enceinte autour de α, Ophiucus, étoiles du Serpent et d'Ophiucus); elle était grande

comme Vénus ; elle alla vivement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *jin-su* (20 novembre), une étoile parut à l'O. du groupe *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. E. atteignit *Tchang* (δ, Hydre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace brillante. — Jour *koueï-haï* (21 novembre), une étoile parut au N. de *Leou* (α, β, Bélier); elle était pareille à Vénus : elle coula vivement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — 11e lune, jour *keng-ou* (28 novembre), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* (ν, ψ, ω, Scorpion); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'au *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-oueï* (11 décembre), une étoile parut à l'E. du *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — 12e lune, jour *ki-haï* (27 décembre), une étoile parut au N. du *Wang-lang* (α, β, γ, $\varkappa$, Cassiopée); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement à l'E. jusqu'aux Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-tseu* (28 décembre), une étoile parut à l'E. du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante.

1069. Même année chinoise, 12e lune, jour *sin-yeou* (18 janvier 1069), une étoile parut à l'E. de l'enceinte du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement jusqu'à *Lieou* (ρ, δ, Hydre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante.

1069. Même période, 2e année, 1re lune, jour *keng-yn* (17 février), une étoile, perçant les nuages, parut dans l'enceinte du

Tse-weï, à l'O. du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et environnantes); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 2e lune, jour *kia-tchin* (2 mars), une étoile parut au S. de l'étoile *Ping* (γ, Hydre); elle était pareille à la planète Vénus; elle alla rapidement au midi, entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une queue brillante. — 3e lune, jour *jin-tchin* (19 avril), une étoile parut à l'E. du bord occidental du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au N. jusqu'au *Thien-ki* (ζ, ε, θ, Hercule) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une trace lumineuse. — Jour *koueï-sse* (20 avril), une étoile parut au S. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. — 4e lune, jour *keng-su* (7 mai), une étoile parut à l'E. du groupe *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion); elle était pareille à l'ouverture d'une tasse, elle alla lentement au N. jusqu'au *Peteou* (les sept principales de la grande Ourse) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-yeou* (18 mai), une étoile sortit du Chemin volant *Ko-tao* (ε, δ, θ, ν, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'au *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue. — 5e lune, jour *ki-tcheou* (15 juin), une étoile parut dans l'enceinte *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge), au Trône des cinq Souverains (β, Lion); elle était pareille à l'ouverture d'une tasse; elle alla à l'E. jusqu'à l'astérisme *Kio* (α, ζ, Vierge) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une trace brillante, et sa lumière éclaira la terre. — 6e lune, jour *ki-haï* (25 juin), une étoile parut à l'O. de *Sin* (α, σ, τ, Scorpion); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla promptement au S. O. jusqu'au *Kou-leou* (*h*, *i*, *t*, ou γ, τ, Centaure) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une queue brillante. — Jour *y-sse* (1er juillet), une étoile parut au S. de *Ti* (α, β, Balance); elle était pa-

reille à Vénus; elle alla lentement au midi, entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *jin-tseu* (8 juillet), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était pareille à Vénus; elle alla promptement au N. O. jusqu'au *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue lumineuse. — Jour *sin-ycou* (17 juillet), en plein jour, il y eut une étoile filante. La nuit, une étoile, perçant les nuages, parut dans la Fileuse (α, Lyre, et deux voisines, ε, ζ); elle alla rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace lumineuse. — Jour *koueï-haï* (19 juillet), une étoile sortit du bord oriental de l'enceinte *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion); elle était pareille à Vénus : elle alla vivement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue lumineuse. — Jour *kia-tseu* (20 juillet), une étoile parut au N. de *Oueï* (μ et autres, queue du Scorpion); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 1re lune, jour *ting-mao* (23 juillet), une étoile parut au S. de l'astérisme *Oeï* (α, π, ζ, θ, Verseau); elle alla rapidement au S. O. jusqu'au groupe *Louï-pi-tchin* (petites du Verseau, et β, Poissons) et disparut. Elle était comme les précédentes. — Jour *sin-oueï* (27 juillet), une étoile parut à l'E. du *Keng-ho* (δ et ϱ, Bouvier); elle était pareille à Vénus : elle alla rapidement au N. O. jusqu'au *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *ting-haï* (12 août), une étoile parut à l'O. du Navire céleste (α, γ, δ, μ, Persée); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *kia-ou* (19 août), une étoile parut à l'O. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. O. jusqu'au groupe *Sin* (α, σ, τ, Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — 8e lune, jour *ting-ycou* (22 août), une étoile, perçant les nuages,

parut à l'O. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. atteignit le Fléau céleste (β, γ, Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue lumineuse. — Jour *koueï-haï* (17 septembre), une étoile parut au N. du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement au N. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue. — 9^{e} lune, jour *kia-tseu* (18 septembre), une étoile parut au N. de *Leou* (α, β, Bélier); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla vivement au N. O. jusqu'au groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *kia-su* (28 septembre), une étoile sortit du Drapeau de droite (étoiles d'Antinoüs à l'E. de α, Aigle); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au bord occidental de l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Hercule) et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle avait une queue brillante. — Jour *ting-tcheou* (1er octobre), une étoile parut à l'E. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla vivement au N. E. jusqu'au Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une trace lumineuse. — 10^{e} lune, jour *y-oueï* (19 octobre), une étoile parut au midi de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace lumineuse. — Jour *kia-tchin* (28 octobre), une étoile parut à l'E. de *Pi* (les Hyades); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au midi jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *koueï-tcheou* (6 novembre), une étoile parut à l'E. de *Oeï* (α, β, γ, Mouche); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement au S. E. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan); elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *kia-yn* (7 novembre), une étoile parut

à l'O. du *Kiouen-che* (ε, ξ, ζ, Persée); elle était pareille à Jupiter: elle alla vivement au S. O. jusqu'à *Leou* (α, β, Bélier) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue. — 11e lune, jour *ping-yn* (19 novembre), une étoile parut au N. de la Fileuse (α, Lyre et deux voisines, ε, ζ); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle) et disparut; elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante, et sa lumière éclaira la terre. — Jour *jin-chin* (25 novembre), une étoile parut dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla vivement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *ki-mao* (2 décembre), une étoile, perçant les nuages, parut au N. du groupe *Ta-ling* (τ, $\varkappa$, θ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut. Elle était blanc bleuâtre. — 11e lune intercalaire, jour *sin-yeou* (13 janvier 1070), une étoile sortit du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier); elle était pareille à la planète Jupiter; elle alla lentement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre.

1070. Même période, 3e année, 1re lune, jour *ping-chin* (18 février), une étoile sortit du *Che-ti* de droite (η, ν, τ, Bouvier); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace lumineuse. — Jour *ki-ouei* (12 mars), une étoile parut au S. de *Tsi-sing* (groupe de α, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *ki-tcheou* (11 avril), une étoile parut au S. du *Ta-tsiang* (ν ou τ, Lion), au côté O. du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion); elle était grande comme une écuelle; elle alla vivement au N. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune : elle avait une queue brillante, et sa lumière éclaira la terre. Une autre étoile parut au S. du *Kouei* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était comme une écuelle; elle alla vivement au N. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle

était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante, et sa lumière éclaira la terre. — Jour *keng-yn* (12 avril), une étoile parut à l'E. de l'enceinte occidentale du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. atteignit une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue, et sa lumière éclaira la terre. — 3e lune, jour *wou-su* (20 avril), une étoile sortit des Sept-Illustres (μ, ε, φ, ν, τ, Hercule); elle était pareille à une tasse; elle alla vivement, entra dans le *Tse-weï* (enceinte d'étoiles du Serpent), atteignit le *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-yn* (24 avril), une étoile parut à l'E. du bord occidental du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Ophiucus); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement au S. E. jusqu'au *Ki-kouan* (étoiles du Loup) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue lumineuse. — Jour *ki-oueï* (11 mai), une étoile parut au N. du groupe *Tchin* (γ, α, β, Corbeau); elle était pareille à Vénus; elle alla promptement au N. O. jusqu'au *Ming-tang* (ν, φ, ε, Lion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — 4e lune, jour *jin-su* (14 mai), une étoile parut dans le *Tse-weï*, au S. de l'étoile Souverain (β, petite Ourse); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. atteignit des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une trace brillante. Sa lumière éclaira la terre. — Jour *kia-chin* (16 juin), une étoile parut à l'E. du *Hien-youen* (α, γ, δ, ζ, Lion); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. O. jusqu'à l'étoile *Tchi-fa* de droite (β, Vierge) de l'enceinte *Thaï-weï*. Elle était rouge-jaune. — 6e lune, jour *ki-sse* (20 juillet), une étoile parut à l'E. du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *jin-chin* (23 juillet), une étoile parut au N. du bord occidental du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle alla

lentement au N. et disparut dans des vapeurs. — Jour *keng-tchin* (31 juillet), une étoile parut à l'E. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était pareille à une tasse; elle coula vivement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle avait une queue. — 7^e lune, jour *keng-tseu* (20 août), une étoile, perçant les nuages, sortit du bord occidental de l'enceinte du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'au bord occidental du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Ophiucus) et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue brillante. — 8^e lune, jour *ping-su* (5 octobre), une étoile sortit du bord occidental de l'enceinte du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était aussi grande qu'une tasse; elle alla vivement au N. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle avait une queue. — 9^e lune, jour *ki-haï* (18 octobre), une étoile sortit du bord occidental du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement au N. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle avait une queue. — Jour *ting-ouei* (26 octobre), une étoile, perçant les nuages, sortit du Navire céleste (α, γ, δ, ζ, Persée). Elle était pareille à Vénus; elle alla lentement à l'O. entra dans le *Neï-kiaï* (étoiles de la tête de la grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle avait une queue lumineuse. — Jour *keng-su* (29 octobre), une étoile sortit du bord oriental du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était pareille à Vénus: elle coula vivement au N. E. jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle avait une queue lumineuse. — 10^e lune, jour *ki-ouei* (7 novembre), une étoile parut à l'O. de *Koeï*, ζ, β, Andromède). Elle était pareille à Vénus; elle alla lentement à l'O. jusqu'au S. du *Thien-thsang* (θ, ι, τ, Baleine) et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle avait une queue brillante. — Jour *wou-tchin* (16 novembre), une étoile parut à l'O. du *Thien-kiun* (α, δ, γ, Baleine); elle était grande comme

Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au *Tou-sse-kioung* (β, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — 11e lune, jour *wou-su* (16 décembre), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. O. et entra dans des vapeurs. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue.

1071. Même année chinoise, 12e lune, jour *kia-tseu* (11 janvier 1071), une étoile parut au S. du groupe *Waï-ping* (α, δ, ε, Poissons); elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut.

1071. Même période, 4e année, 1re lune, jour *ping-ou* (22 février), une étoile parut à l'O. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme un gobelet; elle alla vivement au midi, entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune : sa lueur éclaira la terre. — 2e lune, jour *kia-tseu* (12 mars), une étoile parut à l'O. de *Mao* (les Pléiades); elle était grande comme un gobelet; elle alla lentement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 3e lune, jour *kouei-sse* (10 avril), une étoile parut au N. O. des étoiles *Teou* (κ, ι, Ophiucus) dans l'enceinte du Marché céleste; elle remonta jusqu'à l'E. du *Kouan-so* (Couronne boréale) et disparut. — 5e lune, jour *ki-haï* (15 juin), une étoile sortit du *Che-ti* de gauche (ζ, ο, π, Bouvier); elle était pareille à Vénus : elle alla vivement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — 6e lune, jour *ting-tcheou* (23 juillet), une étoile parut au S. O. de l'astérisme *Yng-tchi* (α, β, Pégase); elle alla au groupe *Louï-pi-tchin* (petites du Verseau, et β, Poissons) et disparut. — Jour *jin-sse* (27 juillet), une étoile parut à l'O. du *Tsao-fou* (δ, ε, ζ, Céphée); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. E. jusqu'au Fléau céleste (β, γ, Dragon) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue lumineuse. — 7e lune, jour *wou-chin* (23 août), une étoile parut à l'E. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était grande comme Vénus : elle coula lentement à l'O. jusqu'au Fléau céleste (β, γ, Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une

queue brillante. — 8e lune, jour *ki-oueï* (3 septembre), une étoile parut à l'O. des cinq *Heou* (θ, ι, υ et autres des Gémeaux, ou petites de la Vierge); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue. Sa lumière éclaira la terre. — Jour *sin-yeou* (5 septembre), une étoile parut à l'O. du bord occidental du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue lumineuse. — Jour *koueï-haï* (7 septembre), une étoile parut à l'O. du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. O. jusqu'au *Taï* supérieur (ι, κ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *y-tcheou* (9 septembre), une étoile parut au N. du *Nan-teou* (φ, σ, ζ, μ, Sagittaire); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. O. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — 9e lune, jour *kia-ou* (8 octobre), une étoile parut au N. E. du bord occidental du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle alla rapidement et entra dans des vapeurs. — Jour *y-sse* (19 octobre), une étoile parut à l'E. du bord occidental du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue, et sa lumière éclaira la terre. — Jour *ping-ou* (20 octobre), une étoile parut au S. de *Pe-lo-che-men* (Fomalhaut); elle était aussi grande que Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue, et sa lumière éclaira la terre. — Une autre étoile parut au S. de *Pe-lo-che-men* (Fomalhaut); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au midi, entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue. — 10e lune, jour *jin-tseu* (26 octobre), une étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï* (enceinte des étoiles du Dragon), au N. du pôle N. elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E.

jusqu'au bord occidental du *Tse-weï* et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue. — Jour *koueï-tcheou* (27 octobre), une étoile parut au N. du *Waï-ping* (α, δ, ε, Poissons); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement à l'E. jusqu'au *Thien-kiun* (α, δ, υ, μ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — Jour *kia-yn* (28 octobre), une étoile parut à l'O. du groupe *Wen-tchang* (θ, α, φ, grande Ourse); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au N. jusqu'au Gond de droite (α, Dragon) de l'enceinte *Tse-weï*, et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-mao* (29 octobre), une étoile sortit du *Khien-nieou* (β, α, Capricorne); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — Jour *keng-chin* (3 novembre), une étoile parut au S. de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au midi jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — Jour *wou-tchin* (11 novembre), une étoile parut à l'E. du Magasin céleste (α, δ, γ, μ, Baleine); elle était grande comme un gobelet; elle alla lentement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue, et sa lueur éclaira la terre. — 11^{e} lune, jour *jin-tchin* (5 décembre), une étoile parut à l'O. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — Jour *keng-tseu* (13 décembre), une étoile parut au S. du *Tchi-fa* de gauche (n, Vierge) de l'enceinte du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. E. jusqu'à *Kio* (α, ζ, Vierge) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante.

1072. 5^{e} année, 7^{e} lune, jour *ki-tcheou* (29 juillet), une étoile parut au S. des Sept-Illustres (δ, μ, ν, φ, Bouvier; φ, τ, ν Hercule); elle alla rapidement au S. jusqu'au bord occidental du Marché

céleste (enceinte d'étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Ophiucus) et disparut. — Jour *koueï-sse* (2 août), une étoile parut à l'E. du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion); elle était grande comme une tasse ; elle alla vivement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante qui allait au midi comme un crochet.— 10e lune, jour *wou-yn* (15 novembre), une étoile parut à l'E. de l'*Heou-kouan* (b, petite Ourse) de l'intérieur du *Tse-weï;* elle était grande comme une tasse ; elle alla lentement au N. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut à l'O. du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement jusqu'au *Kiouen-che* (ξ, ζ, ε, Persée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-chin* (21 novembre), une étoile parut au S. du *Thien-ki* (ψ, Navire, ou θ, Hercule); elle était grande comme une tasse ; elle alla lentement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *wou-tseu* (25 novembre), une étoile sortit du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — Jour *y-sse* (12 décembre), une étoile parut au S. de *Leou* (α, β, Bélier); elle était grande comme une tasse : elle alla vivement au N. O. jusqu'aux Sept-Illustres (μ, ν, Bouvier, φ, τ, Hercule) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante; sa lueur éclaira la terre. — 11e lune, jour *kia-yn* (21 décembre), une étoile parut au S. des Sept-Illustres (μ, ν, Bouvier, φ, τ, Hercule); elle était grande comme une tasse, alla lentement à l'O. jusqu'au Drapeau de *Tsan* (petites étoiles d'Orion dans la peau de Lion) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue lumineuse.

1073. Même année chinoise, 12e lune, jour *sin-mao* (27 janvier), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau); elle était semblable à Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande

Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — Jour *jin-tchin* (28 janvier), une étoile parut à l'E. du *Tchao-yao* (β, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *ping-chin* (1er février), une étoile parut au S. de *Kio* (α, Vierge); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au midi, jusqu'au *Kou-leou* (h, i, γ, τ, Centaure), et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante.

1073. Même période, 6e année, 1re lune, jour *keng-chin* (25 février), une étoile parut à l'E. de l'enceinte du Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Ophiucus); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 3e lune, jour *keng-ou* (6 mai), une étoile parut à l'E. de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme une écuelle; elle alla lentement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre, et sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *ping-tseu* (12 mai), une étoile sortit du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle alla jusqu'à l'étoile *Chang-tsaï* (θ, Dragon) du *Tse-weï* et disparut. Elle était bleu blanchâtre : sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-yn* (14 mai), une étoile parut à l'O. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était grande comme Vénus; elle alla promptement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Kang* ($\varkappa$, ι, Vierge) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : il y eut une traînée brillante. — Jour *ki-mao* (15 mai), une étoile parut au N. de l'astérisme *Lieou* (δ, Hydre, φ, σ); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au Fleuve austral (α, β, petit Chien) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : il y eut une traînée brillante. — 5e lune, jour *koueï-mao* (8 juin), une étoile parut à l'O. du *Teng-che*, Serpent droit (ι, $\varkappa$, Andromède et étoiles du Lézard); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *sin-oueï* (6 juillet), ou, suivant Ma-touan-lin, *sin-mao* (26 juillet), une étoile parut au

N. du groupe *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement au S. E. jusqu'au *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : il y eut une trace lumineuse. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-tseu* (4 août), une étoile parut à l'E. des étoiles *Ou* et *Youe* (ε, δ, Serpent) du Marché céleste; elle était grande comme une tasse; elle alla vivement au S. E. jusqu'au *Khien-nieou* (β, α, Capricorne) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une traînée brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *ping-yn* (30 août), une étoile parut à l'O. du *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons); elle était grande comme un gobelet : elle alla lentement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *wou-tchin* (1er septembre), une étoile sortit du *Thien-kouan* (ζ, Taureau); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au S. E. jusqu'à ce qu'elle entrât dans le groupe du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux) et disparût. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-sse* (2 septembre), une étoile parut à l'E. du *Thien-thsang* (ι, η, θ, τ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. jusqu'au *Thien-kiun* (α, γ, δ, μ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une traînée brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *keng-tchin* (13 septembre), une étoile parut dans l'enceinte du Marché céleste (étoiles du Serpent et d'Ophiucus), au S. du groupe *Thsoung-tching* (β, γ, Ophiucus); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *jin-tchin* (25 septembre), ou, suivant Ma-touan-lin, *jin-chin* (5 septembre), une étoile parut à l'O. du groupe *Yu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grosse comme une tasse; elle alla lentement au S. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Sa couleur était bleu blanchâtre : sa queue se divisa et éclaira la terre. — Jour *y-ouei* (28 septembre), une étoile sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était grande comme une tasse : elle alla ra-

pidement au S. jusqu'au groupe *Kien* (ξ, π, ρ, Sagittaire) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une traînée lumineuse; elle éclaira la terre. — 9^{e} lune, jour *kia-tchin* (7 octobre), une étoile parut l'E. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes); elle était aussi grande qu'un gobelet; elle alla vivement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-ou* (9 octobre), une étoile parut au S. de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : il y eut une traînée brillante et la lueur de l'étoile éclaira la terre. — Jour *sin-haï* (14 octobre), une étoile parut à l'O. du Navire céleste (α, γ, δ, η, Persée); elle était grande comme une tasse ; elle alla rapidement à l'O. traversa le *Pe-teou* (les sept principales de la grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace lumineuse et elle éclaira la terre. — Jour *sin-yeou* (24 octobre), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes); elle était grande comme une tasse ; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Thien-ki* (étoiles de la jambe, μ, ρ, θ, Hercule) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une traînée brillante, et elle éclaira la terre. — Jour *ting-mao* (30 octobre), une étoile parut à l'O. du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, ϕ, grande Ourse); elle était grande comme une tasse ; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante et elle éclaira la terre. — 11^{e} lune, jour *kia-tchin* (6 décembre), une étoile parut à l'E. du groupe Arc et Flèche (η, ζ, δ, grand Chien); elle était grande comme une grande écuelle; elle alla lentement au S. O. jusqu'au *Thien-che* (ι, ξ, τ, $\varkappa$, Navire) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : il y eut une traînée brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-yeou* (23 décembre), une étoile parut au S. du groupe *Hien-youen* (α, γ, δ, η, Lion); elle était grande comme une tasse : elle alla lentement au S. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jau-

nâtre : elle eut une traînée brillante et sa lueur éclaira la terre.

1074. Même période, 7e année, 1re lune, jour *ting-oueï* (7 février), une étoile parut au S. de *Kio* (α, ζ, Vierge); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *ting-sse* (17 février), une étoile parut au S. de l'astérisme *Tchang* (ν, Hydre); elle était grande comme une tasse : elle alla lentement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. Elle eut une traînée brillante. — 2e lune, jour *jin-chin* (4 mars), une étoile parut au N. du Fléau céleste (β, γ, Dragon et une petite d'Hercule); elle alla lentement au N. E. jusqu'au groupe *Tsao-fou* (δ, τ, Céphée), où elle disparut. — 3e lune, jour *kia-tseu* (25 avril), une étoile parut au N. du *Si-hien* (ξ, π, τ, Balance); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. jusqu'au groupe *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une traînée brillante et sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *jin-chin* (3 mai), une étoile parut à l'O. du groupe *Hien-youen* (α, γ, δ, ζ, Lion); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au N. O. jusqu'au groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une traînée lumineuse. Une autre étoile parut au S. du *Tsien-taï* (β, δ, Lyre, ou étoiles de la Flèche); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une traînée lumineuse; elle éclaira la terre. — Jour *ping-su* (17 mai), une étoile parut à l'O. de l'étoile *Chou* (α, Serpent) de l'enceinte du Marché céleste; elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. E. jusqu'à l'étoile *Heou* (α, Ophiucus) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *sin-oueï* (1er juillet), une étoile parut à l'E. du *Ko-tao* (ο, ν, ξ, τ, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Elle était rouge-jaune; elle avait

une queue brillante. Une autre étoile parut au S. du *Keou-koue* (μ, *a*, *b*, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'au S. du Champ céleste (σ, τ, Vierge); alors elle se recourba, alla à l'E. jusqu'au *Thien-louï-tching* (ξ, Verseau; λ, μ, Capricorne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *ki-mao* (9 juillet), une étoile parut dans l'intérieur du Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus et du Serpent), à l'O. de l'étoile *Li-sse* (λ, Serpent); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. O. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Sa couleur était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. — Jour *keng-tchin* (10 juillet), une étoile parut au N. du groupe *Hoa-kaï* (étoiles de la Girafe); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement au N. E. jusqu'au Navire céleste (α, γ, δ, ζ, Persée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. — Jour *γ-yeou* (15 juillet), une étoile parut au N. du groupe *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. E. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante. — Jour *keng-yn* (20 juillet), une étoile parut à l'O. du *Keng-ho* (δ, ρ, et peut-être γ, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au groupe *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante. Une autre étoile parut au N. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut. Elle était bleue et jaune: elle eut une traînée brillante et sa lumière éclaira la terre. — Jour *sin-mao* (21 juillet), une étoile parut à l'O. de *Oeï* (α, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Teou* austral (φ et autres, Sagittaire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle avait une trace lumineuse. — Jour *jin-tchin* (22 juillet), une étoile parut au N. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes), au dedans de l'enceinte du *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon); elle était grande comme

Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à ce qu'elle entrât dans le *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse). Elle était rouge jaunâtre : elle avait une traînée brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *kia-yn* (13 août), une étoile parut au N. de *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme une écuelle; elle alla lentement au N. jusqu'au groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une trace lumineuse. — Jour *ting-sse* (16 août), une étoile parut au N. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au N. entra dans l'enceinte du *Tse-koung* (enceinte de la queue du Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse et elle éclaira la terre. — Jour *wou-ou* (17 août), une étoile parut au N. du *Ta-ling* (υ, ρ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une traînée brillante. — Jour *jin-su* (21 août), une étoile parut à l'E. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *koueï-haï* (22 août), une étoile sortit du *Thien-thsang* (τ, η, θ, Baleine); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle laissa une traînée lumineuse. — 8e lune, jour *wou-yn* (6 septembre), une étoile parut dans le *Pe-teou*, au S. de l'étoile Gond du ciel (α, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. atteignit le groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : il y eut une trace lumineuse. — Jour *koueï-oueï* (11 septembre), une étoile parut dans l'intérieur du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme une tasse; elle coula lentement au N. jusqu'à l'astérisme *Ta-ling* (τ, $\varkappa$, φ, Persée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre et avait une queue. — Jour *y-yeou* (13 septembre), une étoile parut à l'O. du *Thien-ki* (ε, ι, μ, θ, Hercule); elle était

grande comme Vénus; elle coula lentement à l'E. jusqu'au *Hi-tchoung* (θ, $\varkappa$, Cygne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue lumineuse. — 9^{e} lune, jour *ting-yeou* (25 septembre), une étoile parut au S. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une trace lumineuse. — Jour *sin-tcheou* (29 septembre), une étoile parut à l'O. du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle eut une traînée lumineuse. — Jour *ping-ou* (3 octobre), une étoile parut à l'E. du *Thien-kiun* (α, μ, γ, δ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement à l'E. jusqu'aux Neuf-Banderoles (ψ, ρ, Orion, ou μ, ω, Éridan) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse, et elle éclaira la terre. — Jour *wou-chin* (5 octobre), une étoile parut au N. du *Thien-thsang* (θ, $\varkappa$, ι, Bouvier); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleue et jaune. — Jour *kia-tseu* (21 octobre), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. du *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'au Drapeau de gauche (ρ, τ, Aigle, à l'E. de α, β, γ,) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — 10^{e} lune, jour *ping-tseu* (3 novembre), ou, suivant Ma-touan-lin, jour *keng-tseu* (27 novembre), une étoile parut à l'O. du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier); elle était grande comme une tasse; elle coula lentement au S. O. jusqu'au *Pa-koua* (ε et autres, Dauphin) et disparut. Elle était jaune rougeâtre. Sa queue se divisa en étincelles et éclaira la terre. Une autre étoile parut à l'E. de *Tchin* (γ, α, β, Corbeau); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse qui éclaira la terre. — Jour *ping-su* (13 novembre), une étoile parut dans les Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle

était grande comme une tasse ; elle coula lentement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-tseu* (15 novembre), une étoile parut au S. du Jardin céleste (θ, δ, ε, Éridan); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une traînée brillante. Une autre étoile parut à l'E. de l'étoile Gond de droite (α, Dragon); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre.

1075. 8e année, 1re lune, jour *jin-tseu* (7 février), une étoile parut à l'O. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était grande comme un gobelet; elle coula rapidement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était jaune rougeâtre : sa trace était brillante et sa lumière éclaira la terre. — 2e lune, jour *y-haï* (2 mars), une étoile sortit du *Tsi-sing* (groupe de α, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement à l'O. jusqu'au groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une traînée brillante. — 3e lune, jour *ting-yeou* (23 mars), une étoile parut à l'E. du groupe *Tsi-chouï* (μ, λ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'E. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — Jour *wou-su* (24 mars), une étoile parut à l'E. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à la Fileuse (α, Lyre et deux voisines) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une traînée brillante. — 4e lune, jour *koueï-haï* (19 avril), une étoile parut au N. de l'étoile Gond du *Pe-teou* (α, grande Ourse); elle était grande comme un gobelet: elle alla rapidement au N. jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — 4e lune intercalaire, jour *koueï-sse* (19 mai), avant que le crépuscule fût fini, une étoile parut au S. du *Tou-sse-kioung* (β, Hydre, ou β, Baleine); elle était grande comme Vénus ; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Thien-miao*

(étoiles du Navire et de la Machine pneumatique) et disparut. Elle était rouge-jaune : sa trace fut brillante et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut à l'E. de l'astérisme *Sin* (σ, α, τ, Scorpion); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *jin-su* (17 juin), une étoile parut à l'E. de *Oueï* (μ et autres, queue du Scorpion); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. — Jour *wou-yn* (3 juillet), une étoile parut à l'O. de *Wen-tchang* ($\theta, \upsilon, \varphi$, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — 6e lune, jour *koueï-sse* (18 juillet), une étoile parut à l'O. de l'enceinte occidentale du Marché céleste (étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Ophiucus); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. O. entra dans le groupe *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *wou-su* (23 juillet), une étoile parut à l'E. de l'étoile *Thsi* du Marché céleste (H, Hercule, près Cerbère); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — Une autre étoile parut au N. de l'étoile *Thsi* (H, Hercule, près Cerbère); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au Marché céleste; elle y entra et disparut au groupe *Li-sse* (les Boutiques; λ et une autre, Serpent). Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Une troisième étoile parut à l'E. de *Wen-tchang* ($\theta, \upsilon, \varphi$, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla au N. vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-sse* (30 juillet), une étoile parut au S. de *Pe-lo-che-men* (Fomalhaut); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *jin-tseu* (6 août), une étoile parut à l'E. du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, grande Ourse); elle était

grande comme un gobelet; elle alla lentement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7ᵉ lune, jour *sin-ycou* (15 août), une étoile parut au N. du Gué céleste ($\alpha, \gamma, \delta, \zeta$, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'au Navire céleste (α, γ, δ, μ, Persée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-ou* (24 août), une étoile parut à l'O. du *Tchao-kouang* du *Pe-tcou* (η, grande Ourse); elle était grande comme un gobelet; elle alla rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était jaune rougeâtre. — Jour *kouei-ouei* (6 septembre), une étoile parut au N. de *Koei* (ζ, β, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au Camp du grand général (γ, Andromède et autres du Triangle) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *kia-chin* (7 septembre), une étoile parut à l'E. du Marché céleste (étoiles du Serpent et d'Ophiucus); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — 8ᵉ lune, jour *kouei-ssc* (16 septembre), une étoile parut au S. du *Louï-pi-tchin* (β, Poissons; σ, π, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — 9ᵉ lune, jour *jin-su* (15 octobre), une étoile parut au S. de la Fileuse (α, Lyre et deux voisines, ε, ζ); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *y-tcheou* (18 octobre), une étoile parut au S. de la Fileuse (α, Lyre et deux voisines); elle était grande comme Vénus : elle alla lentement au N. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ping-yn* (19 octobre), une étoile, perçant les nuages, parut au N. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. E. jusqu'à l'astérisme *Oeï* (α, Verseau) et disparut. Elle était rouge-jaune. — Une autre étoile pa-

rut au S. du *Thien-thsang* (ι, η, τ, Baleine); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Une troisième étoile parut à l'E. du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — 10e lune, jour *jin-tchin* (14 novembre), une étoile parut à l'O. du *Kiun-chi* (ν, ξ, θ, grand Chien, autour de β); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-oueï* (17 novembre), une étoile parut au N. O. du groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle laissa une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-chin* (18 novembre), une étoile parut à l'O. du *Ta-ling* (θ, $\varkappa$, π, ρ, Persée); elle était grande comme une tasse : elle alla lentement au N. O. jusqu'au *Ko-tao* (ν, ξ, o, τ, Cassiopée) et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Une autre étoile parut à l'O. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au N. jusqu'au Navire céleste (α, δ, μ, Persée) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante.

1076. Même période, 9e année, 1re lune, jour *ping-tseu* (26 février), une étoile parut au N. des Sept-Illustres (τ, ν, Hercule; δ, μ, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. — Jour *ki-mao* (29 février), une étoile parut à l'E. du Navire céleste (α, δ, μ, Persée); elle était grande comme une tasse : elle alla rapidement au N. O. jusqu'au Camp du grand général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 3e lune, jour *kia-tseu* (14 avril), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O.

du groupe *Thsoung-tching* (β, γ, Ophiucus), dans l'intérieur du Marché céleste; elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. O. jusqu'au tronc des Cinq-Souverains (β, Lion) de l'enceinte *Thaï-weï* et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. Une autre étoile perça les nuages et parut à l'O. du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tseu* (26 avril), une étoile parut à l'E. du *Khiouen-che* (ν, ξ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au midi jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 4^{e} lune, jour *keng-yn* (10 mai), une étoile parut dans le Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent, autour de α, Ophiucus); elle était grande comme une tasse : elle alla rapidement au N. jusqu'à l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse et elle éclaira la terre. — Jour *sin-haï* (31 mai), une étoile parut au midi de l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au midi, entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 5^{e} lune, jour *keng-chin* (9 juin), une étoile parut dans le Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était grande comme une tasse : elle alla lentement au S. E. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-tcheou* (26 juin), une étoile parut au N. de *Ouei* (μ, Scorpion et autres de la queue); elle alla vivement au S. E. et entra dans des vapeurs. Elle était comme les précédentes. — Jour *wou-yn* (27 juin), une étoile parut au S. de l'astérisme *Sin* (σ, α, τ, Scorpion); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au S., entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *jin-ou* (1er juillet), une étoile parut au N. du Gué céleste

(α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au groupe *Thien-kiang* (A, B, θ, Ophiucus, dans la Voie lactée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 6e lune, jour *ping-su* (5 juillet), une étoile parut à l'O. du groupe *Hoa-kaï* (étoiles de la Girafe); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante.—Jour *wou-tseu* (7 juillet), une étoile parut à l'E. du *Tche-fou* (ν, ζ, Cygne, ou κ, μ, π, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *jin-tchin* (11 juillet), une étoile parut à l'E. du *Khien-nieou* (α, β, Capricorne); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-tchin* (23 juillet), une étoile parut au N. du *Ko-tao* (ν, ξ, ο, π, Cassiopée); elle était grande comme une tasse : elle alla vivement au S. O. jusqu'au *Keou-tchin* (ν, ψ, ω, Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante; sa lueur éclaira la terre.—Jour *y-sse* (24 juillet), une étoile perça les nuages et parut au S. de *Hiu* (β, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ping-ou* (25 juillet), une étoile parut au N. du *Pi* oriental (γ, Pégase et α, Andromède); elle était grande comme une tasse : elle fila rapidement au S. jusqu'au groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre, avec une queue. — Jour *ki-yeou* (28 juillet), une étoile parut au S. du *Ko-tao* (ο, ν, ξ, π, Cassiopée); elle était grande comme Vénus : elle alla vivement à l'O. jusqu'au *Tche-fou* (ν, ζ, Cygne, ou κ, μ, π, Pégase) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-haï* (30 juillet), une étoile parut au S. des étoiles *Ho* (λ, Ophiucus; σ, Serpent et petites), dans l'enceinte du Marché céleste;

elle était grande comme Vénus ; elle alla rapidement au S. E. jusqu'aux étoiles *Kien* (ξ, τ, ρ, Sagittaire) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante.— Une autre étoile parut au N. du *Ta-li* (intérieur du carré formé par α, β, γ, δ, grande Ourse) dans le *Pe-teou;* elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre ; elle avait une queue brillante. — Une autre étoile parut au S. du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-tcheou* (1er août), une étoile parut au S. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme Vénus : elle alla lentement au S. E. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 7^{e} lune, jour *y-mao* (3 août), une étoile parut à l'O. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au S. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *wou-yn* (26 août), une étoile parut à l'O. du *Waï-ping* (étoiles des Poissons, α, δ, ε); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au *Thien-kiun* (α, γ, δ, μ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *jin-ou* (30 août), une étoile parut à l'O. de *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme un gobelet : elle alla doucement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante. — 8^{e} lune, jour *wou-tseu* (5 septembre), une étoile parut à l'E. de *Ta-kio* (Arcturus); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'au groupe *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. Une autre étoile parut au N. de *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au N. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne) et disparut. Elle était bleu blan-

châtre : elle eut une trace brillante. — Jour *jin-yn* (19 septembre), une étoile parut au N. de l'astérisme *Oeï* (α, Verseau); elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Sa lumière éclaira la terre. — Jour *kia-tchin* (21 septembre), une étoile parut au S. du *Keng-ho* (θ, $\varkappa$, ι, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-chin* (25 septembre), une étoile parut au N. du *Wai-ping* (étoiles des Poissons, α, δ, ε); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au S. jusqu'au *Tou-sse-kioung* (β, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *sin-haï* (28 septembre), une étoile parut à l'O. d'*Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme la planète Vénus; elle alla rapidement au S. jusqu'au groupe *Fen-mo* (η, ζ, γ, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *jin-tseu* (29 septembre), une étoile parut à l'O. de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au S. E. jusqu'à l'étoile *Lang* (Sirius) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. Une autre étoile parut à l'E. de l'étoile *Heou-kouan* (b, petite Ourse), dans l'intérieur du *Tse-wei* (queue du Dragon); elle était grande comme un gobelet; elle coula rapidement au N. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-tcheou* (30 septembre), une étoile sortit du Camp du grand général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement jusqu'au *Tsao-fou* (δ, ε, ζ, Céphée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9^{e} lune, jour *ting-sse* (4 octobre), une étoile parut au N. de *Mao* (les Pléiades); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'aux Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace bril-

lante. Une autre étoile parut à l'E. du *Chao-fou* (*d*, grande Ourse) dans l'enceinte de perpétuelle Apparition (*Tse-weï*); elle était grande comme un gobelet; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-ou* (5 octobre), une étoile parut à l'E du Fleuve austral (α, β, petit Chien); elle était pareille à la planète Jupiter; elle coula doucement à l'E. jusqu'au groupe *Tsi-sing* (α, Cœur de l'Hydre et petites environnantes) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *sin-yeou* (8 octobre), une étoile parut à l'O. du *Khien-nieou* (α, β, Capricorne); elle était grande comme Vénus : elle coula doucement à l'E. jusqu'à l'astérisme *Oeï* (α, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *wou-tchin* (15 octobre), une étoile parut à l'O. du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle coula doucement au N. O. jusqu'au *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *ting-tcheou* (24 octobre), une étoile parut à l'O. de l'astérisme *Oeï* (α, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle coula doucement au S. jusqu'au *Khien-nieou* (α, β, Capricorne) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *keng-tchin* (27 octobre), une étoile parut au N. de l'étoile *Gond* de droite (α, Dragon) de l'enceinte du *Tse-weï*. Elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 10^{e} lune, jour *y-yeou* (1er novembre), une étoile parut à l'O. du *Thien-kiun* (α, γ, δ, μ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. E. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-tcheou* (5 novembre), une étoile parut au S. de *Mao* (les Pléiades); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au N. O. jusqu'aux *Neï-kiaï* (étoiles de

la Tête, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-tseu* (16 novembre), une étoile parut à l'E. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était pareille à un gobelet : elle alla lentement jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *sin-tcheou* (17 novembre), une étoile sortit des étoiles *Ping* (α, β, Lièvre); elle était grande comme une petite écuelle; elle alla rapidement à l'E. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-mao* (19 novembre), une étoile parut au N. du *Thien-thsang* (ι, η, θ, τ, Baleine); elle était semblable à Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'au *Thien-kiun* (α, γ, δ, μ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *ting-oueï* (24 novembre), une étoile parut à l'E. de *Lieou* (δ, Hydre); elle alla rapidement se perdre dans des vapeurs. Elle était comme la précédente. — 11^{e} lune, jour *kia-yn* (30 novembre), une étoile parut à l'O. du Drapeau de *Tsan* (petites étoiles d'Orion, dans la peau de Lion); elle était grande comme Vénus; elle alla doucement au S. entra dans la Ménagerie céleste (η, γ, δ, ζ, Éridan) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle laissa une traînée brillante. — Jour *keng-ou* (16 décembre), une étoile parut à l'E. du groupe Arc et Flèche (η, γ, δ, ζ, grand Chien); elle était grande comme Vénus; elle alla doucement au S. E. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante. — 12^{e} lune, jour *koueï-oueï* (29 décembre), une étoile parut à l'E. de la Ménagerie céleste (η, γ, δ, ζ, Éridan); elle était grande comme Vénus : elle alla lentement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle laissa une trace lumineuse.

1077. Même année chinoise, jour *keng-tseu* (15 janvier 1077), une étoile parut à l'E. de l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier); elle était grande comme un gobelet; elle alla doucement au S. O.

jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-tchin* (19 janvier), une étoile parut à l'O. du *Kiun-tsing* (ν, λ, $\varkappa$, Lièvre); elle était grande comme Vénus; elle alla doucement au S. jusqu'au Magasin céleste (α, γ, δ, ζ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante.

1077. Même période, 10e année, 1re lune, jour *ting-tcheou* (21 février), une étoile parut au S. des *Tsiang* (θ, δ, Lion) dans l'intérieur du *Thaï-weï* (étoiles du Lion et de la Vierge, autour de β, Lion); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement jusqu'au *Tchi-fa* de droite (β, Vierge) du *Thaï-weï* et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *sin-sse* (25 février), une étoile parut au S. O. de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle alla rapidement jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan) et disparut. — 2e lune, jour *ping-su* (2 mars), une étoile parut à l'O. de la grande étoile des Cinq-Chars (α, Chèvre); elle était grande comme Vénus. Elle était rouge jaunâtre : elle alla rapidement au N. jusqu'au *Ta-ling* (ξ, ε, ζ, Persée) et disparut : il y eut une trace brillante. — Jour *koueï-sse* (9 mars), une étoile perça les nuages et parut au N. du *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : il y eut une traînée brillante. — Jour *wou-chin* (24 mars), une étoile parut au S. E. du *Thien-pien* (λ, Antinoüs; *n*, *k*, *o*, *m*, écu de Sobieski); elle était grande comme un gobelet : elle alla rapidement à l'E. entra dans une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 3e lune, jour *ting-sse* (2 avril), une étoile parut à l'E. du Gond de droite (α, Dragon); elle était semblable à Vénus : elle alla rapidement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 4e lune, jour *kia-chin* (29 avril), une étoile parut au N. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était semblable à Vénus : elle alla rapidement à l'E. jusqu'à une ligne

de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *kia-tchin* (19 mai), une étoile parut au N. du *Lang-weï* (chevelure de Bérénice); elle alla rapidement au S. du *Hia-taï* (ξ, ν, grande Ourse) et disparut. — Jour *ki-yeou* (24 mai), une étoile parut au N. du *Tsi-tso* (étoiles du Loup); elle était grande comme un gobelet; elle coula rapidement au S. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut au S. du *Neï-ping* (ξ, η, π, ρ, Vierge) de l'enceinte *Thaï-weï;* elle était grande comme Vénus : elle alla lentement au S. O. jusqu'au S. de l'astérisme *Y* (α, Hydre et Coupe) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *kia-su* (18 juin), une étoile parut au N. du *Kou-leou* (*h*, ι, τ, Centaure); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au S. O. vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge-jaune. — Jour *y-haï* (19 juin), une étoile parut au S. O. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au N. O. jusqu'au groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue lumineuse. — Jour *ting-tcheou* (21 juin), une étoile parut au N. de l'étoile *Heou* (α, Ophiucus), dans le Marché céleste (étoiles du Serpent et d'Ophiucus); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au Drapeau de gauche (ρ, ι, et petites de l'Aigle) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 6e lune, jour *sin-tcheou* (15 juillet), une étoile parut à l'O. de l'enceinte du Marché céleste (étoiles d'Ophiucus et du Serpent); elle était grande comme un gobelet; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au *Che-ti* de droite (η, ν, τ, Bouvier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-sse* (19 juillet), une étoile parut à l'E. de *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle alla vivement jusqu'au *Keou-tchin* de l'intérieur du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse) et disparut : elle était comme les précédentes. — Jour

ping-ou (20 juillet), une étoile parut au S. du *Thien-khi*, la Poule céleste (*e*, *o*, *f*, Sagittaire); elle était pareille à Vénus; elle coula lentement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre et eut une queue brillante. — Jour *wou-chin* (22 juillet), une étoile parut au S. du *Nan-teou* (φ, σ, τ, μ, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 7e lune, jour *keng-su* (24 juillet), une étoile perça les nuages et parut au S. du *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Une autre étoile parut à l'E. du groupe *Thsoung-jin* (*n*, *o*, *p*, *s*, Taureau de Poniatowski) dans l'enceinte du Marché céleste; elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. jusqu'à l'astérisme *Oueï* (μ et autres, queue du Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. — Jour *kia-yn* (28 juillet), une étoile perça les nuages et parut dans l'astérisme *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *y-haï* (18 août), une étoile parut au S. des étoiles de l'Homme (étoiles du petit Cheval); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 8e lune, jour *ki-mao* (22 août), une étoile parut à l'E. du *Che-ti* de gauche (o, π, ζ, Bouvier); elle était grande comme un gobelet; elle coula lentement à l'E. jusqu'au Camp du grand général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-ou* (25 août), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* (ν, ψ, Scorpion); elle était grande comme Vénus : elle coula lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre.

— Jour *jin-tchin* (4 septembre), une étoile parut à l'O. du Navire céleste (α, γ, δ, μ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement à l'O. jusqu'à l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *kia-tchin* (17 septembre), une étoile parut à l'O. du *Kiun-chi* (ν, ξ et autres autour de β, grand Chien); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une traînée brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9^{e} lune, jour *keng-su* (23 septembre), une étoile parut au N. du *Neï-kiaï* (étoiles de la tête, grande Ourse); elle était grande comme un gobelet : elle coula lentement au N. jusqu'au groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse, qui éclaira la terre. — Jour *wou-tchin* (10 octobre), une étoile perça les nuages et parut dans le groupe de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'au pôle N. dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut à l'E. du pôle N. dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ki-sse* (11 octobre), une étoile parut à l'O. du *Sse-kouaï* (χ, Orion et autres entre la tête d'Orion et le Taureau); elle était grande comme Vénus : elle coula vivement au N. E. jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-ou* (12 octobre); une étoile parut au N. du Navire céleste (α, γ, δ, μ, Persée), elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'au *Neï-kiaï* (étoiles de la tête, grande Ourse), dans l'enceinte du *Tse-weï* (cercle de perpétuelle Apparition) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *jin-chin* (14 octobre), une étoile parut à l'E. du *Chao-oeï* ($\varkappa$, Dragon) du *Tse-weï*

(queue du Dragon); elle était grande comme un gobelet; elle coula vivement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tseu* (18 octobre), une étoile parut au N. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — 10e lune, jour *ki-mao* (21 octobre), une étoile parut au N. des *Tsi-sing* (groupe de α, cœur de l'Hydre); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *y-yeou* (27 octobre), une étoile parut au N. du *Thien-ki* (ψ, Navire, ou θ; $\tau_2 \varphi$, Hercule); elle était grande comme un gobelet; elle alla rapidement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-haï* (29 octobre), une étoile parut au S. de *Mao* (les Pléiades); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement à l'O. jusqu'au N. du *Ing-tchi* (α, β, Pégase) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace lumineuse et elle éclaira la terre. — Une autre étoile parut au N. du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement à l'E. jusqu'au groupe *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-mao* (2 novembre), une étoile parut au N. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ki-haï* (10 novembre), ou, suivant Matouan-lin, *kouei-haï?* (4 décembre), une étoile parut au N. du *Pi-lie* (ι, ω, Poissons); elle alla rapidement au S. O. vers des vapeurs et disparut. Elle était semblable aux précédentes. — Jour *keng-tseu* (11 novembre), une étoile parut dans l'intérieur du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-tcheou*

(12 novembre), une étoile parut à l'O. du groupe *Hien-youen* (α, γ, ζ, η, Lion), au N. de la troisième étoile (γ, Lion); elle était grande comme un gobelet; elle coula lentement au S. E. jusqu'au *Thien-keou* (1971, Navire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-sse* (16 novembre), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse), dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 11^{e} lune, jour *kouei-tcheou* (24 novembre), une étoile parut à l'O. du *Thien-miao* (étoiles du Navire et de la Machine pneumatique); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-yn* (25 novembre), une étoile parut au N. du *Thien-tchu* (δ, ε, π, ρ, Dragon); elle était grande comme un gobelet; elle alla à l'O. jusqu'au Fléau céleste (β, γ, Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Une autre étoile parut au N. du Navire céleste (α, γ, δ, μ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. O. jusqu'au Serpent droit ($\varkappa$, ι, Andromède et étoiles du Lézard). Sa couleur était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-mao* (26 novembre), une étoile parut dans l'enceinte du *Thaï-weï* au S. du trône des Cinq-Souverains (β, Lion); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au N. E. jusqu'à *Kio* (α, ζ, Vierge) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — 12^{e} lune, jour *kia-chin* (25 décembre), une étoile parut au S. E. du *Thien-miao* (étoiles du Navire et de la Machine pneumatique); elle était grande comme un gobelet; elle alla rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante.

1078. Période *Youen-foung*, 1re lune, jour *ting-mao* (6 février), une étoile sortit du *Thien-ki* (ψ, Navire); elle alla rapidement au S. jusqu'au N. du *Thien-che* (étoiles du Navire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *keng-ou* (9 février), une étoile parut au midi du *Thien-ki* (ψ, Navire); elle était grande comme la planète Vénus; elle alla lentement au midi jusqu'au *Thien-che* (η, et autres du Navire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une trace lumineuse. — 1re lune intercalaire, jour *jin-yn* (13 mars), une étoile parut au N. du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse; α, Polaire), dans le *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *kia-tchin* (15 mars), une étoile parut au N. de *Lieou* (δ, ε, σ, Hydre); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement à l'O. jusqu'au *Thien-lin* (ξ, Taureau, ou ε, Bélier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 2e lune, jour *ki-yeou* (20 mars), une étoile parut dans le *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles du Lion et de la Vierge autour de β, Lion); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Y* (α, Hydre et Coupe) et disparut. Elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kouei-haï* (3 avril), une étoile parut au midi de *Kio* (α, Vierge); elle était grosse comme une tasse; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Tou-ssc-kioung* (β ou ε, Hydre, au-dessous du Corbeau) et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 3e lune, jour *ting-yeou* (7 mai), une étoile parut à l'E. de *Ki* (γ, Sagittaire); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *ting-yn* (5 juin), une étoile parut à l'E. du *Ko-tao* (ν, ξ, o, π, Cassiopée); elle était grande comme une

tasse; elle alla rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *kia-tchin* (13 juillet), dans le S. E. une vive lueur éclaira la terre; il parut une étoile grande comme une écuelle; elle sortit de la grosse Courge (α, β, γ, δ, Dauphin), alla jusqu'au *Neï-kiaï* (petites étoiles de la tête de la grande Ourse) et disparut. Quand elle se divisa, on entendit un bruit semblable à celui du tonnerre. — Jour *ki-sse* (7 août), une étoile parut à l'O. du *Che-ti* de gauche (ζ, ξ, π, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'aux cinq *Heou* (petites étoiles de la Vierge), dans l'enceinte du *Thaï-weï*, et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-oueï* (9 août), une étoile parut au N. du *Waï-ping* (α, μ, ε, δ, Poissons); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — 7e lune, jour *kia-chin* (22 août), une étoile parut au S. de *Ta-kio* (Arcturus); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement jusqu'au *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *keng-tseu* (7 septembre), une étoile parut dans le Marché céleste (étoiles d'Ophiucus et du Serpent), à l'E. de *Li-sse* (λ, Serpent); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement à l'O. jusqu'à l'astérisme *Kang* (κ, ι, Vierge) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue lumineuse. — 8e lune, jour *ki-yeou* (16 septembre), une étoile parut dans le *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon) au S. du groupe *Yn-te* (petites étoiles au S. de β, petite Ourse); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au N. vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse. Elle éclaira la terre. — Jour *y-mao* (22 septembre), une étoile parut au N. du *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme une petite écuelle; elle alla lentement au N. jusqu'à des vapeurs. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse et elle éclaira la terre. —

Jour *ping-tchin* (23 septembre), une étoile parut au N. O. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *kia-tseu* (1er octobre), une étoile, traversant les nuage, éclaira la terre; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. — 9e lune, jour *keng-tchin* (17 octobre), une étoile parut au N. du *Keou-tchin* (ν, ψ, ω, Scorpion); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *kia-chin* (21 octobre), une étoile parut au N. des Sept-Illustres (δ, μ, Bouvier; φ, τ, Hercule; ζ, Couronne); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *ki-haï* (5 novembre), une étoile parut au S. du *Thien-kiun* (α, γ, δ, μ, Baleine); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. Une autre étoile parut à l'O. du *Tsing* oriental (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *y-sse* (11 novembre), une étoile parut au N. du Gué céleste (α, γ, δ, μ, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au Fléau céleste (β, γ, Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 12e lune, jour *ping-tseu* (12 décembre), ou, suivant Ma-touan-lin, 11e lune, jour *ping-yn* (2 octobre), une étoile parut au N. du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle alla rapidement au S. E. vers le groupe Arc et Flèche (η, δ, γ, grand Chien) et disparut. Elle était comme les précédentes.

1079. Même année chinoise, 12e lune, jour *jin-tseu* (17 janvier), une étoile parut au N. E. de *Yu-kouei* (θ, β, Cancer); elle alla rapi-

dement vers le groupe *Hien-youen* (α, γ, ζ, η, Lion) et disparut.

1079. 2^{e} année, 3^{e} lune, jour *wou-tseu* (23 avril), une étoile parut dans *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle alla doucement au N. E. jusqu'à l'étoile *Keou* (α, Ophiucus), dans le Marché céleste, et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 5^{e} lune, jour *wou-tchin* (2 juin), une étoile parut au milieu de *Tchin* (γ, δ, β, Corbeau); elle était comme Vénus; elle alla rapidement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-ou* (4 juin), une étoile parut à l'E. du *Thien-tchu* (δ, ρ, π, ε, Dragon); elle était semblable à Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-ou* (28 juin), une étoile parut au S. de *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *ping-chin* (30 juin), une étoile parut au N. de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle était grande comme une tasse: elle alla rapidement jusqu'à l'étoile *Thaï-tseu* (γ, petite Ourse), dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon), et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante; elle éclaira la terre. — Jour *ting-yeou* (1er juillet), une étoile parut au N. de l'étoile *Chang-tsaï* (θ, Dragon) de l'enceinte du *Tse-weï;* elle alla rapidement au N. jusqu'à l'étoile Gond de droite (α, Dragon) et disparut. Elle était bleu blanchâtre. Sa lueur éclaira la terre. — 6^{e} lune, jour *wou-su* (2 juillet), une étoile parut à l'E. de *Oueï* (μ, ζ, η, dans la queue du Scorpion); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle éclaira la terre. — Jour *keng-tseu* (4 juillet), une étoile parut à l'E. de *Oeï* (α, Verseau); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7^{e} lune, jour

ki-ssc (2 août), une étoile parut au N. du *Louï-tchin* (petites au-dessous de α, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'E. jusqu'au groupe *Pi-lie* (petites des Poissons au-dessous de γ, Pégase); elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. — Jour *keng-ou* (3 août), une étoile parut au N. de *Ti* (α, β, Balance); elle était comme une tasse; elle alla rapidement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. Sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-yn* (23 août), une étoile parut à l'O. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. jusqu'au Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. Elle éclaira la terre. — 8^{e} lune, jour *koueï-mao* (5 septembre), une étoile parut à l'O. du *Thien-kiun* (α, γ, δ, μ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse. — 9^{e} lune, jour *wou-tchin* (30 septembre), une étoile parut dans le *Thien-pien* (λ, k, g, Antinoüs; Écu de Sobieski); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à l'enceinte du Marché céleste (étoiles d'Ophiucus et du Serpent) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur fut assez vive pour éclairer la terre. — 10^{e} lune, jour *ting-oueï* (8 novembre), une étoile parut au N. du Navire céleste (α, γ, δ, μ, Persée); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Ing-tchi* (α, β, Pégase) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une trace lumineuse. — Jour *y-mao* (16 novembre), une étoile parut à l'O. du *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue lumineuse. — 12^{e} lune, jour *jin-tseu* (12 janvier 1080), une étoile parut au N. E. de *Iu-koueï* (γ, θ, Cancer); elle alla rapidement vers le groupe *Hien-youen* (α, γ, δ, et autres du Lion) et disparut.

1080. Même période, 3^{e} année, 1re lune, jour *koueï-oueï* (12 février), une étoile parut à l'O. du *Che-ti* de droite (η, τ, ν, Bouvier);

elle était comme Vénus, et de couleur bleu blanchâtre; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut : elle eut une queue brillante. — 2e lune, jour *sin-tcheou* (1er mars), une étoile parut au S. du groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse. — 5e lune, jour *keng-ou* (29 mai), une étoile parut au S. de *Oueï* (μ, η, ζ, Scorpion, dans la queue); elle était semblable à Vénus; elle alla rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une traînée lumineuse. — Jour *sin-oueï* (30 mai), une étoile parut au N. du *Tchoung-taï* (μ, λ, grande Ourse) : elle alla lentement au S. E. jusqu'à l'astérisme *Thien-kiang* (θ, ρ, Ophiucus) et disparut. — 6e lune, jour *ki-haï* (27 juin), une étoile parut au S. du *Nan-teou* (φ, σ, τ, μ, Sagittaire); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. jusqu'aux étoiles de la Tortue (Couronne australe) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une traînée lumineuse; elle éclaira la terre. — Jour *jin-tseu* (10 juillet), une étoile parut à l'E. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse et elle éclaira la terre. — 7e lune, jour *kia-tseu* (22 juillet), une étoile parut dans le Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ping-yn* (24 juillet), une étoile parut au N. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-tcheou* (17 août), une étoile parut à l'O. du *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *y-mao*

(11 septembre), une étoile parut au N. du *Thien-kian* (α, γ, δ, μ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. E. jusqu'au groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, grand Chien) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse, et elle éclaira la terre. — Jour *wou-ou* (14 septembre), une étoile parut à l'O. du *Ta-li* ou *Thien-li* (quatre petites étoiles dans le carré de la grande Ourse); elle était semblable à Vénus; elle coula lentement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — 9^{e} lune, jour *sin-mao* (17 octobre), une étoile parut au S. du *Yu-koueï* (θ, γ, δ, Cancer); elle était grande comme une tasse : elle coula rapidement jusqu'au *Hien-youen* (α, γ, ζ, Lion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace lumineuse et elle éclaira la terre. — Jour *keng-su* (5 novembre), une étoile parut dans l'intérieur du *Tse-weï*, au N. du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et environnantes); elle était grande comme Vénus; elle fila rapidement au N. jusqu'au Fléau céleste (β, γ, Dragon). Elle était bleu blanchâtre et sa lueur éclaira la terre. — 10^{e} lune, jour *keng-chin* (15 novembre), une étoile parut à l'E. de *Lang* (Sirius); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1081. Même année chinoise, 11^{e} lune, jour *ping-tchin* (10 janvier), une étoile parut à l'E. des étoiles *Tse* (α, β, γ, δ, Lièvre); elle alla lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était comme les précédentes.

1081. Même période, 4^{e} année, 1re lune, jour *wou-su* (21 février), une étoile parut au N. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au groupe du Grenier céleste (α, γ, δ, μ, Baleine) et disparut. Sa couleur était rouge jaunâtre; sa queue se dissémina. — 6^{e} lune, jour *wou-yn* (31 juillet), une étoile sortit de l'enceinte du *Tse-weï* (cercle de la perpétuelle Apparition), au S. du *Neï-tchu* (petites étoiles entre $\varkappa$, Dragon, et δ, grande Ourse); elle

était grande comme Vénus; elle alla lentement jusqu'à *Ta-kio* (Arcturus) et disparut. Sa couleur était rouge jaunâtre : elle avait une queue. — 8e lune, jour *ting-sse* (8 septembre), une étoile parut au S. du groupe *Louï-pi-tchin* (σ, π, Verseau; β, Poissons); elle était grande comme une tasse; elle coula lentement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-haï* (14 septembre), une étoile parut au N. de *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était semblable à Vénus; elle coula doucement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *koueï-yeou* (24 septembre), une étoile parut au S. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était pareille à Vénus; elle alla au S. E. jusqu'à l'étoile *Thsin* (δ, Serpent) de l'enceinte du Marché céleste (étoiles d'Ophiucus et du Serpent) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-yn* (29 septembre), une étoile sortit de l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *ki-mao* (30 septembre), une étoile parut à l'O. du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle coula doucement au N. jusqu'au *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et voisines) de l'enceinte du *Tse-weï* et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — 9e lune, jour *ki-yeou* (30 octobre), une étoile parut au N. du *Thien-kiaï* (ν, $\varkappa$, Taureau, au-dessus des Hyades); elle alla rapidement vers le groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était comme la précédente. — Jour *keng-su* (31 octobre), une étoile parut au S. du *Thien-thsang* (υ, η, τ, θ, Baleine); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 11e lune, jour *ki-tcheou* (9 décembre), une étoile parut dans l'intérieur du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était six fois grande comme Vé-

nus ; elle alla lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *y-oueï* (15 décembre), une étoile parut au N. du *Keou-tchin* (ν, ψ, ω, Scorpion); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre.

1082. 5e année, 4e lune, jour *keng-chin* (19 mai), une étoile parut au S. E. de *Kio* (α, Vierge); elle alla rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était comme les précédentes. — Jour *sin-oueï* (20 mai), une étoile parut au N. du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse et voisines); elle était grande comme Vénus ; elle alla rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 5e lune, jour *ki-tcheou* (7 juin), une étoile parut à l'O. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était grande comme Vénus ; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse et voisines) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 6e lune, jour *ting-mao* (15 juillet), une étoile parut à l'E. du *Thien-thsang* (η, λ, ι, θ, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'O. jusqu'au *Thien-tsun* (étoiles des Gémeaux, A, M, N) et disparut. Elle était rouge jaunâtre et eut une queue lumineuse : elle éclaira la terre. — Jour *ki-mao* (27 juillet), une étoile sortit du *Lang-weï* (chevelure de Bérénice); elle était pareille à Vénus ; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. Elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *sin-sse* (29 juillet), une étoile parut dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et du Serpentaire), au N. O. de l'étoile *Li-sse* (λ, Serpent); elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était comme les précédentes. — 10e lune, jour *keng-su* (26 octobre), une étoile parut au S. de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était grande comme Vénus ; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *sin-haï*

(27 octobre), une étoile parut au S. du Drapeau de *Tsan* (petites étoiles d'Orion, dans la peau de Lion); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement à l'E. vers le groupe *Kiun-tsing* ($\varkappa$, ι, λ, ν, Lièvre) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *kia-yn* (30 octobre), une étoile parut à l'O. du Serpent dressé (*Teng-che*) (λ, ι, $\varkappa$, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au S. et disparut dans *Hiu* (β, Verseau); elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-tseu* (9 novembre), une étoile parut au S. du *Taï* intermédiaire (λ, μ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — 11e lune, jour *sin-sse* (26 novembre), une étoile parut au S. O. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. O. et disparut dans les nuages. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-chin* (29 novembre), une étoile parut au N. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne). Elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au *Keou-tchin* du *Tse-weï* (ζ, petite Ourse; α, Polaire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante.

1083. Même année chinoise, 12e lune, jour *keng-chin* (4 janvier), une étoile parut à l'O. du *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *jin-chin* (16 janvier), une étoile parut au N. du *Taï* intermédiaire (λ, μ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre. — 6e année, 4e lune, jour *sin-yeou* (5 mai), une étoile parut au S. O. de *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement à l'O. jusqu'au *Thien-tsun* (étoiles A, n, m, Gémeaux) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour

ping-tseu (19 juillet), une étoile parut au N. O. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle alla rapidement au S. O. dans des vapeurs et disparut. — Jour *wou-yn* (21 juillet), une étoile parut à l'O. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était comme une petite écuelle; elle alla lentement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante; elle éclaira la terre. — Jour *ki-mao* (22 juillet), une étoile parut à l'E. du *Thien-thsang* (θ, $\varkappa$, ι, Bouvier); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *koueimao* (15 août), une étoile parut au S. O. du *Louï-pi-tchin* (σ, π, Verseau; β, Poissons); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *koueï-sse* (4 octobre), une étoile perça les nuages et parut au midi de *Wang-lang* (α, γ, δ, $\varkappa$, Cassiopée); elle était grande comme Vénus : elle alla rapidement au N. O. jusqu'à *Tchi* (α, β, Pégase) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *kia-ou* (5 octobre), une étoile parut au N. du *Teng-che* ($\varkappa$, ι, λ, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse. — Jour *ping-chin* (7 octobre), une étoile parut au N. du Navire céleste (α, γ, δ, ζ, Persée); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au N. O. jusqu'à *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était jaune rougeâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *koueï-mao* (14 octobre), une étoile parut au N. E. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle alla rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était comme les précédentes. — Jour *y-sse* (16 octobre), une étoile parut au N. E. de *Yukoueï* (θ, γ, δ, Cancer); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était jaune rougeâtre : elle eut une trace brillante

et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-chin* (31 octobre), une étoile parut au N. de *Oeï* (α, Verseau); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au *Khien-nieou* (β, α, Capricorne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *y-tcheou* (5 novembre), une étoile parut au S. O. de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — 10e lune, jour *sin-tcheou* (11 décembre), une étoile parut à l'O. de *Ta-kio* (Arcturus); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'à l'étoile principale de *Kio* (α, Vierge) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1084. 7e année, 4e lune, jour *sin-oueï* (9 mai), une étoile parut à l'E. de l'étoile *Ping* (2e au S. de α, Vierge, probablement γ, Hydre); elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était comme les précédentes. — Jour *ping-tseu* (14 mai), une étoile sortit de *Kang* (κ, ι, Vierge); elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à *Kio* (α, ζ, Vierge) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *keng-tchin* (17 juillet), une étoile parut au S. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. entra dans l'enceinte du Marché céleste vers l'étoile *Heou* (α, Ophiucus) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *koueï-sse* (20 juillet), une étoile parut à l'E. du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla promptement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *wou-tseu* (25 juillet), une étoile parut à l'O. du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au *Niu-tchoang* (η, σ, Hercule) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-yeou* (3 août), une étoile parut au S.

des étoiles de la Tortue (Couronne australe); elle était pareille à Vénus; elle alla promptement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *ping-ou* (18 août), une étoile parut au N. du *Ko-tao* (o, ν, ξ, τ, Cassiopée); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *ki-oueï* (25 août), une étoile parut à l'E. de *Oeï* (α, β, γ, Mouche); elle était semblable à Vénus; elle alla rapidement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse. — 8e lune, jour *sin-oueï* (6 septembre), une étoile parut à l'E. du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-sse* (28 septembre), une étoile parut à l'E. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'au Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une trace lumineuse. — 11e lune, jour *y-mao* (18 décembre), une étoile parut au S. de *Hiu* (β, Verseau); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-sse* (20 décembre), une étoile parut à l'E. du *Tsi-sing* (groupe de α, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1085. 8e année, 1re lune, jour *ting-ou* (8 février), une étoile, perçant les nuages, parut au S. de *Kio* (α, ζ, Vierge); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 2e lune, jour *ping-yn* (28 février), une étoile parut au S. de *Leou* (α, β, Bélier); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut.

Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *keng-tchin* (14 mars), une étoile parut au N. de l'enceinte *Thaï-weï*, au N. du *Tchi-fa* de gauche (η, Vierge); elle alla rapidement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. — Jour *kouei-ssc* (27 mars), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (ζ, petite Ourse et voisines); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *ki-tcheou* (21 juillet), une étoile parut à l'O. du Drapeau de droite (δ, Aigle et étoiles d'Antinoüs); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au midi jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante; sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *keng-chin* (20 août), une étoile sortit de l'astérisme *Oeï* (la Mouche); elle alla rapidement jusqu'au Grenier céleste (α, β, γ, Baleine) et disparut. — 10e lune, jour *jin-chin* (1er novembre), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. de *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement jusqu'au N. de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre). Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-tcheou* (6 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut au S. du *Thien-kun* (α, γ, δ, μ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *wou-tseu* (17 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. de *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-yn* (19 novembre), une étoile parut au S. du groupe *Mao* (les Pléiades); elle alla rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. — 12e lune, jour *y-sse* (4 décembre), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse et environnantes); elle était semblable à Vénus : elle alla vivement au N. jusqu'au *Thaï-tseu* (γ, petite

Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre.

1086. Période *yuen-yu*, 1re année, 1re lune, jour *koueï-sse* (21 janvier), une étoile parut au S. de l'étoile *Lang* (Sirius); elle fila vivement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-tcheou* (10 février), une étoile, perçant les nuages, parut au S. près de *Tchin* (γ, β, δ, Corbeau); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse et sa lueur éclaira la terre. — 2e lune, jour *ping-su* (15 mars), une étoile, perçant les nuages, parut près du *Tse-weï* (queue du Dragon), à l'O. du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla rapidement au N. O. jusqu'au N. de *Wang-lang* (β, α, γ, η, Cassiopée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre[1]. — Une autre étoile parut au N. du *Taï* supérieur ($\varkappa$, ι, grande Ourse); elle alla vivement au N. O. jusqu'au S. de *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 2e lune intercalaire, jour *keng-su* (8 avril), une étoile parut au S. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle coula lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — 5e lune, jour *jin-chin* (29 juin), une étoile parut au N. de *Niu* (ε, Verseau); elle alla vivement à l'E. jusqu'à l'E. de *Hiu* (β, Verseau) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *kia-tchin* (31 juillet), une étoile parut à l'O. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement au S. O. jusqu'au N. de *Oueï* (μ, ζ, queue du Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *ting-sse* (13 août), une étoile parut à l'E. du groupe *Fen-mo* (η, ζ, γ, Verseau); elle était grande comme Vénus;

[1] Cette apparition est placée par Ma-touan-lin à la deuxième année *youen-yu*.

elle coula doucement jusqu'au S. de *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *keng-chin* (15 octobre) une étoile parut au S. de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au midi, entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-su* (17 octobre), une étoile parut au N. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au N. O. atteignit des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante. — 10e lune, jour *keng-yn* (14 novembre), une étoile parut au S. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-tcheou* (25 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. près des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'au N. du Magasin céleste (α, γ, δ, ζ, Baleine) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ping-ou* (30 novembre), une étoile parut au S. de *Tchi* (α, Pégase; β, Pégase); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 11e lune, jour *wou-chin* (2 décembre), une étoile parut au N. du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était grande comme Vénus : elle coula vivement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante.

1087. 12e lune, jour *keng-yn* (13 janvier), une étoile parut au S. de la Ménagerie céleste (α, γ, δ, ε, Baleine); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante.

1087. 2e année, 1re lune, jour *kouei-yeou* (25 février), une étoile parut au S. de *Lieou* (δ, ρ, Hydre); elle était grande comme

une tasse; elle coula rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-sse* (5 mars), une étoile parut au midi de *Tchin* (γ, β, δ, Corbeau); elle était grande comme une tasse : elle alla vivement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était jaune rougeâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 2e lune, jour *jin-tseu* (5 avril), une étoile parut au S. du *Tchu-sse* (τ ou χ, Dragon); elle était grande comme une petite écuelle; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à l'E. du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et voisines) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 4e lune, jour *ping-ou* (29 mai), une étoile parut au S. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était semblable à Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'au Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *jin-yn* (24 juillet), une étoile parut à l'E. du *Wen-tchang* (θ, υ, ϕ, grande Ourse); elle était grande comme une tasse : elle coula rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *kia-yn* (4 octobre), une étoile parut dans l'enceinte du Marché céleste, au N. de la Montagne du milieu (ξ, Hercule, dans le bras gauche); elle alla rapidement à l'O. vers le groupe *Thien-ki* (ζ, ε, d, υ, θ, Hercule) et disparut. Elle était comme la précédente. — Jour *ting-tcheou* (27 octobre), une étoile parut au S. du *Louï-tien* (petites au S. de α, Pégase); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement à l'O. entra dans le Marché céleste, alla jusqu'à l'E. du groupe *Thsoung-tching* (β, γ, Ophiucus) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1088. 3e année, 2e lune, jour *ki-yeou* (27 mars), une étoile parut au S. du groupe *Kang* (κ, ι, Vierge); elle était grande comme une tasse : elle alla lentement au midi jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était jaune rougeâtre : elle eut une trace

brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *jin-ou* (28 juin), en plein jour, à l'heure *yeou* (5 h à 7 h du soir), après la huitième division horaire (6 h $\frac{3}{4}$), une étoile parut au S. O. elle ressemblait à une petite écuelle; elle coula vivement à l'E. vers l'alignement *mao* (de la boussole) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *keng-tseu* (16 juillet), une étoile parut au S. de *Toung-pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle alla rapidement au S. E. entra dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau et petites des Poissons) et disparut. — Jour *kia-tchin* (20 juillet), une étoile parut à l'O. de l'étoile *Weï* (δ, Hercule), du Marché céleste (enceinte d'étoiles autour de α, Ophiucus, et de α, Hercule); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à l'O. du *Keng-ho* (μ, ϱ, δ, Bouvier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Une autre étoile parut au S. du *Pi-lie* (petites des Poissons, au S. de γ, Pégase); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à l'E. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau et petites des Poissons) et disparut. — Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *koueï-sse* (7 septembre), le soir, une étoile, partant du zénith, se dirigea rapidement à l'E. vers des vapeurs et disparut; elle était comme les précédentes. — 11e lune, jour *wou-chin* (21 novembre), une étoile sortit du *Thien-siuen* (β, grande Ourse), dans le *Pe-teou;* elle était grande comme une tasse; elle coula jusqu'au Fleuve austral (α, β, petit Chien) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 12e lune intercalaire, jour *kia-tseu* (17 décembre), une étoile parut au N. du *Thien-tchu* (δ, ε, φ, π, Dragon); elle était grande comme Vénus; elle fila rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était jaune rougeâtre : elle eut une queue brillante.

1089, 4e année, 2e lune, jour *ki-yeou* (22 mars), une étoile parut à l'O. des *Cinq-Heou* (θ, ι, ν, φ, τ, Gémeaux); elle était semblable à Vénus : elle coula rapidement au N. des Cinq-Chars

(α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 3e lune, jour *wou-su* (10 mai), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. de la Fileuse (α, Lyre et deux petites); elle alla rapidement jusqu'à l'O. du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne) et disparut. — Jour *ki-haï* (11 mai), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. de *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle alla vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre et sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *jin-yn* (14 mai), une étoile sortit du *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *koueï* (le 2e caractère manque : 14 ou 24 juin, ou 4 juillet), une étoile parut au midi du *Thien-pien* (λ, *h*, *g*, Antinoüs; Écu de Sobieski); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement vers le N. de *Oueï* (μ, ζ, queue du Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 8e lune, jour *kia-tchin* (13 septembre), une étoile parut à l'E. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était pareille à Vénus; elle coula lentement vers l'E. du *Pi-lie* (tête du Poisson oriental) et disparut. Elle eut une queue brillante. — 9e lune, jour *ki-sse* (8 octobre), une étoile parut au S. E. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement vers le S. O. et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-ou* (21 octobre) une étoile, perçant les nuages, parut au N. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était semblable à Vénus; elle alla rapidement jusqu'à une ligne de vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 10e lune, jour *ting-sse* (5 décembre), une étoile parut au S. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1090. Même année chinoise, 11e lune, jour *ki-yeou* (16 janvier), une étoile sortit de l'astérisme *Fang* (β, δ, π, φ, Scorpion); elle coula au N. jusqu'au S. O. du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne) et disparut. Elle était comme les précédentes.

1090. — 5e année, 1re lune, jour *ki-yeou* (17 mars), une étoile parut dans le *Che-ti* de droite (η, τ, υ, Bouvier); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *kouei-tcheou* (20 mai), une étoile sortit du *Thien-tchu* (δ, ρ, ε, π, Dragon); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut dans le Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla vivement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Une troisième étoile parut près des étoiles du *Teou* du Marché céleste ($\varkappa$, χ, ι, Ophiucus); elle était grande comme une tasse; elle coula vivement vers l'O. du *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante qui éclaira la terre. — 5e lune, jour *kouei-yeou* (9 juin), une étoile parut dans le *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *keng-chin* (26 juillet), une étoile parut au N. de *Tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *sin-yeou* (27 juillet), une étoile sortit du groupe *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Une autre étoile sortit du *Chao-weï* ($\varkappa$, Dragon) dans le *Tse-weï* (Cercle de perpétuelle apparition); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O.

jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *sin-oueï* (6 août), une étoile sortit du groupe *Oeï* (α, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-oueï* (18 août), une étoile parut à l'O. du *Tou-sse* (Tête de Cerbère), dans le Marché céleste. Elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement à l'O. jusqu'au S. du *Kouan-so* (Couronne boréale) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-haï* (22 août), une étoile parut à l'O. du Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *kia-ou* (29 août), une étoile parut à l'O. de *Fang* (β, π, Scorpion); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-tseu* (4 septembre), une étoile parut dans le groupe *Neï-tchu* (petites au N. O. de δ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla vivement au N. du groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-mao* (7 septembre), une étoile parut à l'O. du groupe *Pa-ko* (étoiles de la Girafe); elle était semblable à Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — 9e lune, jour *sin-sse* (15 octobre), une étoile parut à l'O. du *Kiun-chi* (θ, ν, β, grand Chien); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace lumineuse. — Jour *y-yeou* (19 octobre), une étoile parut à l'O. du *Tchi-taï* (β, γ, Lyre); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement

jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-mao* (25 octobre), une étoile parut dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était pareille à Vénus; elle alla vivement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10^{e} lune, jour *kia-ou* (28 octobre), une étoile sortit de *Lieou* (δ, ρ, Hydre); elle était grande comme une petite écuelle; elle alla lentement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ki-oueï* (22 novembre), une étoile parut à l'O. du *Tche-fou* (π ou ν, ζ, Cygne); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement vers le N. jusqu'au S. O. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut au S. du *Tchu-sse* (χ ou τ, Dragon) dans le *Tse-weï;* elle était grande comme une tasse; elle alla lentement au S. O. jusqu'à l'E. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne), et disparut. Elle était rouge jaune : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 11^{e} lune, jour *jin-su* (25 novembre), une étoile parut au N. de l'étoile du Pôle, dans le *Tse-weï;* elle était grande comme Vénus; elle glissa rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante.

1091. Même année chinoise, 12^{e} lune, jour *ki-haï* (1er janvier), une étoile sortit de *Lieou* (δ, ρ, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle glissa au N. O. jusqu'au Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tchin* (18 janvier), une étoile parut à l'O. du *Kiouen-tche* (ν, ε, ζ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle glissa rapidement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante.

1091. 6^{e} année, 2^{e} lune, jour *sin-tcheou* (4 mars), une étoile parut à l'E. de l'astérisme *Y* (α, Hydre et Coupe); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue

brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tchin* (19 mars), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. du *Lang-tsiang* (*p*, chevelure de Bérénice); elle était semblable à Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au *Chao-weï* (*κ*, Dragon) de l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre — 5e lune, jour *i-yeou* (16 juin), une étoile parut dans le Marché céleste, au S. du groupe *Thsoung-jin* (*n*, *p*, *q*, Taureau de Poniatowski); elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement au N. O. jusque vers le midi du *Thsoung-sing* (*r*, *s*, Taureau de Poniatowski) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-haï* (18 juin), une étoile parut à l'E. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusque vers l'E. de l'étoile *Heou* (*α*, Ophiucus) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 6e lune, jour *ling-tchin* (17 juillet), une étoile, perçant les nuages, parut dans le *Thaï-weï*, au N. du *Lang-weï* (chevelure de Bérénice); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 7e lune, jour *koueï-haï* (24 juillet), deux étoiles percèrent les nuages; toutes deux étaient grandes comme la planète Vénus; l'une parut à l'E. du *Thien-thsang* (*θ*, *ι*, *κ*, Bouvier); elle coula rapidement au S. O. jusque vers l'E. de *Kang* (*κ*, *ι*, Vierge) et disparut; l'autre parut à l'E. de *Kocï* (*β*, *ζ*, Andromède); elle alla rapidement au S. O. jusque vers l'E. du *Louï-pi-tchin* (*σ*, *π*, Verseau; *β*, Poissons) et disparut. Elles étaient rouge jaunâtre : elles eurent des queues brillantes. — 9e lune, jour *kia-yn* (12 novembre), une étoile parut au N. du Gué céleste (*α*, *γ*, *δ*, *η*, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au N. E. jusqu'au *Neï-kiaï* (*τ* et petites vers l'œil de la grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *jin-su* (20 novembre), une étoile parut au S. de *Leou* (*α*, *β*, Bélier); elle

était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. E. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-mao* (25 novembre), une étoile parut au N. E. elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Une autre étoile parut au S. du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était pareille à Vénus : elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre.

1092. 7^{e} année, 2^{e} lune, jour *wou-ou* (15 mars), une étoile parut au S. E. du *Pae-koua* (ε, Dauphin); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement jusque vers l'E. de l'astérisme *Hiu* (β, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-su* (31 mars), une étoile parut à l'O. de l'étoile *Ping* (γ, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ki-mao* (5 avril), une étoile parut au N. O. de l'étoile Souverain (β, petite Ourse), dans l'enceinte du *Tse-weï;* elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-oueï* (9 avril), une étoile parut à l'E. de l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement vers le S. de *Oueï* (μ, ζ, Scorpion) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 3^{e} lune, jour *sin-haï* (7 mai), une étoile parut au N. du Gond céleste du pôle N. (α, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 4^{e} lune, jour *koueï-haï* (19 mai), une étoile parut à l'E. du *Lien-tao* (η, θ, ρ, Lyre); elle était grande comme Vénus; elle coula

rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.—Jour *kia-tseu* (20 mai), une étoile, perçant les nuages, parut au S. de l'étoile *Yen* (τ, ν, Serpent), de l'enceinte du Marché céleste; elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-sse* (6 juin), une étoile parut au N. O. de *Nieou* (β, α, Capricorne); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement jusque vers l'O. du groupe *Louï-pi-tchin* (σ, π, Verseau; β, Poissons) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *keng-ou* (25 juillet), une étoile parut au S. du *Teng-che* ($\varkappa$, λ, ι, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement vers le N. E. du *Hou-koua* (α, β, γ, δ, Dauphin) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-haï* (30 juillet), une étoile parut à l'E. du *Kotao* (ν, o, ξ, τ, Cassiopée); elle était semblable à Vénus; elle coula rapidement jusque vers le N. du Navire céleste (α, γ, δ, η, Persée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *sin-oueï* (24 septembre), une étoile parut au S. de la principale étoile de *Koeï* (ζ, o, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *kia-tchin* (27 octobre), une étoile parut à l'O. du Drapeau de *Tsan* (petites étoiles d'Orion, dans la peau de Lion); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue lumineuse et sa lueur éclaira la terre.

1093. 8e année, 1re lune, jour *kia-chin* (4 février), une étoile parut au S. de l'étoile *Heou* (α, Ophiucus), dans le Marché céleste; elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au S. E. jusque vers le S. de *Ki* (γ, Sagittaire) et disparut. Elle

était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 3e lune, jour *keng-yn* (11 avril), une étoile, perçant les nuages, parut au S. E. du *Che-ti* de gauche (ξ, π, ζ, Bouvier); elle était pareille à Vénus; elle coula doucement au N. E. jusqu'à des vapeurs. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Une autre étoile parut dans le Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'au S. du groupe *Tchi-taï* (β, γ, Lyre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue lumineuse et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *sin-tcheou* (21 juin), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. du *Thien-tchou* (δ, ε, π, ρ, Dragon), de l'espace *Tse-weï;* elle était grande comme Vénus ; elle coula rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *keng-chin* (10 juillet), une étoile parut au N. de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement jusqu'à l'O. de *Kio* (α, Vierge) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *jin-su* (10 septembre), une étoile parut au milieu du ciel ; elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *keng-ou* (18 septembre), une étoile parut au N. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *sin-mao* (9 octobre), une étoile parut dans le *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au midi. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. Elle entra dans les Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. — Jour *y-oueï* (13 octobre), une étoile, perçant les nuages, parut au S. du

groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-yeou* (15 octobre), une étoile parut à l'O. du groupe *Pae-koua* (ε, Dauphin); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'au N. du *Thien-pien* (λ, h, g, Antinoüs; Écu de Sobieski) et disparut. Elle était rouge-jaune : elle eut une queue brillante et sa trace éclaira la terre. — Une autre étoile parut au N. du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était semblable à Vénus; elle coula rapidement au N. jusqu'à l'O. du *Chang-fou* (λ, Dragon) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante. — Jour *ki-haï* (17 octobre), une étoile, perçant les nuages, parut au S. de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, η, Éridan); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-mao* (21 octobre), une étoile parut au S. O. de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, η, ζ, Éridan); elle était semblable à Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10^{e} lune, jour *y-sse* (23 octobre), une étoile parut au N. du *Ing-tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au N. du Drapeau de gauche (ρ, Aigle et autres de la Flèche) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-chin* (26 octobre), une étoile parut au S. E. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme une tasse; elle alla au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut à l'O. du *Pi* oriental (γ, Pégase; α, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. jusqu'au groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau et petites des Poissons) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre.

1094. Période *Tchao-ching*, 1re année, 1re lune, jour *jin-ou* (28 janvier), en plein jour, une étoile parut au milieu du ciel; elle était grande comme la planète Vénus; elle coula rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre.—Jour *ping-su* (1er février), une étoile parut au N. du *Keou-tchin* (ζ, α, petite Ourse); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au N. E. jusqu'au *Pe-teou* (les sept principales, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre.—Jour *ting-yeou* (12 février), une étoile perça les nuages et parut à l'O. du *Yao-kouang* (η, grande Ourse) dans le *Pe-teou;* elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — 2e lune, jour *ping-ou* (22 février), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. de *Pi* (le Mur; γ, Pégase; α, Andromède); elle alla lentement et entra dans des vapeurs. — Jour *keng-ou* (17 mars), une étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon et Cercle de perpétuelle apparition), au S. O. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était semblable à une tasse; elle coula rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une trace brillante, et sa lumière éclaira la terre. — 4e lune, jour *sin-yeou* (7 mai), une étoile parut au S. du *Yao-kouang* (η, grande Ourse) dans le *Pe-teou;* elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. jusqu'à *Ta-kio* (Arcturus) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre.— 6e lune, jour *kouei-yeou* (18 juillet), une étoile parut au S. des étoiles de l'Homme (petites étoiles de Pégase ou du petit Cheval); elle alla jusqu'à *Nieou* (β, Capricorne). — Jour *ting-tcheou* (22 juillet), en plein jour, une étoile volante parut au S. E. elle alla vivement au N. O. jusqu'au milieu du ciel et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une trace brillante et éclaira la terre.—Jour *y-oueï* (9 août), une étoile parut au S. E. de *Nieou* (β, α, Capricorne); elle était grande comme la planète

Vénus; elle alla rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-chin* (10 août), une étoile, perçant les nuages, parut au N. de l'astérisme *Tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. entra dans le Marché céleste jusqu'à l'O. du groupe *Thsoung-tching* (β, γ, Ophiucus) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 8e lune, jour *wou-su* (11 octobre), une étoile parut au S. de *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'au Magasin céleste (α, γ, δ, η, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *keng-tseu* (13 octobre), une étoile parut au S. du Magasin céleste (α, γ, δ, η, Baleine); elle était grande comme Vénus ; elle alla rapidement vers l'entrée des neuf *Tcheou* (petites étoiles entre ν, Taureau et l'Éridan) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-sse* (30 octobre), une étoile, perçant les nuages, parut au S. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-yeou* (3 novembre), une étoile parut à l'O. du *Thien-pien* (λ, h, g, Antinoüs; Écu de Sobieski); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-yn* (8 novembre), une étoile parut à l'E. du groupe *Tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement vers des vapeurs et disparut: elle était bleu blanchâtre. — Jour *wou-tchin* (10 novembre), une étoile parut au S. du *Keou-tchin* (ζ, α, petite Ourse et voisines) de l'enceinte du *Tse-weï;* elle était grande comme une tasse; elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10e lune,

jour *ki-sse* (11 novembre), une étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï* (queue du Dragon); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *koueï-yeou* (15 novembre), une étoile parut dans le groupe *Hien-youen* (α, γ, η, ζ, Lion); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-chin* (26 novembre), une étoile parut dans le groupe *Thien-thsang* (θ, ι, κ, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement jusqu'au *Taï* supérieur (κ, ι, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-mao* (3 décembre), une étoile parut à l'E. de *Koueï* (θ, γ, δ, Cancer); elle était grande comme Vénus; elle fila rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 11e lune, jour *keng-tseu* (12 décembre), une étoile parut au N. O. du Gond céleste du *Pe-teou* (α, grande Ourse); elle était grande comme une tasse; elle fila rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-su* (3 janvier 1095), une étoile parut à l'astérisme *Sing* (α, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement vers l'O. du *Thien-tsi* (η, γ, δ, Mât du Navire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante, et sa lueur éclaira la terre. Une autre étoile parut au S. du *Thien-miao* (étoiles du Navire au S. de ν, Hydre); elle était grande comme une tasse; elle alla lentement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre, et sa lueur éclaira la terre. — 12e lune, jour *sin-oueï* (12 janvier 1095), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. du groupe *Lieou* (δ, ρ, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'à *Tchang* (ν, Hydre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-ching* (13 janvier 1095), une étoile parut dans le *Thien-tchou*

(δ, ε, σ, π, Dragon); elle était pareille à Vénus; elle fila rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue lumineuse.

1095. Même période, 2e année, 3e lune, jour *ting-oueï* (18 avril), une étoile parut à l'O. de *Oeï* (α, Verseau); elle était grande comme une tasse; elle fila rapidement à l'O. jusqu'au S. du *Pae-koua* (ε, Dauphin) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tchin* (27 avril), une étoile parut au N. E. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était semblable à une tasse; elle alla lentement à l'E. jusqu'au N. de l'astérisme *Tchi* (α, β, Pégase) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 4e lune, jour *kia-chin* (25 mai), une étoile, perçant les nuages, parut au S. du *Taï* supérieur ($\varkappa$, ι, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *koueï mao* (13 juin), une étoile parut à l'E. du *Tchi-taï* (β, γ, Lyre). Elle était pareille à Vénus; elle alla rapidement au N. E. jusqu'au S. des étoiles de l'Homme (étoiles du petit Cheval) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-yn* (24 juin), une étoile parut au N. E. du *Ko-tao* (ν, o, ξ, π, Cassiopée); elle était pareille à Vénus; elle fila rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *sin-yeou* (1er juillet), une étoile, perçant les nuages, parut au N. O. des étoiles *Kien* (ξ, π, φ, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au S. de l'astérisme *Ki* (γ, Sagittaire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *jin-ou* (22 juillet), une étoile, perçant les nuages, parut au N. du groupe *Louï-pi-tchin* (σ, π, Verseau; β, Serpent); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blan-

châtre : elle eut une trace brillante et sa lumière éclaira la terre. — 7e lune, jour *sin-tcheou* (20 août), une étoile parut à l'E. des bouches des neuf *Tcheou* (petites étoiles entre ν, Taureau, et l'Éridan); elle était pareille à Vénus; elle coula lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — Jour *y-sse* (24 août), une étoile parut au N. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était pareille à l'ouverture d'une tasse; elle coula vivement au N. E. jusqu'à l'E. du *Neï-kiaï* (étoiles de la tête, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-chin* (29 août), une étoile parut au S. O. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était semblable à Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9e lune, jour *y-oueï* (30 ctobre), une étoile parut au S. O. du Gond céleste du *Pe-teou* (α, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-yeou* (5 octobre), une étoile parut à l'E. de *Tso-keng* (ρ, π, μ, Bélier); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse : elle coula vivement au N. O. jusqu'à l'O. du *Taï* supérieur ($\varkappa$, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — Jour *keng-su* (18 octobre), une étoile parut au S. O. du *Waï-tchou* (α, $\varkappa$, Cancer, ou *q*, *r*, Licorne); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *koueï-haï* (31 octobre), une étoile parut à l'E. du *Tse-sing* (α, β, γ, δ, Lièvre); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-tseu* (1er novembre), une étoile parut à l'E. du *Lien-tao* (η, θ,

π, Lyre); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au S. O. jusqu'au S. du *Tchi-taï* (β, γ, Lyre) et disparut. Elle était rouge jaune : elle eut une trace brillante. — Une autre étoile parut au N. O. du *Teng-che* ($\varkappa$, λ, ψ, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-yn* (3 novembre), une étoile parut au S. du *Thien-thsang* (ι, η, θ, τ, Baleine); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-tchin* (5 novembre), une étoile parut au S. E. de *Mao* (les Pléiades); elle était semblable à Vénus; elle coula vivement à l'O. jusqu'au S. du *Thien-yn* (δ, ζ, Bélier) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lumière éclaira la terre. — Jour *kia-su* (11 novembre), une étoile parut au S. de *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au S. E. jusqu'au S. du *Thien-thsang* (ι, η, θ, τ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-su* (23 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut au N. du Drapeau de *Tsan* (petites étoiles d'Orion, dans la peau de Lion); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement à l'E. jusqu'au N. de *Tse* (λ, Orion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ting-haï* (24 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. de l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle coula vivement à l'E. jusqu'au N. de *Oeï* (α, β, γ, Mouche) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-yn* (27 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut au S. de *Tchang* (ν, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 11^{e} lune, jour *koueï-sse* (30 no-

vembre), une étoile parut à l'O. du *Waï-ping* (δ, ε, ζ, μ, Poissons); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à l'O. du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *keng-chin* (27 décembre), une étoile parut au S. O. du *Waï-ping* (δ, ε, ζ, μ, Poissons); elle était grande comme Vénus : elle coula lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace lumineuse. — 12e lune, jour *kia-tseu* (31 décembre), une étoile, perçant les nuages, parut au milieu du ciel; elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-tchin* (4 janvier 1096), une étoile, perçant les nuages, parut au N. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre.

1096. Même période, 3e année, 2e lune, jour *ping-tseu* (12 mars), une étoile, perçant les nuages, parut dans le *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion); elle alla lentement jusqu'à des vapeurs et disparut. — 4e lune, jour *keng-chin* (25 avril), une étoile parut au S. O. du *Kouan-so* (Couronne boréale); elle était semblable à Vénus; elle coula vivement vers l'E. du *Niu-tchoang* (η, σ, ou π, ρ, Hercule) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *i-oueï* (30 mai), une étoile parut à l'O. de l'étoile *Ping* (γ, Hydre); elle était grande comme une tasse : elle fila rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle avait une queue et éclaira la terre. — Jour *sin-tcheou* (5 juin), une étoile parut au S. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement jusqu'au S. E. du *Tchi-taï* (β, γ, Lyre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 6e lune, jour *jin-su* (26 juin), une étoile parut

au S. du *Niu-tchoang* (η, σ, ou π, φ, Hercule); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement vers l'O. de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7^e lune, jour *kouei-tcheou* (16 août), une étoile parut au N. de *Tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. E. du *Thien-thsang* (ι, η, θ, τ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-mao* (18 août), une étoile, perçant les nuages, parut au S. de *Goei* (α, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-sse* (20 août), une étoile parut à l'E. de *Tso-keng* (ε, π, ρ, Bélier); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement jusqu'au N. de *Tse* (λ, Orion) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8^e lune, jour *kouei-haï* (26 août), une étoile parut au S. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement vers le N. du Fléau céleste (β, γ, Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une trace lumineuse. — Jour *y-ycou* (17 septembre), une étoile parut au S. du *Thien-thsang* (θ, $\varkappa$, ι, Bouvier); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 9^e lune, jour *y-ouei* (27 septembre), une étoile parut au N. des Sept-Illustres (μ, Bouvier; τ, Hercule; ζ, λ, Couronne); elle était grande comme Vénus : elle coula lentement jusqu'au N. de *Kio* (α, ζ, Vierge) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une trace brillante et sa lumière éclaira la terre. — Jour *ting-ouei* (9 octobre), une étoile parut au N. O. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'au S. du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante et sa

lueur éclaira la terre. — Jour *sin-haï* (13 octobre), une étoile parut à l'O. de *Yeou-keng*[1] (ρ, η, Poissons); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement jusqu'à l'E. de *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut. Elle était rouge jaunâtre et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-tseu* (14 octobre), une étoile parut au S. du *Thien-thsang* (ν, η, τ, θ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — Une autre étoile parut au S. de *Mao* (les Pléiades); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse. Elle coula lentement jusqu'au groupe des Rois ($\varkappa$, φ et autres du dos du Taureau) et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *kouei-tcheou* (15 octobre), une étoile parut à l'E. de l'étoile *Thien-siouen* du *Pe-teou* (β, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au S. O. du *Lien-tao* (η, θ, π, Lyre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — Une autre étoile parut au N. O. du *Ko-tao* (ν, ξ, o, π, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement à l'O. du Camp du général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-yn* (16 octobre), une étoile parut au S. O. de *Lieou* (δ, Hydre); elle était semblable à Vénus; elle coula vivement vers l'étoile *Ping* (μ, β, Lièvre) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile parut au N. O. du *Wen-tchang* (θ, ν, φ, grande Ourse); elle était grande comme une tasse; elle coula vivement vers l'O. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et voisines) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *ki-ouei* (21 octobre), une étoile parut à l'O. des étoiles *Ou* et *Youe* (ζ, ε, Aigle) du Marché céleste; elle était grande comme Vénus; elle coula vivement vers

[1] On lit dans le texte *Yeou-sse*, et plus haut *Tso-sse*. Je crois que ce sont deux fautes, et qu'il faut lire *Yeou-keng*, *Tso-keng*, comme dans le *Pou-thien-ko*.

des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-tcheou* (8 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut au S. O. de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-ou* (13 novembre), une étoile parut au S. E. du *Kang-tche* (μ, Vierge; δ, ξ, Balance); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace lumineuse et elle éclaira la terre. — 11e lune, jour *koueï-sse* (24 novembre), une étoile parut au S. E. des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était semblable à Vénus; elle coula lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-ou* (25 novembre), une étoile parut au N. O. du *Lang-weï*, dans le *Thaï-weï* (Chevelure de Bérénice); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement vers le N. du *Tchcou-ting* (σ et petites, Vierge) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-su* (29 novembre), une étoile parut au N. de *Lieou* (δ, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement vers l'O. du groupe *Hien-youen* (α, γ, ζ, η, Lion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-tseu* (13 décembre), une étoile parut à l'O. du *Thaï-i* (*i*, Dragon) du *Tse-weï;* elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au S. du *Fou-tchi* (*c*, *y*, près τ, Baleine) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 12e lune, jour *ting-sse* (18 décembre), une étoile parut au N. du Fleuve austral (α, β, petit Chien); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1097. 4e année, 1re lune, jour *kia-tchin* (3 février), une étoile parut au S. du *Khaï-yang* (ζ, grande Ourse) du *Pe-tcou;* elle était

grande comme Vénus; elle coula vivement au N. E. jusqu'au *Keou tchin* (α, ζ, petite Ourse et environnantes) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 2^e lune, jour *wou-ou* (17 février), une étoile parut au S. de *Tsing* (μ, Gémeaux); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. E. jusqu'au N. O. du groupe Arc et Flèche (η, γ, δ, grand Chien) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tseu* (7 mars), une étoile parut au N. de *Sing* (α, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. jusqu'à l'O. du Gond de droite (α, Dragon) de l'enceinte du *Tse-weï* et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 3^e lune, jour *ki-oueï* (19 avril), en plein jour, une étoile parut au S. E. dans la direction *ping*, E. $\frac{5}{6}$ S. elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à la direction *weï*, S. $\frac{1}{3}$ O. et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 4^e lune, jour *jin-tchin* (22 mai), une étoile parut au S. E. du *Thien-youen* (α, β, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 5^e lune, jour *kia-su* (3 juillet), une étoile parut à l'E. des étoiles de l'Homme (étoiles du petit Cheval); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement à l'E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *keng-tchin* (9 juillet), une étoile parut au S. O. du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse et voisines); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6^e lune, jour *kia-chin* (13 juillet), une étoile parut au S. O. de l'astérisme *Kang* (κ, ι, Vierge); elle coula rapidement à l'O. jusqu'à des vapeurs et disparut. — Jour *i-oueï* (24 juillet), une étoile parut à l'E. du *Chao-fou* (*d*, grande Ourse) du *Tse-weï;* elle était grande comme Vénus; elle

coula vivement au N. O. jusqu'à l'O. du Poids céleste, dans le *Peteou* (δ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-ou* (4 août), une étoile, perçant les nuages, parut au N. O. du *Wang-lang* (α. β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-chin* (6 août), une étoile, perçant les nuages, parut au N. O. de *Tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à ce qu'elle fût au S. du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse et voisines) et elle disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7^{e} lune, jour *ping-tchin* (14 août), une étoile parut au N. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'à ce qu'elle fût à l'O. du Fléau céleste (β, γ, Dragon), où elle disparut. Elle était rouge jaunâtre. — Jour *wou-ou* (16 août), une étoile, perçant les nuages, parut au S. du *Pac-koua* (α, β, γ, δ, Dauphin); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement à l'E. jusqu'à ce qu'elle arrivât au S. O. des étoiles de l'Homme (étoiles du petit Cheval) où elle disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-tseu* (3 septembre), une étoile parut au S. du *Pao-koua* (α, β, γ, δ, Dauphin); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à ce qu'elle fût à l'O. de *Nieou* (β, α, Capricorne), et elle disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8^{e} lune, jour *ki-yeou* (6 octobre), une étoile parut à l'étoile *Nan-haï* (ξ, Serpent) du Marché céleste; elle coula lentement au S. O. jusqu'à des vapeurs et elle disparut. Sa couleur était bleu blanchâtre. — Une autre étoile parut à l'O. du Camp du grand Général céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle); elle coula vivement au N. O. jusqu'à ce qu'elle fût au S. de *Tchi* (α, β, Pégase), et elle disparut. Elle était rouge jaunâtre : ces deux étoiles étaient

grandes comme Vénus. Elles eurent une queue brillante et leur lumière éclaira la terre. — 9e lune, jour *jin-tseu* (9 octobre), une étoile parut au N. O. du *Niu-tchoang* (η, σ, ou π, ρ, Hercule); elle était semblable à Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à ce qu'elle fût au N. des étoiles du *Teou* du Marché céleste (ω, h, k, ι, Ophiucus) et elle disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-mao* (12 octobre), une étoile parut à l'O. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle coula vivement au S. O. et disparut à l'O. du groupe *Toung-haï* (ν, ζ, Serpent) du Marché céleste : elle était rouge jaune. Une autre étoile parut à l'E. du Jardin céleste (ι, $\varkappa$, χ, φ, Éridan); elle coula vivement au S. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. Toutes deux étaient grandes comme la planète Vénus; toutes deux eurent une trace brillante et une lumière assez vive pour éclairer la terre. — Jour *wou-ou* (15 octobre), une étoile, perçant les nuages, parut à l'O. de *Nieou* (β, α, Capricorne); elle était grande comme une tasse; elle coula vivement au S. O. et disparut au N. des étoiles *Kien* (ξ, π, ρ, Sagittaire). Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — Jour *ting-mao* (24 octobre), une étoile parut à l'O. du Fléau céleste (β, γ, Dragon); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 10e lune, jour *ting-yeou* (23 novembre), une étoile parut au N. E. du *Thien-kouan* (ζ, Taureau); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-tcheou* (27 novembre), une étoile, perçant les nuages, parut au N. du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au N. et disparut au N. du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, ζ, petite Ourse et voisines). Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 12e lune, jour *kia-chin* (9 janvier 1098), une étoile

parut dans le *Thaï-weï*, à l'O. des cinq *Hcou* (petites de la Vierge); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement au S. O. et disparut au S. du *Ming-tang* (ν, ε, φ, Lion). Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — Jour *koueï-sse* (18 janvier 1098), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. du *Thien-miao* (étoiles du Navire au S. de ν, Hydre); elle était pareille à Vénus; elle coula lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-sse* (30 janvier 1098), une étoile parut au S. du *Taï* intermédiaire (λ, μ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle coula lentement au S. O. et disparut au N. des *Pa-ko* (étoiles de la Girafe). Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ting-oueï* (1^er^ février 1098), une étoile parut au N. O. du *Thien-thsang* (ι, η, τ, θ, Bouvier); elle alla rapidement au S. jusqu'au N. de *Louï-pi-tchin* (σ, φ, Verseau; β, Poissons) et disparut. Elle était rouge jaunâtre. Une autre étoile parut au N. O. du *Thien-thsang* (ι, η, τ, θ, Baleine); elle coula rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. Ces deux étoiles étaient semblables à Vénus; toutes deux eurent une queue et leur lumière éclaira la terre.

1098. Période *Youen-fou*, 1^re^ année, 2^e^ lune, jour *ting-haï* (13 mars), une étoile parut au N. de *Tsing* (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement jusqu'à *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-chin* (3 avril), une étoile parut à l'E. du groupe *Thsoung-tching* (β, γ, Ophiucus); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'au S. du *Thien-kiang* (A, θ, B, φ, Ophiucus) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 3^e^ lune, jour *kia-su* (29 avril), une étoile parut au groupe *Ming-tang* (ν, ε, φ, Lion); elle coula vivement au S. et disparut à l'O. du *Tou-sse-kioung* (β, ξ, Hydre, au S. du Corbeau). Une autre étoile parut au N.

du *Thien-jou* (ω, Serpent); elle alla vivement jusqu'à *Kio* (α, ζ, Vierge) et disparut. Ces deux étoiles étaient grandes comme Vénus; elles étaient de couleur rouge jaunâtre. Elles eurent une queue brillante et éclairèrent la terre. — 4^{e} lune, jour *y-yeou* (10 mai), une étoile, perçant les nuages, parut dans le *Kiouen-che* (ν, ε, Persée); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle coula lentement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue brillante. — Jour *wou-tseu* (13 mai), une étoile parut à l'O. de *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *ping-ou* (31 mai), une étoile parut au S. du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle alla lentement jusqu'à des vapeurs et disparut. Une autre étoile parut au S. E. de l'étoile *Ping* (γ, Hydre); elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Ces deux étoiles étaient grandes comme l'ouverture d'une tasse. Elles étaient de couleur bleu blanchâtre: elles avaient des queues brillantes. — 5^{e} lune, jour *keng-su* (4 juin), une étoile parut au S. de l'astérisme *Teou* (φ, σ, τ, μ, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-tchin* (22 juin), une étoile parut au S. E. du Drapeau de gauche (ρ, Aigle, et petites de la Flèche); elle était grande comme Vénus : elle coula rapidement jusqu'à l'E. du *Taï* inférieur (ν, ξ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-yeou* (27 juin), une étoile parut à l'E. de *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus : elle coula rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6^{e} lune, jour *koueï-sse* (17 juillet), une étoile parut au S. E. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était grande comme une tasse : elle alla jusqu'à l'E. de *Tchi* (α, β, Pégase) et disparut. Elle était bleu

blanchâtre; elle eut une queue brillante. Une autre étoile parut dans *Tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme une tasse; elle alla vers l'E. de *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *sin-tcheou* (25 juillet), une étoile parut dans l'astérisme *Ki* (γ, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement vers *Oueï* (μ et autres de la queue du Scorpion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-yn* (26 juillet), une étoile parut à l'O. de *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse); elle était pareille à Vénus; elle coula doucement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 7^{e} lune, jour *ting-oueï* (31 juillet), une étoile parut au N. O. du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'à l'E. des étoiles *Kien* (ξ et autres, Sagittaire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante, et sa lueur éclaira la terre. — Jour *kia-yn* (7 août), une étoile parut au N. E. du *Teng-che* (ι, $\varkappa$, λ, Andromède); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement vers l'E. du *Ko-tao* (ξ, ν, o, π, Cassiopée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *y-mao* (8 août), une étoile parut au N. E. de *Tu-kio* (Arcturus); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue brillante. — Jour *ting-sse* (10 août), au commencement de l'heure *su* (sept à neuf heures du soir), une étoile parut vers l'E. elle était semblable à l'ouverture d'une tasse; elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *koueï-haï* (16 août), une étoile parut au S. du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et voisines); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement jusqu'au N. du *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8^{e} lune, jour *jin-tchin* (14 septembre), du côté du S. O. une

étoile sortit du milieu des vapeurs; elle était grande comme une tasse; elle traversa lentement le ciel jusqu'à l'O. de l'étoile Gond céleste du *Pe-teou* (α, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 9^{e} lune, jour *kouei-hai* (15 octobre), une étoile parut au S. E. du *Thien-kiun* (α, γ, δ, ζ, Baleine); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *ping-yn* (18 octobre), une étoile parut à l'O. de *Tsing* (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'au N. O. de *Tchi* (α, β, Pégase) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10^{e} lune, jour *ting-yeou* (18 novembre), une étoile parut au S. de *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle coula vivement vers l'O. de *Niu* (ε, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 11^{e} lune, jour *sin-oueï* (22 décembre), une étoile parut au S. de *Oeï* (α, β, γ, Mouche); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au S. O. de *Leou* (α, β, Bélier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1099. 2^{e} année, 1re lune, jour *sin-yeou* (10 février), une étoile parut au S. E. du *Thaï-yang-cheou* (χ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 2^{e} lune, jour *ping-chin* (17 mars), une étoile parut à l'E. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse et voisines); elle était grande comme Vénus; elle alla lentement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre. — Jour *jin-yn* (23 mars), une étoile parut au S. O. de l'étoile *Tchao* (λ, Hercule) du Marché céleste; elle était grande comme Vénus; elle coula vivement jusqu'aux étoiles *Ou* et *Youe* (ζ, ε, Aigle, dans la Voie lactée) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour

koueï-mao (24 mars), une étoile parut au N. du *Ling-taï* (*p*, *q*, *g*, Lion); elle était grande comme Vénus); elle alla lentement à l'O. jusqu'au groupe *Hien-youen* (α, γ, ζ, η, Lion) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *wou-tchin* (17 juin), une étoile parut au S. O. de *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *ting-yeou* (16 juillet), une étoile parut à l'E. de *Kang-tche* (μ, Vierge; δ, ξ, Balance); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au N. O. jusqu'au *Chang-tsiang* du Drapeau oriental (ε, Vierge), dans le *Thaï-weï*, et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *wou-su* (17 juillet), une étoile, perçant les nuages, parut au S. du groupe *Loui-pi-tchin* (σ, π, Verseau; β, Poissons); elle était grande comme Vénus; elle alla rapidement au S. E. jusqu'au groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — 8e lune, jour *y-oueï* (12 septembre), une étoile, perçant les nuages, parut à l'E. du *Ko-tao* (ν, o, ξ, π, Cassiopée); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur s'étendit jusqu'à terre. — 9e lune, jour *ki-sse* (16 octobre), une étoile parut au S. E. de *Mao* (les Pléiades); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au S. jusqu'à la Ménagerie céleste (γ, δ, ζ, η, ε, Éridan) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lumière s'étendit jusqu'à terre. — 9e lune intercalaire, jour *i-haï* (22 octobre), une étoile parut à l'O. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. entra dans l'intérieur du Marché céleste (enceinte d'étoiles du Serpent, d'Ophiucus, d'Hercule, autour d'α, Hercule) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur s'étendit jusqu'à terre. Une

autre étoile parut au S. E. de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, η, Éridan); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue brillante et sa lumière éclaira la terre. — 10e lune, jour *sin-tcheou* (17 novembre), une étoile parut au N. O. de l'astérisme *Niu* (ε, Verseau); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. et disparut au N. O. de *Nieou* (β, α, Capricorne). Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *koueï-mao* (19 novembre), une étoile parut à l'E. du *Taï* supérieur (κ, ι, grande Ourse); elle était comme Vénus; elle coula vivement au N. O. jusqu'au groupe *Wen-tchang* (θ, υ, φ, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — Jour *jin-su* (28 novembre), une étoile parut au S. de *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle était pareille à Vénus; elle coula rapidement au S. entra dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle était rouge blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 11e lune, jour *ping-tseu* (22 décembre), une étoile parut à l'E. du groupe *Yn-te* (petites entre α, Dragon, et β, petite Ourse); elle était pareille à Vénus; elle alla lentement au N. E. entra dans le carré du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante. — Jour *keng-yn* (5 janvier 1100), une étoile parut à l'E. du *Taï* intermédiaire (λ, μ, grande Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1100. Même période, 3e année, 5e lune, jour *koueï-sse* (6 juillet), une étoile parut dans l'astérisme de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle coula lentement au N. O. jusqu'à l'étoile *Yao-kouang* du *Pe-teou* (η, grande Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur s'étendit jusqu'à terre.

1101. Période *Kien-tchoung-tsing-koue*, 1re lune, jour *koueï-haï* (1er février), une étoile parut au S. O. elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au N. E. atteignit l'étoile principale de l'astérisme *Oueï* (μ, Scorpion) et disparut. Elle était bleu noirâtre : elle n'eut pas de queue lumineuse.

1102. Période *Tsoung-ning*, 1re année, 3e lune, jour *keng-tchin* (14 avril), une étoile sortit de l'astérisme *Tchang* (déterminatrice, 39; ν, Hydre); elle était grande comme l'étoile d'Or (Vénus); elle alla promptement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était comme les précédentes. — 5e lune, jour *ting-mao* (31 mai), une étoile sortit de l'astérisme *Oueï* (μ, ζ, Scorpion); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle alla lentement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune intercalaire, jour *koueï-yeou* (5 août), une étoile sortit de l'astérisme *Teou* (φ, σ, τ, Sagittaire); elle alla doucement au S. O. jusqu'aux étoiles *Kien* (ξ, π, ρ, Sagittaire) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante. Plusieurs petites étoiles la suivaient. — 8e lune, jour *ki-oueï* (20 septembre), une étoile sortit du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était grande comme une tasse; elle coula vivement vers un espace trouble et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *jin-tseu* (12 novembre), une étoile parut dans le Navire céleste (α, γ, δ, Persée); elle était grande comme une petite écuelle; elle fila rapidement jusqu'au groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était bleu noirâtre, avec une queue. On entendit un bruit répété. — 12e lune, jour *ki-mao* (7 février 1103), une étoile sortit de *Leou* (α, β, Bélier); elle était grande comme l'étoile d'Or (Vénus); elle coula lentement au S. O. jusqu'au groupe *Waï-ping* (δ, ε, ζ, μ, Poissons) et disparut. Elle était rouge jau-

nâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1103. Même période, 2e année, 1re lune, jour *wou-chin* (8 mars), une étoile sortit du *Chouï-weï* (*f, g, l, k,* Gémeaux); elle était grande comme l'étoile d'Or (Vénus); elle coula rapidement jusqu'au Fleuve boréal (α, β, Gémeaux) et disparut. — 6e lune, jour *wou-ou* (16 juillet), une étoile parut à l'O. de l'astérisme *Kang* (κ, ι, Vierge); elle fila rapidement au S. entra dans des vapeurs et disparut. — 9e lune, jour *sin-sse* (17 octobre), une étoile parut à l'O. de l'astérisme *Nieou* (α, β, Capricorne); elle fila lentement au S. jusqu'au groupe *Kieou-koue* (ω et petites du Sagittaire) et disparut. — 11e lune, jour *kia-tchin* (29 décembre), une étoile sortit de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1104. 12e lune, jour *ting-oueï* (1er janvier 1104), une étoile sortit du groupe *Ta-ling* (κ, θ, τ, Persée); elle était grande comme Vénus; elle alla jusqu'au Serpent dressé (κ, λ, Andromède; π, Cygne).

1104. 3e année, 4e lune, jour *wou-chin* (1er mai), une étoile parut à l'O. de *Tchin* (γ, ε, Corbeau); elle alla lentement au N. et entra dans l'enceinte du *Thaï-weï* aux étoiles *Neï-ping* (ξ, ν, π, Vierge) et disparut. — 6e lune, jour *ping-ou* (28 juin), une étoile sortit de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au N. E. et entra dans le Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus, d'Hercule, du Serpent, autour de α, Hercule). Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 8e lune, jour *ki-yeou* (30 août), une étoile parut aux étoiles *Kien* (ξ, π, φ, Sagittaire); elle était grande comme une tasse; elle coula vivement au S. O. jusqu'à la Tortue (Couronne australe) et disparut. Elle était bleu blanchâtre: elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1105. Même année chinoise, 12e lune, jour *kia-tseu* (12 janvier 1105), une étoile parut dans le groupe du grand Général

céleste (γ, Andromède et étoiles du Triangle); elle coula rapidement au N. entra dans le groupe *Wang-lang* (α, β, γ, Cassiopée) et disparut.

1105. 4^{e} année, 1re lune, jour *kia-chin* (1er février), une étoile sortit de l'astérisme *Kio* (α, ζ, Vierge); elle était grande comme une petite écuelle; elle coula lentement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre et sans queue. — Une étoile sortit de *Kio* (α, ζ, Vierge); elle était grande comme l'ouverture d'une tasse; elle coula lentement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle n'eut pas de queue. — 2^{e} lune intercalaire, jour *jin-chin* (21 mars), une étoile sortit de *Tsing* (μ, γ, δ, Gémeaux); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. O. entra dans le groupe des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 3^{e} lune, jour *keng-tseu* (18 avril), une étoile parut dans le *Hoa-kaï* (étoiles de la Girafe) du *Tse-weï;* elle était grande comme une tasse; elle alla vers la grande étoile du *Keou-tchin* (α, Polaire) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.—5^{e} lune, jour *keng-chin* (9 juillet), une étoile parut à l'O. du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle fila rapidement au N. entra dans des vapeurs et disparut.

1106. 12^{e} lune, jour *kia-ou* (7 février 1106), une étoile sortit de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était grande comme une tasse : elle fila lentement au S. entra dans le groupe *Kiun-chi* (ν, ξ, grand Chien et petites du Lièvre) et disparut.

1106. 5^{e} année, 6^{e} lune, jour *keng-ou* (12 juillet), une étoile parut à l'E. elle coula rapidement au N. E. entra dans l'intérieur du Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Ophiucus et du Serpent autour de α, Hercule) et disparut. — 6^{e} lune, jour *y-yeou* (27 juillet), une étoile sortit du *Koù-leou* (ι, k, h, Centaure; π, Hydre); elle coula rapidement à l'O. entra dans des vapeurs et disparut.— 9^{e} lune, jour *koueï-mao* (13 octobre), une étoile sortit du

Navire céleste (α, γ, δ et autres de Persée); elle coula lentement vers le groupe des Rois (ι, ν, φ, Taureau) et disparut. — 2^{e} lune, jour *jin-su* (31 décembre), une étoile sortit de *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle fila rapidement au S. entra dans le groupe du Magasin céleste (*Thien-thsang*, ι, η, θ, τ, Baleine) et disparut; elle était bleu blanchâtre : elle éclaira la terre et fit un bruit semblable à celui d'une pièce d'étoffe qu'on déchire.

1107. Période *Ta-kouan*, 1re année, 2^{e} lune, jour *ting-mao* (6 mars), une étoile sortit de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion); elle était grande comme une tasse; elle fila rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. — 4^{e} lune, jour *sin-oueï* (9 mai), une étoile parut dans *Tchin* (γ, β, Corbeau); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au S. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6^{e} lune, jour *y-haï* (12 juillet), une étoile parut au S. O. de *Oueï* (μ, ζ, Scorpion); elle était grande comme une tasse; elle coula lentement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 7^{e} lune, *keng-su* (26 août), une étoile sortit de l'astérisme *Ki* (γ, Sagittaire); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle n'eut point de queue et sa lueur éclaira la terre.

1108. Point d'observations.

1109. Même période, 2^{e} année, 12^{e} lune, jour *koueï-mao* (31 janvier 1109), une étoile filante sortit de l'astérisme *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle était grande comme une petite écuelle; elle coula rapidement au N. O. entra dans *Tsao-fou* (δ, ζ, η, Céphée) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle avait une queue et éclaira la terre de sa lumière : on entendit du bruit.

1110. Sans observations.

1111. Période *Tching-ho*, 1re année, 4^{e} lune, jour *ping-tchin* (2 juin), une étoile sortit de l'astérisme *Kang* (κ, ι, Vierge); elle

était grande comme une petite écuelle ; elle fila rapidement au N. O. jusqu'au *Che-ti* de droite (η, ν, τ, Bouvier) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle avait une queue : sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *sin-sse* (27 juin), avant que le soleil fût couché, une étoile tomba au S. E.

1112. 2e année, 9e lune, jour *y-mao* (23 septembre), une étoile sortit de l'astérisme *Teou* (φ, σ, τ, Sagittaire); elle était grande comme une tasse ; elle coula rapidement au S. O. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue et sa lumière éclaira la terre.

1113. 3e année, 4e lune, jour *ping-chin* (2 mai), une étoile sortit de *Sin* (α, σ, τ, Scorpion); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement au S. O. jusqu'au *Tsi-tso* (λ, γ, Loup) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante : elle éclaira la terre de sa lumière.

1114. 4e année, 9e lune, jour *keng-tseu* (28 octobre), une étoile sortit du groupe *Fen-mo* (γ, η, ζ, Verseau) de l'astérisme *Goeï;* elle fila rapidement au S. E. entra dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle avait une queue; elle éclaira la terre.

1117. 7e année, 2e lune, jour *kia-tseu* (5 mars), une étoile sortit du N. E. de l'astérisme *Oeï* (la Mouche); elle était grande comme une petite écuelle; elle coula rapidement au N. O. jusqu'au Général céleste (γ, Andromède et Triangle) et disparut. Elle était jaune rougeâtre, avec une queue, et elle éclaira la terre. (Cette apparition est rapportée à la 12e lune dans Ma-touan-lin).

1118. Période *Tchoung-ho,* 1re année, 9e lune, jour *keng-tchin* (16 novembre), une étoile parut au S. du *Koueï* du *Pe-teou* (α, β, γ, δ, grande Ourse); elle était grande comme une petite écuelle ; elle fila rapidement au S. O. jusqu'au Gouffre céleste (α, β, Sagittaire) et disparut. Elle était jaune rougeâtre, avec une queue, et sa lueur éclaira la terre.

1119. Période *Siouen-ho*, 1re année, 3e lune, jour *ting-mao* (2 mai), une étoile parut dans l'astérisme *Lieou* (déterminatrice,

δ, Hydre); elle était grande comme une écuelle; elle alla rapidement au N. E. et entra dans le *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion); elle était rouge jaunâtre; elle avait une queue et sa lueur éclaira la terre. — 10e lune, jour *wou-tseu* (19 novembre) une étoile sortit du groupe *Yun-yu* (λ, χ, étoiles des poissons au-dessus de la Baleine); elle était grande comme une écuelle; elle coula lentement au S. E. entra dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle était bleu blanchâtre.

1120. 2e année, 6e lune, jour *keng-yn* (18 juillet), une étoile parut au S. de *Ti* (α, β, Balance); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au N. E. jusqu'au Marché céleste (enceinte d'étoiles d'Hercule, du Serpentaire et du Serpent autour de α, Hercule): elle n'eut point de queue.

1121. 12e lune, jour *sin-sse* (5 janvier 1121), une étoile parut au S. O. de *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle était grande comme une tasse, elle alla lentement au S. O. jusqu'au *Pi* oriental (γ, Pégase) et disparut; elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue et sa lumière éclaira la terre.

1121. 3e année, 7e lune, jour *koueï-oueï* (4 septembre), une étoile sortit de *Teou* (φ, σ, τ, Sagittaire); elle était grande comme Vénus; elle coula rapidement au S. E. entra dans un espace trouble et disparut. Elle était bleu blanchâtre : elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre.

1122. 4e année, 11e lune, jour *ping-yn* (11 décembre), une étoile parut au N. du *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement dans l'intérieur du *Tse-weï* (cercle de perpétuelle Apparition), au N. de l'étoile *Chang-fou* (λ, Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue et éclaira la terre.

1123. 5e année, 2e lune, jour *ping-ou* (21 mars), une étoile parut au N. E. du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle était grande comme une tasse; elle coula lentement au S. E. jusqu'au groupe *Tchin* (γ, ε, Corbeau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue et sa lueur éclaira la terre.

1124. 6e année, 7e lune, jour *ting-yeou* (2 septembre), une étoile sortit de l'astérisme *Ta-yang-cheou* (χ, grande Ourse); elle était grande comme une écuelle; elle fila rapidement au N. E. entra dans des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle avait une queue et sa lueur éclaira la terre.

1125. 7e année, 11e lune, jour *wou-tseu* (17 décembre; selon Ma-touan-lin, l'apparition eut lieu à la 10e lune), une étoile parut au N. du *Wang-lang* (α, β, γ, Cassiopée); elle était grande comme une tasse; elle coula rapidement vers l'enceinte du *Tse-weï*, au N. du *Chang-fou* (λ, Dragon). Elle était rouge jaunâtre: elle avait une queue et éclaira la terre.

1126. Période *Tsing-khang*, 1re année, 2e lune, jour *ping-tchin* (15 mars), une étoile sortit de *Tchang* (δ, Hydre); elle était grande comme Vénus; elle fila rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était blanc bleuâtre: elle avait une queue et sa lueur éclaira la terre. — Une autre étoile sortit du Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au S. E. parvint à l'E. de *Tchin* (γ, δ, Corbeau) et disparut. Elle était rouge jaunâtre: elle eut une queue brillante. — 3e lune, jour *jin-tchin* (20 avril), une étoile parut à l'intérieur du *Tse-weï*, au S. E. du *Keou-tchin* (α, ζ, petite Ourse); elle était grande comme Vénus; elle coula lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle avait une queue et sa lueur éclaira la terre. — 5e lune, jour *y-oueï* (22 juin), une étoile parut au N. E. de l'étoile *Kouan* (δ, grande Ourse); elle était grosse comme une pêche; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. — 6e lune, jour *koueï-tcheou* (10 juillet), une étoile grosse comme cinq mesures d'un boisseau parut; elle était suivie de beaucoup de points brillants dont la lueur éclaira la terre. Ce météore s'éleva du S. E. et tomba au N. O. on entendit un bruit semblable à celui du tonnerre. — Jour *keng-chin* (17 juillet), une étoile parut dans le *Tse-weï* (cercle de perpétuelle Apparition),

au S. E. du *Hoa-kaï* (petites étoiles dans la tête de la Girafe au S. de la Polaire); elle était grande comme Vénus; elle fila lentement au N. jusqu'au Gond de gauche (ι, Dragon) et disparut.

1127. 2e année, 1re lune, jour *y-oueï* (17 février), une grande étoile sortit du groupe *Kien* (ν, ξ, *o*, *p*, *s*, Sagittaire); elle alla rapidement au S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre : elle avait une queue; sa lueur éclairait la terre.

1130. Période *Kien-yen*, 4e année, 6e lune, jour *y-yeou* (21 juillet), une étoile parut dans le *Keou-tchin* du *Tse-weï* (ζ, petite Ourse; α, Polaire). — 10e lune, jour *sin-oueï* (4 novembre), une étoile filante sortit de *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède).

1131. Période *Tchao-hing*, 1re année, 4e lune, jour *kia-su* (6 mai), une étoile parut à l'E. en plein jour et tomba. — 7e lune, jour *y-oueï* (26 juillet), une étoile filante sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle). — 8e lune, jour *sin-oueï* (31 août), une étoile sortit du groupe *Yu-lin* (δ, τ, Verseau). — 11e lune, jour *keng-su* (8 décembre), une étoile parut au S. O. de l'astérisme *Leou* (α, β, Bélier). — Jour *ting-sse* (15 décembre), une étoile parut au N. du *Thien-thsang* (θ, ι, $\varkappa$, Bouvier, ou ι, η, θ, τ, Baleine).

1132. Même période, 2e année, 3e lune, jour *kia-ou* (21 mars), une étoile parut dans l'enceinte du *Tse-weï*, au S. O. du *Hoa-kaï* (petites étoiles de la tête de la Girafe au S. de la Polaire). — Jour *y-mao* (11 avril), une étoile sortit de *Kio* (α, ζ, Vierge). — Jour *ting-sse* (13 avril), une étoile sortit du Gond de droite (α, Dragon) du *Tse-weï*. — Jour *wou-ou* (14 avril), une étoile filante parut au S. O. de l'étoile Poids de balance (δ, grande Ourse). Sa lueur éclaira la terre. — 4e lune intercalaire, jour *i-sse* (31 mai), une étoile parut à l'O. du *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion), au N. du *Tchi-fa* de droite (β, Vierge).

1135. 5e année, 10e lune, jour *jin-su* (29 novembre), une étoile parut au S. E. de *Tchi* (α, β, Pégase); elle était rouge jaunâtre et très-grande.

1136. 6e année, 10e lune, jour *jin-tseu* (23 novembre), une étoile parut au N. O. de l'astérisme *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède).

1137. 7e année, 8e lune, jour *jin-yn* (30 août), une étoile tomba à *Pien-king* (*Khaï-foung-fou* du *Ho-nan*).

1138. 8e année, 11e lune, jour *y-sse* (26 décembre), une étoile filante parut au N. E. du Grenier céleste (α, δ, γ, tête de la Baleine).

1139. 9e année, 5e lune, jour *koueï-oueï* (2 juin), une étoile parut au S. E. de l'astérisme *Fang* (β, π, δ, Scorpion).

1147. 17e année, 8e lune, jour *ki-oueï* (2 octobre), une étoile parut dans l'astérisme *Goeï* (α, Verseau); elle coula lentement jusqu'au *Kouan-so* (Couronne boréale) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante et sa lumière s'étendit jusqu'à terre. Elle était grande comme Vénus.

1156. 26e année, 6e lune, jour *y-haï* (24 juin), une étoile filante parut au N. E. Sa lumière éclaira la terre.

1158. 28e année, 6e lune, jour *koueï-sse* (2 juillet), une étoile s'approcha du N. O. elle n'était distante de la terre que de 10 pieds ou degrés; elle alla au N. O. et disparut. — Jour *wou-su* (7 juillet), une étoile tomba au milieu du jour. Sa queue était longue de 30 degrés : elle disparut au S. O.

1159. 29e année, 8e lune, jour *wou-yn* (10 octobre), une étoile parut au S. O. du *Tse-weï* (enceinte des étoiles du Dragon); elle avait une queue longue de 3 degrés; elle était rouge jaunâtre; elle alla rapidement au S. O. jusqu'au N. E. de la grande étoile du *Keou-tchin* (α, Polaire) et disparut.

1161. 31e année, 6e lune, jour *y-mao* (8 juillet), une étoile sortit du *Che-ti* de droite (η, τ, ν, Bouvier); elle était rouge blanchâtre; elle coula vivement vers le S. E. et disparut. Elle avait une queue brillante; elle était grande comme la planète Jupiter. — Jour *ting-sse* (10 juillet), il parut une étoile de couleur bleu blanchâtre; elle coula rapidement du N. E. vers le S. E. et disparut. Elle eut une queue brillante; elle était grande comme l'ouverture d'une écuelle. — Jour *kia-tseu* (17 juillet), une étoile volante sortit de l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et entra dans l'astérisme *Kio* (α, ζ, Vierge). Sa couleur était rouge jaunâtre. D'a-

bord elle fut petite, ensuite elle grandit. Elle était accompagnée de petites étoiles. — 9e lune, jour *jin-ou* (3 octobre), une étoile filante, longue de 30 degrés, tomba en plein jour.

1163. Période *Loung-hing*, 1re année, 6e lune, jour *ting-tcheou* (20 juillet), une étoile parut dans l'astérisme *Oueï* (μ, ζ, Scorpion); elle était bleu blanchâtre; elle coula vivement au S. E. et disparut. — 7e lune, jour *jin-yn* (14 août), ou, suivant Ma-touan-lin, *ping-chin* (8 août), une étoile parut dans le Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus, d'Hercule, du Serpent); elle était de couleur rouge; elle coula rapidement au N. O. jusqu'à ce qu'elle arrivât au S. O. du *Che-ti* de droite (ξ, η, τ, ν, Bouvier), et disparut en se divisant en plus de vingt petites étoiles. On entendit du bruit. Cette étoile était grande comme Vénus. — Jour *ping-ou* (18 août), une autre étoile sortit de l'enceinte du Marché céleste (étoiles d'Ophiucus, d'Hercule et du Serpent); elle coula lentement jusqu'à l'astérisme *Ti* (α, β, Balance) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante; elle était comme la planète Saturne. — Jour *koueï-tcheou* (25 août), une étoile parut dans le groupe de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle coula vivement vers le N. O. du *Kouan-so* (Couronne boréale) et disparut. Elle était de couleur bleu blanchâtre; elle était grande comme la planète de la Terre (Saturne). Sa lumière s'étendit jusqu'à terre. — Jour *ping-tchin* (28 août), une étoile sortit du *Lien-tao* (petites à l'E. de α, Lyre); elle coula rapidement vers le S. O. du Fléau céleste (β, γ, Dragon) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. Elle n'était pas plus grande que la planète de la Terre (Saturne). — 8e lune, jour *keng-chin* (1er septembre, une étoile sortit du groupe *Yu-lin* (δ, τ, Verseau); elle fila rapidement au S. E. vers des vapeurs et disparut. — Jour *wou-tchin* (9 septembre), une étoile sortit de l'astérisme *Hiu* (β, Verseau); elle était rouge jaune; elle coula rapidement vers le S. O. de l'astérisme *Nieou* (β, Capricorne) et disparut. — Jour *jin-chin* (13 septembre), une étoile parut dans le Marché céleste (enceinte des étoiles d'Ophiucus, d'Hercule et du Ser-

pent autour de α, Hercule); elle était rouge bleuâtre; elle coula lentement jusqu'au N. O. du *Si-hien* (θ, ψ, ξ, Balance) et disparut. — Jour *koueï-yeou* (14 septembre), une étoile parut dans l'astérisme *Pi* (γ, Pégase; α, Andromède); elle était rouge jaunâtre; elle coula rapidement, attaqua les étoiles de *Wang-lang* (α, β, γ, Cassiopée) et disparut. Elle était semblable à Vénus. — Jour *ping-tseu* (17 septembre), une étoile parut à l'entrée du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle était bleu blanchâtre; elle alla lentement, et en serpentant, vers des vapeurs au S. E. et disparut. — Jour *sin-sse* (22 septembre), une étoile sortit du *Nan-teou* (φ, σ, τ, Sagittaire); elle était rouge jaunâtre; elle coula lentement, entra dans le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau) et disparut. Elle eut une queue brillante; elle était grande comme la planète Vénus. On vit encore une étoile de couleur rouge jaunâtre, grande comme Vénus, et avec une trace lumineuse, qui sortit des étoiles *Yun-yu* (χ, λ, et deux autres des Poissons, au-dessus de la queue de la Baleine), alla lentement au S. O. jusqu'au-dessous de l'astérisme *Niu* (ε, Verseau) et disparut. — Jour *wou-tseu* (29 septembre), une étoile parut à l'entrée du groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau); elle coula lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle eut une queue brillante. Elle était grande comme la planète Saturne. Une autre étoile, de couleur bleu blanchâtre, sortit du *Thien-thsang* (ι, η, θ, τ, Baleine) et alla rapidement au S. E. elle avait une queue, et n'était pas plus grande que la planète Jupiter. Elle alla jusqu'à des vapeurs et disparut. — 9^{e} lune, jour *keng-su* (21 octobre), une étoile filante parut dans l'enceinte extérieure du *Tse-weï*, à l'étoile Gond de gauche (ι, Dragon); elle fila rapidement au N. O. toucha l'étoile du trône intérieur du *Tse-weï* (près de α, Polaire), le *Chang-chou* (η, petite Ourse), et disparut. — 11^{e} lune, jour *keng-yn* (30 novembre), une étoile sortit de l'astérisme *Tchin* (γ, δ, ε, Corbeau); elle alla rapidement vers le S. E. jusqu'aux étoiles *Ki-kouan* (étoiles du Loup) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante. Elle était grande comme la planète Jupiter.

— Jour *ting-oueï* (17 décembre), une étoile volante sortit des étoiles du Navire céleste (α, γ, δ, Persée); elle fila rapidement vers l'enceinte extérieure du *Tse-weï* (queue du Dragon) et disparut au N. O. du *Neï-tchu* (*b*, *d*, *o*, Dragon) : de là sortirent deux petites étoiles de couleur blanc bleuâtre.

1164. 2e année, 2e lune, jour *sin-yeou* (29 février), une étoile volante sortit de l'étoile Poids de balance (δ, grande Ourse); elle fila lentement jusqu'à l'intérieur du *Thaï-weï*, et disparut au S. O. de la grande étoile du Trône impérial (β, Lion); elle était bleu blanchâtre, avait une queue et était pareille à Jupiter. — 6e lune, jour *ting-tcheou* (14 juillet), une étoile sortit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, Cassiopée); elle était bleu blanchâtre; elle coula rapidement, passa au S. O. du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne) et disparut. — Jour *y-sse* (11 août), une étoile volante sortit de *Tsao-fou* (δ, ε, Céphée); elle coula vivement vers le S. E. de la grande étoile du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, petite Ourse) et disparut. Elle était bleu blanchâtre; elle était grande comme la planète Saturne. — Jour *sin-haï* (17 août), une étoile sortit du *Thien-kouan* (ζ, Taureau); elle coula rapidement, entra dans l'ouverture de *Pi* (les Hyades) au N. O. et disparut. Elle eut une trace brillante, et sa lumière s'étendit jusqu'à terre; elle était grande comme Vénus et de couleur rouge jaunâtre. — 10e lune, jour *ping-tchin* (21 octobre), une étoile sortit du groupe des Royaumes (étoiles du corps du Capricorne); elle coula rapidement au S. O. attaqua l'étoile orientale de *Tchao* (ψ, Capricorne) et disparut. Elle eut une trace brillante; elle était grande comme la planète Saturne. Elle était de couleur rouge jaunâtre. — 11e lune, jour *jin-ou* (16 novembre), une étoile filante tomba en plein jour. — Jour *kouei-oueï* (17 novembre), dans la nuit, une étoile filante parut dans le groupe Arc et Flèche (η, δ, ζ, λ, grand Chien); elle coula rapidement au S. E. du Temple céleste (étoiles de la Boussole au-dessous de ν, Hydre) et s'éteignit. Elle était grande comme Vénus. — Jour *ting-haï* (21 novembre), une étoile sortit de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε, ζ, Éridan); elle coula lentement au S. O. jusqu'à des

vapeurs et disparut. Elle laissa une traînée brillante; elle était grande comme Vénus; elle avait une couleur rouge jaunâtre. — Jour *koueï-mao* (7 décembre), une étoile parut dans le groupe *Yu-lin* (δ, τ, Verseau); elle coula vivement vers des vapeurs au S. O. et disparut. Elle était grande comme Vénus : sa couleur était rouge jaunâtre. — Jour *sin-haï* (15 décembre), une étoile parut dans le Fleuve boréal (α, β, Gémeaux); elle coula rapidement au S. E. jusqu'à l'astérisme *Y* (α de la Coupe) et disparut. Elle eut une queue; elle était grande comme Vénus. Sa couleur était rouge jaunâtre. — 12e lune, jour *jin-ou* (15 janvier 1165), il y eut un phénomène semblable.

1165. Période *Kien-tao*, 1re année, 3e lune, jour *ping-tchin* (19 avril), une étoile sortit du *Tcheou-koue* (étoile η du Capricorne); elle alla rapidement jusqu'à la Poule céleste (ρ, Sagittaire) et disparut. Elle n'eut pas de queue brillante; elle était grande comme la planète Jupiter et de couleur rouge blanchâtre. — Jour *kia-tseu* (27 avril), une étoile sortit de *Tchang* (ν, Hydre); elle coula lentement vers le S. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle eut une queue brillante et sa lueur s'étendit jusqu'à terre; elle était grande comme Vénus et de couleur rouge jaunâtre. — 5e lune, jour *ting-tcheou* (8 juillet), une étoile sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était blanche; elle alla lentement au N. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle eut une trace brillante et sa lueur s'étendit jusqu'à terre; elle était grande comme Vénus. — 6e lune, jour *kia-tchin* (5 août), une étoile parut au N. E. elle coula vivement au S. O. et disparut. Elle eut une queue brillante, et l'on entendit du bruit : elle était grande comme Vénus et de couleur rouge jaunâtre. — 7e lune, jour *jin-su* (23 août), une étoile parut au S. O. elle coula lentement au S. E. et disparut. Elle était grande comme la planète Jupiter. Sa couleur était rouge jaunâtre. — Jour *keng-ou* (31 août), une étoile sortit du *Taï-koue* (ι, Capricorne); elle coula lentement vers *Tchao-koue* (ψ, Capricorne) et disparut. Elle était grande comme la planète Jupiter; elle était bleu blanchâtre. — 9e lune,

jour *wou-chin* (8 octobre), une étoile sortit de *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée); elle coula jusqu'à l'astérisme *Goeï* (α, Verseau) et disparut. — 10e lune, jour *koueï-oueï* (12 novembre), une étoile parut au S. E. de l'étoile *Kouan* (δ, grande Ourse); elle coula vivement jusqu'au *Thaï-weï* (enceinte d'étoiles autour de β, Lion) et disparut. Elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre; elle était grande comme Vénus, et sa couleur était bleu blanchâtre.

1166. Même période, 2e année, 2e lune, jour *keng-tseu* (29 mars), une étoile parut au N. O. elle coula vivement jusqu'à un espace plein de vapeurs et disparut. Elle était grande comme la planète Jupiter : sa couleur était bleu blanchâtre. — 6e lune, jour *ping-tseu* (3 juillet), une étoile sortit de l'astérisme *Kio* (α, ζ, Vierge); elle coula vivement jusqu'à l'astérisme *Tchin* (γ, δ, ε, Corbeau) et disparut. Elle eut une queue brillante; elle était grande comme Vénus : sa couleur était rouge jaunâtre. — 7e lune, jour *ki-sse* (25 août), une étoile sortit de la Brodeuse (α, ε, η, Lyre); elle coula rapidement jusqu'aux étoiles *Thsoung* (*r*, *s*, Taureau de Poniatowski) de l'intérieur du Marché céleste et disparut. Elle eut une queue brillante; elle était grande comme Jupiter, et sa couleur était bleu blanchâtre. — 11e lune, jour *ki-oueï* (13 décembre), une étoile parut, alla rapidement au S. E. au milieu de nuages noirâtres, et disparut. Elle était grande comme Jupiter : sa couleur était bleu blanchâtre. — 12e lune (sans le jour), une étoile sortit du *Thien-kouan* (ζ, Taureau); elle coula rapidement jusqu'aux étoiles *Waï-ping* (δ, ε, ζ, Poissons) et disparut. Deux petites étoiles l'accompagnaient. Elle était rouge jaunâtre; elle n'eut pas de queue : elle était grande comme la planète de l'Année (Jupiter).

1167. 3e année, 9e lune, jour *kia-ou* (13 novembre), une étoile sortit du *Kiouen-ché* (ν, ε, ζ, Persée); elle coula rapidement jusqu'à l'astérisme *Leou* (β, α, Bélier) et disparut. Elle eut une queue brillante; elle était grande comme Jupiter : sa couleur était jaune blanchâtre. Une autre étoile, de couleur bleu

blanchâtre, sortit du *Pe-teou* (les sept principales de la grande Ourse); elle coula vivement au N. O. du *Chao-tsaï* (η, Dragon) et disparut. Elle était grande comme la planète de l'Année (Jupiter).

1169. 5e année, 7e lune, jour *kia-tseu* (4 août), une étoile sortit du *Thsoung-tching* (β, γ, Ophiucus); elle était de couleur rouge; elle alla jusqu'à l'astérisme *Niu* (ε, Verseau) et disparut. Elle avait une queue brillante et sa lumière éclaira la terre : elle était grande comme la planète Jupiter. — 9e lune, jour *ping-tchin* (25 septembre), une étoile filante, semblable à un serpent, entra dans le Fléau céleste (β, γ, Dragon).

1170. 6e année, 9e lune, jour *sin-sse* (15 octobre), une étoile sortit de *Lang* (Sirius); elle pénétra dans le groupe Arc et Flèche (η, δ, γ, ζ, grand Chien), atteignit des vapeurs et disparut. Elle était aussi grande qu'une étoile de première grandeur : sa couleur était jaune rougeâtre. Elle avait une queue; ensuite, elle se transforma en un nuage blanc très-mince. Après 9 centièmes d'heure (11 minutes environ), il se dissipa. — 10e lune, jour *keng-su* (13 novembre), une étoile parut dans le Magasin céleste (α, γ, δ, η), Baleine; elle coula vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle eut une queue brillante; elle était grande comme la planète Jupiter : elle était rouge jaunâtre.

1171. 7e année, 7e lune, jour *wou-su* (28 août), tandis qu'on voyait au N. E. des nuages bleu noirâtre, il sortit du milieu de ces nuages une étoile grosse comme le poing, qui alla rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. — 9e lune, jour *kia-ou* (23 octobre), au S. O. parut une étoile filante, qui se dirigea rapidement vers des vapeurs et disparut.

1176. Période *Chun-chi*, 3e année, 1re lune, jour *sin-ouei* (7 mars), une étoile parut dans *Lang* (Sirius); elle alla vivement jusqu'à des vapeurs et disparut. La lueur de sa queue éclaira la terre. L'étoile était grande comme Vénus. — 4e lune, jour *wou-su* (2 juin), une étoile parut dans *Kio* (α, ζ, Vierge); elle était bleu blanchâtre.

1178. 5e année, 8e lune, jour *y-sse* (27 septembre), une étoile

parut dans *Lang* (Sirius); elle coula rapidement au S. O. et disparut. Elle n'eut pas de queue brillante; elle était grande comme Vénus : elle était bleu blanchâtre.

1179. 6e année, 8e lune, jour *jin-tchin* (9 septembre), une étoile sortit de la grande étoile du *Keou-tchin* du *Tse-weï* (α, petite Ourse); elle alla lentement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle eut une queue brillante; elle était grande comme l'ouverture d'une soucoupe : elle était de couleur bleu blanchâtre.

1180. 7e année, 5e lune, jour *y-haï* (18 juin), une étoile parut dans l'enceinte du Marché céleste (étoiles du Serpent, d'Ophiucus et d'Hercule), aux étoiles *Toung-haï* (ζ, η, Serpent); elle alla lentement et se divisa en trois petites étoiles; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. Elle était grande comme l'ouverture d'une soucoupe et de couleur bleu blanchâtre. — 8e lune, jour *ting-oueï* (19 septembre), une étoile sortit du *Kouan-so* (Couronne boréale), au N. O. de la grande étoile (α, Couronne; elle alla rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre : elle était grande comme Vénus et de couleur bleu blanchâtre.

1184. 11e année, 4e lune, jour *y-tcheou* (18 mai), une étoile filante perça les nuages; elle parut au zénith et glissa lentement au N. E. où elle disparut. Elle avait une queue lumineuse; ensuite, cette queue se divisa en petites étoiles de couleur bleu blanchâtre. On entendit du bruit. L'étoile principale était grande comme Vénus.

1188. 15e année, 2e lune, jour *sin-oueï* (4 mars), une étoile sortit du *Thien-tsun* (δ, Gémeaux ou voisine); elle était grande comme une écuelle; elle coula rapidement vers une partie du ciel pleine de vapeurs et disparut. Elle était de couleur bleu blanchâtre.

1196. Période *Khing-youen*, 2e année, 9e lune, jour *kia-ou* (12 octobre), une étoile filante tomba en plein jour.

1198. 4e année, 6e lune, jour *kia-ou* (2 août), une grande étoile filante tomba en plein jour. — 7e lune, jour *jin-yn* (10 août),

une étoile filante, grande comme une tasse, parut au-dessous du groupe *Yu-lin* (δ, τ, Verseau). Sa couleur était bleu blanchâtre. — 9e lune, jour *ting-sse* (24 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Koeï* (ζ, β, Andromède); elle coula jusqu'au groupe *Louï-pi-tchin* (σ, π, Verseau; β, Poissons) et disparut. Elle était rouge-blanchâtre, et grande comme Vénus.

1199. 5e année, 6e lune, jour *ting-tcheou* (11 juillet), une étoile parut au N. E. elle coula lentement vers le S. O. et disparut. Elle était grande comme la planète Jupiter; elle était bleu blanchâtre. — 9e lune, jour *jin-tseu* (14 octobre), une étoile sortit du S. O. elle coula lentement au N. E. et disparut. Elle était grande comme Vénus et de couleur bleu blanchâtre.

1202. Période *kia-haï*, 2e année, 4e lune, jour *jin-sse* (30 avril), une étoile filante tomba en plein jour. — 10e lune, jour *y-yeou* (31 octobre), une étoile sortit des Cinq-Chars (α, Chèvre; β, θ, ι, Cocher; β, Taureau); elle était grande comme la planète Jupiter.

1204. 4e année, 11e lune, jour *keng-ou* (4 décembre), une étoile filante sortit du Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne); elle coula rapidement dans l'enceinte du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Hercule).

1205. Période *Khaï-chi*, 1re année, 1re lune, jour *keng-tseu* (4 mars) (suivant Ma-touan-lin, à la 12e lune, le 29 décembre), une étoile parut au zénith; elle était de couleur rouge et grande comme Vénus; elle disparut dans un espace plein de vapeurs. — 7e lune, jour *koueï-haï* (25 juillet), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle alla au S. E. de *Teou* (φ, σ, τ, μ, Sagittaire) et disparut. Elle était de couleur rouge et grande comme Vénus.

1206. 2e année, 6e lune, jour *koueï-tcheou* (10 juillet), une étoile filante parut à l'astérisme *Tchao-yao* (β, Bouvier); elle entra dans le *Kou-leou* (ι, k, h, Centaure); elle eut la même couleur que la précédente.

1208. Période *kia-ting*, 1re année, 6e lune, jour *sin-oueï* (17 juillet), une étoile sortit du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle alla lentement au N. E. et disparut dans le Marché céleste.

1209. 2e année, 6e lune, jour *jin-ou* (23 juillet), une étoile sortit de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle alla lentement au S. E. entra dans le Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Ophiucus) et disparut. Sa couleur était rouge; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. Elle était grande comme Vénus. — Jour *keng-yn* (31 juillet), une étoile parut au zénith; elle coula rapidement au N. E. vers des vapeurs et disparut.

1210. 3e année, 9e lune, jour *y-yeou* (18 novembre), une étoile tomba pendant la nuit.

1212. 5e année, 7e lune, jour *i-sse* (30 juillet), une étoile parut au zénith; elle coula lentement au S. O. atteignit des vapeurs et disparut.

1213. 6e année, 5e lune, jour *kouei-hai* (13 juin), une étoile tomba en plein jour. — 9e lune, jour *kouei-mao* (21 septembre), une étoile tomba pendant la nuit. — Jour *ting-sse* (5 octobre), une étoile tomba pendant le jour. — 10e lune, jour *wou-su* (15 novembre), une étoile parut au S. O. de *Mao* (les Pléiades); elle se dirigea lentement au S. E. du Magasin céleste (*Thien-lin*, δ, ε, ζ, Bélier) et disparut. — 11e lune, jour *jin-su* (9 décembre), une étoile parut au S. O. elle alla lentement vers un espace plein de vapeurs et disparut. Elle était de couleur bleu blanchâtre.

1214. Même année chinoise, 12e lune, jour *jin-yn* (18 janvier 1214), une étoile tomba pendant le jour.

1214. 7e année, 3e lune, jour *jin-ou* (28 avril), une étoile filante sortit de *Tchin* (γ, ε et autres, Corbeau), au S. E. de l'étoile principale (γ, Corbeau); elle coula lentement vers des vapeurs et disparut. — 5e lune, jour *sin-mao* (6 juillet), une étoile filante parut au S. O. du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne); elle se dirigea lentement au N. O. de l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion) et disparut.

1215. 8e année, 7e lune, jour *kouei-oueï* (22 août), une étoile parut au N. E. de l'étoile principale de *Tchi* (α, Pégase); elle

coula rapidement au N. O. du *Thien-thsang* (ι, η, τ, θ, Baleine) et disparut. — Jour *y-yeou* (24 août), une étoile parut au S. E. de la Fileuse (α, ε, ζ, Lyre); elle coula lentement au N. O. de l'astérisme *Nieou* (φ, σ, τ, μ, Sagittaire) et disparut. Elle avait une queue brillante et sa lueur éclaira la terre; elle était grande comme Vénus. Elle était de couleur bleu blanchâtre. — 8e lune, jour *kia-tchin* (12 septembre), une étoile parut au S. O. du Gué céleste (α, γ, δ, η, Cygne); elle alla lentement au N. E. du Tambour céleste (α, γ, β, Aigle) et disparut. — 12e lune, jour *ping-chin* (2 janvier 1216), une étoile parut au N. E. des cinq *Heou* (θ, ι, υ, τ, φ, Gémeaux); elle coula lentement au S. O. du *Thien-kouan* (ζ, Taureau) et disparut. Elle fit du bruit, et la lueur de sa trace éclaira la terre; elle avait une couleur rouge jaunâtre.

1216. 9e année, 6e lune, jour *y-sse* (9 juillet), une étoile parut au N. E. de l'étoile déterminatrice de *Nieou* (β, Capricorne); elle alla lentement jusqu'à des vapeurs et disparut.

1217. 10e année, 5e lune, jour *jin-chin* (1er juin), une étoile parut au N. O. de l'étoile déterminatrice de l'astérisme *Ouei* (μ, queue du Scorpion); elle alla lentement jusqu'à ce qu'elle fût au S. E. de l'étoile déterminatrice de *Nieou* (β, Capricorne) et disparut.

1218. 11e année, 6e lune, jour *Y-mao* (9 juillet), une étoile parut au S. O. de l'étoile principale du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle coula vivement à l'O. direct et disparut.

1219. 12e année, 7e lune, jour *jin-yn* (20 août), au commencement du soir, une étoile vint du S. O. sa lueur éclairait la terre. Des centaines, des milliers de petites étoiles formaient autour d'elle un anneau.

1219. 11e lune, jour *y-hai* (21 novembre), une étoile parut au S. E. de l'astérisme *Mao* (les Pléiades); elle coula rapidement vers des vapeurs et disparut.

1220. 13e année, 12e lune, jour *ting-sse* (27 décembre), une étoile parut au N. E. du Drapeau de *Tsan* (petites d'Orion dans la peau du Lion); elle coula lentement vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre.

1221. Jour *jin-su* (1er janvier 1221), une étoile filante fit un bruit aussi fort que le tonnerre.

1221. 14e année, 2e lune, jour *jin-ou* (22 mars; le texte chinois porte ici 13e année, comme pour les observations précédentes. C'est une faute, suivant moi, et il faut lire 14e année; autrement, l'observation serait du 27 mars, avec la date du texte), une étoile parut au S. E. de l'étoile principale du Fleuve austral (α, petit Chien); elle coula lentement au S. O. vers des vapeurs et disparut. Sa couleur était rouge jaunâtre. — 8e lune, jour *wou-ou* (25 août ou 30, avec la date du texte), une étoile sortit de l'étoile principale de *Fang* (β, Scorpion); elle alla rapidement vers des vapeurs et disparut. Elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre; elle était de couleur rouge jaunâtre et grande comme Vénus. — 11e lune, jour *kia-chin* (19 novembre ou 24, avec la date du texte), une étoile parut au N. O. de la principale étoile du *Thien-thsang* (θ, Bouvier); elle coula lentement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était de couleur rouge jaunâtre.

1223. 16e année, 11e lune, jour *jin-su* (17 décembre), une étoile parut au N. E. des cinq *Heou* (θ, ι, υ, τ, φ, des Gémeaux); elle coula rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Sa couleur était rouge jaunâtre. On entendit un bruit sourd; en même temps, une trace brillante éclaira la terre. L'étoile était grande comme une soucoupe.

1226. Période *Pao-khing*, 2e année, 4e lune, jour *sin-haï* (24 mai), on vit une étoile grande comme Vénus.

1228. Période *Tchao-ting*, 1re année, 6e lune, jour *ki-yeou* (10 juillet), une étoile tomba pendant le jour.

1229. 2e année, 1re lune, jour *keng-tchin* (6 février), et même année, 9e lune, jour *jin-tchin* (16 octobre), des étoiles parurent; elles étaient grandes comme Vénus.

1230. 3e année, 11e lune, jour *ting-oueï* (25 décembre), une étoile tomba pendant le jour.

1231. 4e année, 7e lune, jour *keng-su* (25 août), une étoile

parut; elle était grande comme Vénus. — 9e lune, jour *kia-tchin* (18 octobre), une étoile tomba pendant le jour.

1232. 5e année, 8e lune, jour *kia-yn* (22 août), une étoile tomba pendant la nuit. — 9e lune intercalaire, jour *ki-yeou* (17 octobre), une étoile parut; elle était grande comme Vénus.

1234. Période *Touan-ping*, 1re année, 6e lune, jour *ping-su* (16 juillet), une étoile, grande comme Vénus, alla au S. O. Elle eut une trace brillante et sa lueur éclaira la terre.

1235. 2e année, 4e lune, jour *wou-tseu* (13 mai), une étoile parut; elle était grande comme Vénus. — 6e lune, jour *keng-tchin* (5 juillet), une étoile tomba dans le jour. — 7e lune, jour *ting-yeou* (22 juillet), une étoile parut; elle était grande comme Vénus. — Jour *sin-tcheou* (26 juillet), une étoile tomba en plein jour. — 10e lune, jour *sin-mao* (13 novembre), une étoile parut; elle était grande comme Vénus.

1236. 3e année, 5e lune, jour *keng-tchin* (29 juin), une étoile sortit de l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion); elle était grande comme Vénus. — 6e lune, jour *kouei-sse* (12 juillet), une étoile tomba pendant le jour.

1237. Période *kia-hi*, 1re année, 1re lune, jour *jin-ou* (26 février), une étoile parut; elle était grande comme Vénus. — 2e lune, jour *ki-tcheou* (5 mars), une étoile tomba pendant la nuit. — 9e lune, jour *kouei-tcheou* (25 septembre), une étoile parut à l'O. des Sept-Illustres (μ, δ, ν, ψ, Bouvier et voisines); elle alla jusqu'à des vapeurs et disparut. — 10e lune, jour *wou-su* (9 novembre), une étoile parut; elle était grande comme une pêche.

1238. 2e année, 4e lune, jour *kia-tseu* (3 juin); 7e lune, jour *sin-mao* (29 août); 9e lune, jour *y-ouei* (1er novembre), des étoiles parurent; elles étaient grandes comme Vénus. — 6e lune, jour *kia-tchin* (13 juillet); 8e lune, jour *kouei-haï* (6 septembre), des étoiles tombèrent en plein jour.

1239. 3e année, 3e lune, jour *kia-su* (9 avril), une étoile tomba pendant le jour. — 8e lune, jour *sin-tcheou* (3 septembre), une étoile parut; elle était grande comme Vénus.

1240. 4e année, 1re lune, jour *sin-sse* (10 février); 6e lune, jour *wou-ou* (16 juillet), des étoiles parurent; elles étaient grandes comme Vénus. — 2e lune, jour *sin-tcheou* (1er mars); 3e lune, jour *koueï-oueï* (12 avril), des étoiles tombèrent en plein jour.

1241. Période *Chun-yu*, 1re année, 6e lune, jour *koueï-yeou* (26 juillet), une étoile parut; elle était grande comme Vénus. — Jour *ki-mao* (1er août), une étoile tomba pendant le jour.

1243. 3e année, 6e lune, jour *kia-su* (17 juillet), une étoile sortit de l'étoile principale de l'astérisme *Ti* (α, Balance); elle était grande comme Vénus. — 8e lune, jour *y-mao* (27 août), une étoile tomba pendant le jour.

1244. 4e année, 4e lune, jour *ping-tseu* (14 mai), une étoile parut au-dessous de la principale étoile de l'astérisme *Oueï* (μ, ζ, Scorpion); elle était grande comme Vénus. — 6e lune, jour *y-oueï* (1er août), une étoile sortit de l'astérisme *Pi* (les Hyades); elle était grande comme Vénus.

1246. 6e année, 7e lune, jour *koueï-yeou* (29 août), une étoile sortit de l'astérisme *Tchi* (α, β, Pégase); elle était grande comme Vénus. — 9e lune, jour *kia-tseu* (19 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Teou* (φ, σ, μ, Sagittaire). Sa trace lumineuse fut bleu blanchâtre; sa lueur éclaira la terre. Elle était grande comme Vénus.

1247. 7e année, 9e lune, jour *ping-tchin* (6 octobre), une étoile sortit de l'astérisme *Tchi* (α, β, Pégase).

1248. 8e année, 6e lune, jour *kia-tchin* (20 juillet), une étoile sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elle était grande comme Vénus. — 10e lune, jour *ping-tchin* (29 novembre), une étoile sortit de la principale étoile de *Kio* (α, Vierge).

1249. 9e année, 6e lune, jour *jin-su* (2 août), une étoile coula vivement du S. vers des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle était grande comme Vénus. — 10e lune, jour *jin-chin* (10 décembre), une étoile sortit de la Fileuse (α, Lyre).

1250. 10e année, 4e lune, jour *ting-yeou*, 1er de la lune (4 mai), une étoile tomba pendant la nuit.

1251. 11e année, 7e lune, jour *ting-tcheou* (7 août), une

étoile sortit de l'étoile principale de *Pi* (α, Taureau, ou ε, déterminatrice de la division); elle était rouge jaunâtre; elle était grande comme Vénus. — 8e lune, jour *ki-tcheou*, 1er de la lune (19 août), une étoile tomba pendant le jour.

1252. 12e année, 4e lune, jour *keng-chin* (16 mai), une étoile sortit de l'étoile la plus haute de l'astérisme *Kio* (ζ, Vierge); elle était grande comme Vénus. — 8e lune, jour *kouei-tcheou* (6 septembre), une étoile sortit de *Kio* (α, ζ, Vierge); elle était de couleur rouge; elle éclaira la terre.

1253. Période *Pao-yu*, 1re année, 4e lune, jour *ting-sse* (8 mai), une étoile parut; elle était grande comme Vénus.

1254. 2e année, 7e lune, jour *keng-su* (24 août), une étoile parut; elle était grande comme Vénus.

1255. 3e année, 7e lune, jour *sin-yeou* (30 août), une étoile parut; elle était grande comme Vénus. — 10e lune, jour *ting-tcheou* (14 novembre), une étoile sortit de l'étoile principale de l'astérisme *Pi* (α, Taureau, ou ε, déterminatrice de la division *Pi*).

1257. 5e année, 7e lune, jour *ting-mao* (25 août), une étoile parut; elle était grande comme une pêche.

1258. 6e année, 9e lune, jour *wou-tchin* (20 octobre), une étoile perça les nuages et parut.

1259. Période *Khaï-khing*, 1re année, 6e lune, jour *ki-haï* (18 juillet), des étoiles parurent dans l'astérisme *Teou* (φ, σ, τ, Sagittaire) et dans le Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle); elles allèrent rapidement au S. E. jusqu'à des vapeurs et disparurent. Elles étaient rouge jaunâtre; elles firent du bruit, et leur trace lumineuse éclaira la terre. Leur grandeur était comme celle de la planète Vénus.

1260. Période *Khing-ting*, 1re année, 7e lune, jour *ping-tseu* (18 août), une étoile parut au S. E. elle était grande comme Vénus. — 10e lune, jour *y-mao* (25 novembre), une étoile parut au N. E. elle coula vivement vers la lune : on entendit du bruit. Il y eut une queue lumineuse; sa lueur éclaira la terre. L'étoile était grande comme une pêche.

1262. 3e année, 4e lune, jour *kia-tchin* (8 mai), une étoile parut; elle était grande comme une petite soucoupe. — 6e lune, jour *ki-yeou* (12 juillet), une étoile parut; elle était grande comme la planète errante (Mars). — 9e lune, jour *ping-tseu* (7 octobre), une étoile parut; elle était grande comme la planète Vénus. — 9e lune intercalaire, jour *ping-su* (17 octobre), une étoile perça les nuages et parut; elle était grande comme Vénus. — Jour *keng-tseu* (31 octobre), une étoile parut; elle était grande comme Vénus.

1263. 4e année, 5e lune, jour *wou-su* (26 juin), une étoile sortit de l'étoile principale de *Kio* (α, Vierge). — 6e lune, jour *ting-mao* (25 juillet), une étoile sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle). — 8e lune, jour *y-mao* (11 septembre), une étoile sortit du *Thien-thsang* (ι, η, τ, θ, Baleine, ou ι, θ, $\varkappa$, Bouvier).

1264. 5e année, 2e lune, jour *jin-su* (16 mars), une étoile sortit de l'astérisme *Pi* (les Hyades). — 5e lune, jour *kia-ou* (16 juin), une étoile sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle), au S. E. de la grande étoile (α); elle coula rapidement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre et grande comme Vénus; elle eut une trace lumineuse et sa lueur éclaira la terre. — 7e lune, jour *ki-mao* (31 juillet), une étoile sortit du *Che-ti* de droite (η, τ, ν, Bouvier).

1266. Période *Kien-chun*, 2e année, 6e lune, jour *kia-su* (16 juillet), une étoile sortit du *Che-ti* de gauche (ξ, π, ζ, Bouvier).

1267. 3e année, 7e lune, jour *keng-yn* (27 juillet), une étoile parut au S. E. de l'astérisme *Mao* (les Pléiades); elle alla rapidement jusqu'à des vapeurs et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une queue brillante et sa lueur éclaira la terre. Elle était grande comme Vénus.

1268. 4e année, 7e lune, jour *wou-ou* (18 août), une étoile sortit de l'étoile principale de *Ti* (α, Balance); elle coula vivement au N. O. entra dans le *Ki-kouan* (β, Loup; $\varkappa$, Centaure) et disparut. Elle était rouge jaunâtre; elle eut une trace bril-

lante et sa lueur éclaira la terre. Elle était grande comme une pêche.

1269. 5e année, 5e lune, jour *keng-chin* (16 juin), une étoile parut au N. E. de la principale étoile de *Teou* (φ, Sagittaire); elle coula vivement vers *Nieou* (α, β, Capricorne), s'approcha de vapeurs et disparut. — 6e lune, jour *keng-yn* (16 juillet), une étoile sortit de l'astérisme *Teou* (φ, σ, τ, Sagittaire). — 7e lune, jour *jin-su* (17 août), une étoile parut au S. E. sortant de l'étoile principale du Tambour du Fleuve (α, Aigle); elle coula vivement au N. O. jusqu'à des vapeurs et disparut.

1275. Période *Te-yu*, 1re année, 4e lune, jour *kouei-haï* (19 mai), il parut une grande étoile qui partit de l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion) et alla rapidement au N. E. dans des vapeurs, où elle disparut.

TROISIÈME SÉRIE D'OBSERVATIONS, DE LA FIN DU XIIIe SIÈCLE DE NOTRE ÈRE AU MILIEU DU XVIIe.

(Elles sont extraites du supplément du *Wen-hian-thoung-khao* et de la collection des vingt-quatre historiens de la Chine (section de l'astronomie).

Le supplément de Mà-touan-lin rapporte l'observation suivante que j'ai déjà mentionnée plus haut, à sa date, d'après le texte de l'histoire officielle. Le nouveau texte que je traduis ici présente quelques circonstances omises dans la première description.

1219. Période *Kia-ting*, 12e année, 7e lune, jour *jin-yn* (20 août), au commencement du soir, une étoile vint du S. O. Sa lueur éclairait la terre. Sa forme était celle de la lune non entièrement ronde; sa couleur était bleu blanchâtre. Des centaines, des milliers de petites étoiles formaient autour d'elle un anneau comme une flamme rayonnante; elle tomba dans le N. E. Peu après, on entendit un bruit semblable à un roulement de tambour.

1276. Période *Tchi-youen*, 13e année, deux étoiles se battirent au centre du ciel : une d'elles tomba.

1278. Même période, 15e année, une grande étoile coula au S. dans la mer; plus de mille petites étoiles la suivaient. On entendit pendant quelque temps un bruit comme celui du tonnerre. — 8e lune, chute d'étoile au S. de *Kouang-tcheou* (Canton). Au moment où l'étoile tomba, sa couleur était rouge, et elle était grande comme un crible; elle jetait une vive clarté. Quand elle eut touché la terre, on entendit un grand bruit, comme un roulement de tambours; en un instant ce bruit cessa.

1299. Période *Ta-te*, 3e année, 9e lune, jour *jin-tchin* (9 octobre), il parut une étoile filante, de couleur rouge, avec une queue longue d'un degré environ : sa lueur éclaira la terre. Elle sortit du Tambour du Fleuve (α, β, γ, Aigle) et disparut à l'O. de l'astérisme *Khien-nieou* (β, α, Capricorne). On entendit un bruit pareil à celui du tonnerre.

1301. Même période, 5e année, 10e lune, jour *sin-mao* (26 novembre), dans la nuit, on vit une étoile filante grande comme une tasse; sa couleur était rouge et sa queue longue de 10 degrés environ : sa lueur éclaira la terre. Elle partit du N. et alla lentement à l'E. En allant, elle se divisa en deux étoiles, la première grande et la seconde petite, éloignées d'un degré environ. Elles disparurent dans l'astérisme *Goeï* (déterminatrice, α, Verseau).

1308. Période *Tchi-ta*, 1re année, 7e lune, jour *keng-chin* (19 septembre), une étoile filante parut au S. du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et environnantes); elle arriva jusqu'auprès de *Ta-kio* (Arcturus). Sa queue était longue de 3 degrés; elle se changea en un nuage blanc, qui s'étendit au S. des Sept-Illustres (μ, ζ, $\varkappa$, Bouvier), et s'arrondit comme une roue. (Cette observation peut se rapporter à une Aurore boréale).

1327. (Supplément de Ma-touan-lin.) Période *Thaï-ting*, 4e année, 10e lune, jour *y-sse* (24 novembre), en plein jour, il y eut une étoile filante.

1328. Période *Tchi-ho*, 1re année, 5e lune, jour *keng-tchin* (26 juin), une étoile filante, grande comme une cruche, jeta une vive lueur qui éclaira la terre.

1334. Période *Youen-thoung*, 2e année, 7e lune, jour *ki-yeou* (23 août), on vit dans la nuit une étoile filante, grande comme un gobelet, de couleur rouge, et avec une queue longue de plus de 5 degrés. Sa lumière éclaira la terre; elle parut auprès du Gué céleste (α, γ, δ, Cygne) et disparut au midi du *Li-koung* (β, μ, λ, Pégase).

1337. Période *Tchi-youen*, 9e lune, jour *koueï-yeou* (30 octobre), une étoile singulière, grosse comme un gobelet et de couleur blanche, parut au-dessous du Drapeau de droite (étoiles d'Antinoüs à l'O. d'α, Aigle); elle alla au S. O. et disparut près d'un amas de vapeurs.

1350. (Supplément de Ma-touan-lin.) Période *Tchi-ting*, 10e année, 6e lune, jour *jin-tseu* (2 août), une étoile entra dans le Boisseau du Nord (α, β, γ, δ, ε, ζ, η, grande Ourse); elle était grande comme la lune. On entendit un bruit violent comme un coup de tonnerre : trois jours après, ce même phénomène se renouvela.

1356. Même période, 16e année, 11e lune, jour *ting-haï* (3 décembre), il parut une étoile filante, grande comme un gobelet et de couleur bleu blanchâtre; elle avait une traînée longue de 5 degrés environ : sa lueur éclaira la terre. Elle alla du N. O. au S. E. et disparut près d'un amas de vapeurs. On entendit un bruit semblable à celui du tonnerre.

1357. Même période, 17e année, 9e lune, jour *koueï-mao* (15 octobre), on vit une étoile volante, grosse comme un gobelet. Elle était bleu blanchâtre; sa lueur éclairait la terre : sa queue était longue de près d'un degré. Elle partit du groupe *Wang-lang* (α, β, γ, η, Cassiopée) et disparut au-dessous du *Keou-tchin* (ζ, petite Ourse et environnantes).

1358. Même période, 18e année, 11e lune, pendant que les troupes des Ming assiégeaient la ville de Thaï-ming, il parut une étoile semblable à une flamme, et qui coula du S. E. Elle avait une queue comme une comète : elle tomba, entra en terre et devint pierre.

1359. Même période, 19e année, 1re lune, jour *koueï-tcheou*

(17 février), il parut une étoile filante, grande comme un gobelet; elle était de couleur rouge, et sa queue était longue de 5 degrés environ : elle partit du Fleuve austral (α, β, petit Chien) et se perdit dans le *Teng-che* (Serpent droit; λ, κ, ι, Andromède). Avant que cette étoile disparût, sa queue se brisa, et on entendit un bruit semblable au tonnerre. — 10e lune, jour *sin-sse* (12 novembre), il parut une étoile filante, grosse comme une pêche; sa couleur était jaune. Elle s'allongea ensuite sur une étendue d'un degré; une autre petite étoile la suivait : sa couleur était rouge, et sa traînée lumineuse occupait environ 3 degrés; elles partirent de l'E. de l'astérisme *Oeï* (α, Verseau), allèrent doucement à l'E. et disparurent à l'O. de l'astérisme *Pi* (le Filet, les Hyades).

1360. Période *Tchi-ting*, 20e année, 5e lune, jour *y-haï* (2 juillet), il parut une étoile filante, grosse comme une pêche; sa couleur était rouge : sa traînée lumineuse était longue de 10 degrés environ; elle parut auprès de l'astérisme *Fang* (β, π, Scorpion), alla lentement à l'O. et disparut près d'un amas de vapeurs.

1362. Même période, 22e année, 9e lune, jour *ki-sse* (15 octobre), on vit une étoile filante, grande comme une petite tasse à vin; sa couleur était bleu blanchâtre : sa lumière éclaira la terre.

1365. Même période, 25e année, 5e lune, jour *sin-yeou* (24 juillet), une étoile filante, grande comme une tasse à vin et de couleur bleu blanchâtre, éclaira la terre par sa lumière; elle parut auprès de l'astérisme *Fang* (β, π, Scorpion), alla lentement à l'O. et disparut dans l'enceinte du *Thaï-weï*, au-dessous de l'étoile *Tsi-fa* de droite (β, Vierge).

1366. Même période, 26e année, 6e lune, jour *koueï-yeou* (29 juillet), une étoile filante, grosse comme une tasse à vin et de couleur bleu blanchâtre, parut avec une queue longue d'un degré environ; elle se montra d'abord auprès de l'astérisme *Sin* (α, σ, τ, Scorpion); elle alla au S. E. sa lumière éclaira la terre : elle disparut près d'un amas de vapeurs. — 11e lune, jour *ki-tcheou* (13 décembre), une étoile filante, grande comme une

tasse à vin, parut, et se divisa en trois étoiles qui se suivaient: la première était de couleur bleue, les deux suivantes étaient de couleur rouge : leur traînée lumineuse était longue de plus de 20 degrés. Elles partirent d'abord du N. E. allèrent lentement au S. O. et disparurent auprès d'une masse de vapeurs.

1368. Période *Hong-wou*, 1re année, 7e lune, 6e jour (15 août), pendant la nuit, il parut une étoile grande comme une tasse; sa couleur était blanche, avec une nuance de bleu; sa queue était longue de 4 à 5 degrés; sa lueur éclairait le ciel : on entendit du bruit. Du N. E. elle vola vers la lune et s'arrêta.

1370. Même période, 3e année, 10e lune, jour *keng-tchin* (13 novembre), il parut une étoile rouge, grosse comme une pêche; elle partit du *Thien-fou* (θ, η, Antinoüs), alla jusqu'au groupe *Louï-pi-chin* (étoiles à l'O. de β, Poissons); elle toucha le groupe *Iu-lin* (δ, τ, Verseau, β, Poissons et autres des Poissons) et se divisa avec bruit; cinq petites étoiles suivirent la première jusqu'au *Tou-sse-kioung* (β, Baleine) : une vive lueur éclaira le ciel. La première étoile était grande comme un gobelet : elle traînait une queue rouge, parvint au groupe du Magasin céleste (*Thien-thsang*, ι, η, τ, θ, Baleine) et disparut avec bruit au S. E. un instant après.

1388. Même période, 21e année, 8e lune, jour *y-sse* (4 septembre), une étoile rouge, grande comme une tasse, parut près du Manche du *Pe-teou* (ε, ζ, η, grande Ourse), parcourut 30 degrés environ au S. E. et se divisa en deux étoiles; elle parcourut encore près de 5 degrés et se divisa en trois étoiles, qui traversèrent l'astérisme *Mao* (les Pléiades) et se réunirent en deux; puis, celles-ci, après avoir traversé le groupe *Thien-lin* (δ, ε, Bélier), se réunirent en une seule étoile, et disparurent dans le groupe de la Ménagerie céleste (δ, ε, γ, ζ, η, Éridan).

1404. Période *Yong-lo*, 1re année, 11e lune intercalaire, jour *Ting-mao* (6 janvier), il parut une étoile de couleur bleue et grande comme un boisseau; sa lumière éclaira la terre: elle sortit du milieu des nuages, au zénith, et alla au S. O.

puis on entendit un grand bruit, et elle rentra dans les nuages.

1404. Même période, 2e année, 5e lune, jour *ping-ou* (13 juin), il parut une étoile rouge, grande comme une mesure d'un boisseau; sa lueur éclaira la terre : elle parut au zénith, alla au N. O. et entra au milieu des nuages.

1418. Même période, 16e année (sans le jour), il parut une étoile grande comme une mesure d'un boisseau; sa couleur était bleu rougeâtre; sa lueur éclairait la terre. De l'E. de l'astérisme *Lieou* (δ, Hydre), elle alla se perdre dans des vapeurs.

1424. Même période, 22e année, 5e lune, jour *ki-haï* (21 juin), il parut une étoile grande comme une petite écuelle; sa couleur était bleu blanchâtre : sa lueur éclaira la terre; elle parut au S. E. au milieu des nuages, alla vers le N. O. et rentra dans les nuages avec un bruit semblable à l'explosion d'un coup de canon ou d'une pièce d'artifice (*Pao*). — 7e lune, jour *keng-yn* (11 août), il parut une étoile grande comme une tasse; sa couleur était rouge. De l'astérisme *Koeï* (ζ, β, Andromède), elle passa dans *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion), s'enflamma et se divisa en agitant vivement les étoiles.

1427. Période *Siouen-te*, 1re année, 12e lune, jour *ki-sse* (12 janvier 1427), il parut une étoile grande comme une petite écuelle; sa couleur était rouge; elle sortit de l'astérisme *Khiouen-che* (ν, ε, ζ, Persée), alla à l'E. dépassa le *Tsing* oriental (μ, δ, ζ, Gémeaux) et tomba à terre avec un bruit semblable au tonnerre.

1436. Période *Tching-ting*, 1re année, 8e lune, jour *y-yeou* (2 octobre), depuis le soir jusqu'au matin, on vit plus de cent étoiles filantes, grandes et petites.

1439. Même période, 4e année, 8e lune, jour *koueï-mao* (5 octobre), on vit plusieurs centaines d'étoiles filantes, grandes et petites.

1449. Même période, 14e année, 10e lune, jour *koueï-tcheou* (22 octobre), il parut une étoile grande comme une tasse; elle était de couleur rouge : elle éclaira la terre; elle partit du N. O. des *San-chi* (trois étoiles à l'O. d'α, grande Ourse), heurta le *Chao-pi*

φ, Dragon); alors sa queue se changea en une vapeur bleu blanchâtre, longue de 5 degrés ou pieds environ, et se recourba sur elle-même. — 12e lune, jour *wou-chin* (16 décembre), il parut une étoile grande comme une tasse; sa couleur était bleu blanchâtre : on entendit du bruit, et sa lumière éclaira la terre. Elle parut près de l'étoile *Thaï-i* (grande Unité, *i*, Dragon); elle alla au S. E. sur une étendue de 10 degrés environ et devint aussi grosse qu'une mesure d'un boisseau; elle arriva au bord occidental du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent et d'Ophiucus autour de α, Hercule) et disparut : quatre petites étoiles accompagnaient la grande.

1451. Période *Khing-thaï*, 2e année, 6e lune, jour *ping-chin* (27 juillet), on vit plus de quatre-vingts étoiles filantes, grandes et petites. — 8e lune, jour *jin-ou* (10 septembre), il parut trois étoiles grosses comme une tasse, chacune, et une autre grande comme une mesure d'un boisseau. Toutes étaient rouges et leur lumière éclaira la terre. — Une étoile parut à l'O. du *Tse-weï* (enceinte de la queue du Dragon), et alla au N. jusqu'à l'astérisme *Yn-te* (petites étoiles entre α, Dragon, et β, petite Ourse). Trois petites étoiles l'accompagnaient. Une étoile parut dans le Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne). Elle alla au S. E. jusqu'au S. du Fleuve (la voie Lactée : peut-être faut-il lire le Tambour du Fleuve? α, β, γ, Aigle). Plus de dix petites étoiles l'accompagnaient, formant une traînée lumineuse qui se divisa avec un bruit semblable à celui du tonnerre.

1459. Période *Thien-chun*, 3e année, 4e lune, jour *koueï-tcheou* (3 mai), on vit une étoile grande comme une tasse; elle était de couleur rouge, et sa lumière éclaira la terre; elle partit du Drapeau de gauche (Étoiles à l'E. d'α, β, γ, Aigle), alla au S. E. et toucha l'étoile caractéristique de la division stellaire *Nu* (ε, Verseau); sa queue se divisa en jetant une vive lueur.

1464. Même période, 8e année, 2e lune, jour *jin-tseu* (5 avril), il parut une étoile grande comme une tasse : sa lumière éclaira la terre. Du Marché céleste (enceinte des étoiles du Serpent au-

tour de α, Hercule), elle alla vers le Gué céleste (α, γ, δ, ζ, Cygne). Sa queue se transforma en une vapeur bleu blanchâtre qui avait la forme d'un serpent; elle était longue d'une dizaine de degrés et fut longtemps à se dissiper.

1476. Période *Tching-hoa*, 12e année, 11e lune, jour *y-tcheou* (11 décembre), il parut deux étoiles qui formaient ensemble comme un treuil de puits : l'une tomba dans un canal et l'autre sur un rempart; leur lueur était rouge et éclaira le ciel.

1484. Même période, 20e année, 5e lune, jour *ping-chin* (3 juin), une grande étoile tomba au S. E. de la ville de Fan-iu (l'une des deux villes dont se compose Canton). On entendit un bruit semblable à celui du tonnerre; elle se divisa en une dizaine de petites étoiles. Le ciel et la terre devinrent tout à fait obscurs; longtemps après, ce météore reparut.

1485. Même période, 21e année, 1re lune, jour *kia-chin* (17 janvier), 1er jour de la lune, à l'heure *Chin* (3 à 5 heures du soir), il parut un feu brillant au zénith; il tomba un peu à l'O. et se transforma en un nuage blanc; puis, ce météore se replia sur lui-même, et s'éleva en haut : on entendit du bruit. Quelque temps après, il y eut vers l'O. une étoile rouge, grande comme une tasse; elle alla à l'O. vers des vapeurs : alors sa traînée lumineuse se transforma en un nuage blanc, qui se courbait comme un serpent et dura longtemps. Directement à l'O. on entendit un roulement semblable à celui du tonnerre. (Il est possible que ce double phénomène se rapporte à une aurore boréale.)

1488. Période *Chong-tchi*, 1re année, 8e lune, jour *wou-chin* (22 septembre), à l'heure *Sse* (9 à 11 heures du matin), il parut au midi une étoile filante grande comme une écuelle. Partant du midi, elle parcourut environ 10 degrés, devint grande comme une tasse, alla au S. O. jusqu'à ce qu'elle s'approchât d'un amas de vapeurs. Sa queue se transforma en un nuage blanc qui se repliait sur lui-même, allait en serpentant et finit par se diviser.

1491. Même période, 4e année, 10e lune, jour *ting-sse* (15 novembre), il parut une étoile rouge qui brilla comme un éclair;

elle alla du S. O. au N. E. fit un bruit semblable à un roulement de tambour, tomba dans la ville de Kouang-chan (Ho-nan), et se transforma en une pierre de la grosseur d'une mesure d'un boisseau. Dans la ville de Chang-tching, du district Kouang (Ho-nan), on vit aussi une grande étoile qui vola dans le ciel, comme celle qui fut vue à Kouang-chan. — 11e lune, jour *kia-su* (2 décembre), une étoile tomba au N. O. de la ville de Tchin-ting (Pe-tchi-li) : sa couleur rouge éclaira le ciel. Au S. O. il y eut un grand bruit, comme un roulement de tambour ou comme un char qui roule rapidement.

1494. Même période, 7e année, 5e lune, dans le district de Siouen-fou (Siouen-hoa), dans les provinces de Chan-si et de Ho-nan, des étoiles tombèrent en plein jour.

1495. Même période, 8e année, 4e lune, jour *sin-oueï* (12 mai), il parut une étoile semblable à une roue; elle coula jusqu'au N. O. et tomba dans la ville de Yen-chan (Pe-tchi-li), en faisant un bruit pareil à celui du tonnerre.

1496. Même période, 9e année, 3e lune intercalaire, jour *wou-ou* (23 avril), au S. E. de Ping-king, il y eut une étoile filante, grande comme la lune : sa couleur rouge éclaira la terre. Elle alla au N. O. s'arrêta, et l'on entendit un roulement dans le ciel.

1497. Même période, 10e année, 1re lune, jour *jin-tseu* (11 février), il parut une étoile grande comme un boisseau. Sa couleur était jaune blanchâtre; sa trace s'étendait sur plus de 30 degrés. Elle était accompagnée d'une petite étoile; elle tomba au N. O. de Ning-hia (Chensi nord), et le ciel fit entendre plusieurs coups semblables à des coups de tonnerre. — 9e lune, jour *y-sse* (2 octobre), il parut une étoile semblable à un boisseau. Sa lumière effaça celle de la lune; elle coula du N. O. et tomba à Young-ping (Pe-tchi-li) avec un grand bruit.

1498. Même période, 9e année, 1re lune, jour *kouei-haï* (17 février), une étoile filante tomba dans le district de So-tcheou (Chen-si nord); elle était grande comme une maison et fit un

bruit pareil à celui du tonnerre longtemps après sa disparition. — 10e lune, jour *jin-chin* (24 octobre), le matin, du côté de l'E. parut une étoile rouge, grande comme une tasse, qui parcourut environ 10 degrés. Sa lumière éclaira la terre; elle alla au S. E. une dizaine de petites étoiles l'accompagnaient.

1501. Même période, 14e année, 7e lune intercalaire, jour *sin-sse* (18 août), dans le Chan-tong, il y eut une étoile grande comme une roue; elle était de couleur rouge et éclaira la terre. Elle alla du S. E. au N. O. et tomba à Cheou-kouang. Le ciel fit entendre un roulement de tambour.

1503. Même période, 16e année, 1re lune, jour *ki-yeou* (9 mars), à Nan-king, une étoile tomba en plein jour.

1507. Période *Tching-te*, 1re année, 12e lune, jour *keng-ou* (8 janvier 1507), une étoile, grande comme une tasse, tomba au milieu de la ville centrale du district de Ning-hia. Il y eut dans le ciel une lueur rouge qui couvrait une étendue égale à deux meou (environ 12 ares).

1507. Même période, 2e année, 8e lune, jour *ki-haï* (4 octobre), dans le district de Ning-hia, il y eut une grande étoile qui coula du milieu du S. vers le S. O. et tomba; ensuite, il y eut une vapeur blanche, large de 3 degrés, longue de 50 degrés.

1510. Même période, 5e année, 4e lune, jour *ting-haï* (9 mai), dans le district de Louï (Louï-tcheou, près de l'île de Haï-nan), il parut une étoile grande comme la lune. Du S. E. elle glissa au N. O. et se divisa en deux traînées lumineuses, semblables à des queues de comète, qui se suivirent et disparurent avec un bruit semblable au tonnerre.

1511. Même période, 6e année, 8e lune, jour *koueï-mao* (17 septembre), il y eut une étoile filante grande comme un crible à riz; sa queue était longue de 40 à 50 pieds ou degrés : sa couleur était rouge et éclairait le ciel. Du N. O. elle tourna vers le S. E. et la queue eut alors trois têtes. Elle tomba dans la ville de Thsoung-king du Sse-tchouen. Sa couleur changea et devint blanche. On entendit un bruit pareil à celui du tonnerre.

1520. Même période, 15e année, 1re lune, jour *ting-oueï* (6 février), à l'heure *yeou*, une étoile tomba dans la vallée de Loung-tchouen du Chan-si. — 4e lune, jour *ping-su* (15 mai), près de Koung-tchang-fou du Chen-si, il parut une étoile grande comme le soleil et de couleur rouge. De l'E. elle coula au S. O. et tomba. On entendit retentir les tambours du ciel (des coups de tonnerre).

1533. Période *Kia-tsing*, 12e année, 9e lune, jour *ping-tse* (24 octobre), il parut une étoile filante grande comme une petite écuelle : sa lueur éclaira la terre. Du N. E. du *Tchoung-taï* (λ, μ, grande Ourse), elle alla près d'un amas de vapeurs : sa queue se changea en une vapeur blanche. Du quatrième au cinquième coup de tambour (de 2 à 4 heures du matin), dans les quatre parties du ciel, il y eut une quantité innombrable d'étoiles filantes, grandes et petites, allant ensemble en ligne droite et transversale : cela dura jusqu'au jour.

1535. Même période, 14e année, 9e lune, jour *wou-tse* (26 octobre), à Khaï-foung-fou (Ho-nan), à l'aube du jour, le tambour du ciel retentit. Une étoile, grande comme une petite écuelle, coula au S. E. accompagnée de beaucoup de petites étoiles semblables à des perles.

1540. Même période, 19e année, 5e lune, jour *sin-tcheou* (14 juin), une étoile tomba à Tsao-kiang (Pe-tchi-li) et se changea en quatre pierres.

1575. Période *Wang-li*, 3e année, 5e lune, jour *koueï-haï* (3 juillet), en plein jour, à King-tcheou (Hou-kouang), le tambour du ciel retentit. Deux étoiles tombèrent et se transformèrent en pierres noires.

1576. Même période, 4e année, 11e lune, jour *kia-ou* (25 novembre), quatre étoiles tombèrent à Pïi-hien (Chan-tong) : une vive lumière éclaira la terre. Elles annonçaient la chute de la dynastie Ming. Des points d'un rouge sombre parurent à l'O. de la ville ; leur couleur était semblable à celle du cinabre. Ils couvraient une étendue de 2 li (environ $\frac{2}{10}$ de lieue) en longueur sur 3 degrés

de large. Cette même lune, à Ling-tchan, une étoile, longue d'un degré environ, vola au N. en plein jour.

1585. Même période, 13e année, 7e lune, jour *sin-sse* (28 juillet), il parut une étoile grande comme une écuelle; elle tomba à Mien (Sse-tchouen). Le tambour du ciel retentit.

1587. Même période, 15e année, 6e lune, jour *ping-yn* (3 juillet), à Ping-yang (Chan-si), en plein jour, il tomba une étoile. — Jour *ting-mao* (4 juillet), heure *tchin* (7 à 9 heures du matin), il parut une étoile grande comme un boisseau; elle tomba à Ping-yn, avec un bruit semblable à celui du tonnerre.

1589. Même période, 17e année, 1re lune, jour *keng-chin* (16 février), une étoile tomba à Si-ning-weï (Chen-si occidental); elle était grande comme la lune. On entendit le tambour du ciel (un coup de tonnerre).

1592. Même période, 20e année, jour *ping-tchin* (sans le mois), trois étoiles tombèrent au S. E. de la ville de Min (Fou-tcheou-fou, Fo-kien).

1594. Même période, 22e année, 1re lune, jour *wou-su* (28 février), au mont Tsing de Pao-ting (Pe-tchi-li), il parut une grande étoile volante, brillante comme une comète et longue de plus de deux cents pieds.

1599. Même période, 27e année, 3e lune, jour *keng-tseu* (5 avril), à Kaï-tcheou (Liao-toung), le tambour du ciel retentit, et aussitôt il tomba trois grandes étoiles.

1602. Même période, 30e année, 9e lune, jour *ki-oueï* (5 octobre), 1er de la lune, une grande étoile fut vue au S. E. elle était rouge comme du sang et grande comme une tasse. Subitement, elle se transforma en cinq étoiles de moyenne grandeur; puis, ces étoiles se réunirent en une seule étoile. — Jour *sin-sse* (27 octobre), on vit plusieurs centaines de petites étoiles qui se séparaient et se réunissaient. — 10e lune, jour *jin-tchin* (7 novembre), au cinquième coup de tambour (5 heures du matin), des étoiles filantes sortirent du zénith : leur lueur se divisa en sept directions. On entendit un bruit semblable au tonnerre.

L'apparition du 27 octobre est décrite comme il suit dans le supplément du Wen-hian-thoung-khao : 9e lune, jour *sin-sse* (27 octobre), pendant la nuit, à la cinquième heure, il parut au N. E. une étoile grande comme un œuf de poule et d'une couleur blanc bleuâtre; sa queue avait de l'éclat. Du N. E. des étoiles *Hia-taï* (ν, ξ, grande Ourse), elle alla jusqu'à ce qu'elle s'approchât de l'O. — Au midi, il parut aussi une étoile grande comme un rouleau de pierre pour écraser le grain; elle était de couleur bleu blanchâtre : sa queue rayonnait et sa lumière éclairait la terre. Elle parut au S. O. de *Tsan* (Baudrier et quadrilatère d'Orion) et s'avança jusqu'aux étoiles de la Ménagerie céleste (γ, δ, ε; τ, Éridan). Après cette apparition, il y eut deux petites étoiles qui suivirent la grande, et après encore, il y eut plusieurs centaines d'étoiles filantes, grandes et petites, mêlées et confondues, qui suivirent la même direction.

1605. Même période, 33e année, 9e lune, jour *wou-tse* (18 octobre), il parut une étoile grande comme une tasse; elle tomba auprès de Nan-king : sa lueur était comme celle d'une flamme. Elle atteignit la terre; elle alla en divers sens, comme un ver luisant, et peu après elle disparut. — La lune suivante, il y eut une étoile grande comme la lune, qui partit du N. O. coula jusqu'à la tour de l'inspection des armes, se divisa en trois et tomba à terre. — 11e lune, une étoile tomba sur la salle des examens à Nan-king; elle entra en terre et ne laissa pas de trace.

1607. Même période, 35e année, 11e lune, jour *kouei-sse* (12 décembre), des étoiles tombèrent à King-yang, à Chun-hoa (Chen-si); elles étaient grandes comme des roues; leur couleur était rouge, leur queue longue de plusieurs pieds, et l'on entendit un bruit semblable au roulement du tonnerre.

1610. Même période, 38e année, 2e lune, jour *kouei-yeou* (11 mars), une étoile, grande comme un boisseau, tomba au N. O. de Yang-kio (Thaï-youen-fou du Chan-si). L'étoile se brisa, et l'on entendit le bruit des tambours du ciel.

1613. Même période, 41e année, 1re lune, jour *keng-tse* (21 jan-

vier), à Tchin-ting (Pe-tchi-li), le tambour du ciel retentit. Une étoile filante tomba en plein jour, avec une vive lueur.

1615. Même période, 43e année, 3e lune, jour *wou-chin* (19 mai), en plein jour, une étoile tomba à l'E. de Thsing-foung (Pe-tchi-li). On entendit un bruit pareil à celui du tonnerre.

1618. Même période, 46e année, 10e lune, jour *sin-yeou* (12 novembre), une étoile, grande comme un boisseau, tomba hors de la porte Ngan-te de Nan-king. Elle fit un bruit pareil à celui de la foudre, et se transforma en une pierre qui pesait vingt et une livres.

1623. Période *Thien-ki*, 4e année, 9e lune, jour *kia-yn* (10 octobre), près du chef-lieu Kou-youen (Chen-si), des étoiles tombèrent comme une pluie.

1642. Période *Thsoung-tching*, 15e année, en été, des étoiles coulèrent comme une sorte de tissu.

1644. Période *Houng-kouang*, 1re année, 3e lune, jour *ki-yeou* (17 avril), 1er de la lune, il y eut une chute d'étoile dans le *Yu-ho* (Canal impérial).

FIN DE LA SECTION ASTRONOMIQUE
DANS LE SUPPLÉMENT DE MA-TOUAN-LIN
ET DANS LA COLLECTION DES VINGT-QUATRE HISTORIENS DE LA CHINE.

TABLE

DES APPARITIONS DE MÉTÉORES EN CHINE.

PREMIÈRE PARTIE.

DEPUIS LES ANCIENS TEMPS JUSQU'À L'AN 960 DE J. C.

ANNÉES AV. J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
687	"	"	23	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
643	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	24	
211	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
192	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
134-128	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Agitation d étoiles pendar cette période.
89	"	"	9	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
86-81	"			"	"	"	"	"	"			"	Sans l'année la lune.
74			"	7, 8, 9			"			"	"	"	
38	"	"	13	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
32	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	
29	"	29	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
22	"	"	"	12	"	"	"	"	"	"	"	"	
21	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	A la lune interc.
19	"	"	"	"	"	16	"	"	"	"	"	"	
15	"	"	27	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
12	"	"	"	(l) 3e lune.	24	"	"	"	"	"	"	"	(1) Sans le jou
8	"	6	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
6	"	"	4	"	"	"	"	"	"	27	"	"	
ANNÉES DE J. C.													
2	"	"	"	"	"	"	6e lune.	"	"	"	"	"	Sans le jour.
34	"	"	"	4	"	"	"	"	"	"	"	"	
35	25	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
36	"	9	"	"	"	27	"	"	"	14	"	"	
57	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	14	"	
58	"	"	"	"	22	"	"	"	"	"	"	"	
64	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
76	"	"	5	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
81	"	"	"	"	"	"	20	"	"	"	"	"	
89	"	2	2e l. et 15	28	4	"	"	"	"	"	"	"	
90	"	"	"	4	"	22	"	"	"	11	16	24	
91	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	

NÉES J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
94	"	"	"	"	"	"	4	"	"	"	"	"	
95	18	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
96	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2	"	
99	"	"	"	"	"	25	"	"	"	"	"	"	
103	6	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
104	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	30	"	
105	"	"	"	8	29	"	"	15	"	"	25	"	
106	"	"	"	"	"	"	"	"	"	9e lune.	"	"	
138	"	"	27	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
164	"	"	"	1	"	"	"	"	"	"	"	"	
178	"	"	"	"	8	"	"	"	"	"	"	"	
4-190	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans l'année.
235	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
238	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	"	
263	"	"	"	"	"	"	6e lune.	"	"	"	"	"	
268	"	"	"	"	"	"	"	7e lune.	"	"	"	"	
288	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	"	
303	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5	
304	"	"	"	"	"	"	"	"	15	"	"	"	
305	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	10e lune.	"	
307	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	"	
308	20	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
310	"	"	"	"	"	"	"	"	"	23	"	"	
322	"	"	"	"	"	"	"	"	10	"	"	"	
333	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
337	"	"	"	"	"	"	30	"	"	"	"	"	
340	"	"	15	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
352	"	"	"	"	"	"	21	"	"	"	"	"	
354	"	"	"	"	14	"	"	"	"	"	"	"	
369	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	10	
381	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	20	"	
388	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	A la lune intercal.
389	"	"	"	4	"	"	"	"	"	"	"	"	
394	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
401	"	"	"	8	"	"	"	"	"	"	"	"	
433	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	12e l. sans le jour.
452	"	"	"	"	"	"	6	"	"	"	"	"	
455	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	22	"	
511	"	"	"	"	"	"	"	"	"	10	"	"	
532	"	"	"	"	"	"	"	28	"	"	"	"	
545	"	"	"	"	"	"	"	"	"	22	"	"	
549	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
552	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	12e lune.
554	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	11e lune.	
565	"	"	31	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
568	"	"	18	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
578	8	"	"	"	"	"	21	12	"	"	"	"	
579	"	"	"	"	15	23	"	30	"	"	"	"	
581	3	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
585	"	"	"	"	"	"	"	"	23	"	"	"	
599	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26	

ANNÉES DE J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS
616	14	"	"	"	28		"	"	"	14, 15	"	"	
617	"		"	"		11	"		"	"	"	"	
620	"	"	"			"	"	"	"	"	29	"	
628	"	"							"	"	"	"	Sans la lune.
640	"		"	"		"	"	"	8e lune.	"	"		
642					"	"	22			"	"	"	
644	"	"	"		"	5e lune.	"		"	"	"	"	
645		"		"	12	"	"	"	"	"	"	"	
652	"	"	"		"	"		"	"	"	10e lune.	"	
653	"	"	"	"	"			"	"	"	26	"	
666	"	15	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
670	"	"	"	"	"	"		"	"	"	"	11e lune.	
679	"	"	"	"		"	"	"	"	"	"	9	
680	5	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
707	"	"	"	24	"	"	"	"	"	"	"	"	
708	"	"	16	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
710	"	"	"	"		"	"	"	"	8	2		
712	"	"	5	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
713	"			"	"	"	6e lune.	"	"	"	"		
714	"	"		"	"	"	15	"	"	"	"	"	
724	"	"	"	"	"	"	"	"	"	27	"	"	
744	"	"	"	4	"	"		"	"	"	"	"	
757	"	"	"	"	19	"	"	"	"	"	"	3	
764	"	"	"	"	"	"	4	"	"	"	"	30	
767	"	"	"	"		"	"	"	"	15	"	"	
768		"	"	"	"	"	"	"	"	19	"	"	
771	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2	"	
773	"	"	"	"	"	"	18	"	"	"	"	"	
774	18	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
775	"	"	"	9	"	"	"	"	"	"	"	"	
777	"	"	"	11	"	"	"	"	"	"	"	"	
783	"	"	"	"	"	"	"	"	16	"	"	"	
784	"	"	"	"	"	"	10	"	"	"	"	"	
787	"	"	"	"	"	"	15	"	"	"	"	"	
798	"	"	"	"	"	20	"	"	"	"	"	"	
808	17	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
809	"	"	"	"	"	"	"	"	16	"	"	"	
811	"	"	30	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
814	"	1re lune.	"	27	"	"	"	"	"	"	"	"	
817	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	
819	"	"	"	"	"	18	"	"	"	"	"	"	
820	"	"	"	"	"	"	"	"	5	"	"	"	
821	"	24	"	"	4e lune.	"	"	12	17	"	"	"	
822	"	"	"	"	"	14	30	"	"	"	26	"	
823	"	"	"	"	"	"	"	"	23	"	"	"	
824	"	"	"	"	4e lune.	"	"	7, 28	"	"	"	"	
825	"	2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
826	"	"	"	"	"	"	5	27	6	"	"	"	
830	"	"	"	"	"	"	22	"	"	"	"	"	
833	"	"	"	"	"	"	23	"	"	"	"	"	
834	"	"	"	"	"	"	11	"	"	"	"	"	

ÉES J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
835	"	"	"	"	"	"	22	"	"	"	"	"	
837	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	8	18	
838	"	"	"	"	"	4	"	"	"	"	"	"	
839	"	"	"	13	"	"	"	"	"	3	"	"	
841	"	"	"	"	"	"	21, 23	"	"	"	"	22	
844	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1	"	"	
846	"	"	"	8	"	"	"	"	"	"	"		
865	"	"	"	"	"	"	"	1	"	"	"	"	
868	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	25	"	
872	"	"	au print.	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
875	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	en hiver.	
876	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
877	"	"	"	"	"	"	"	7e lune.	"	"	"	"	
881	"	"	"	"	"	"	"	"	10, 11, 18	"	"	"	
883	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	11e lune.	
886	"	"	"	"	"	"	"	"	"	9e lune.	16	"	
887	"	"	"	"	"	5e lune.	"	"	"	"	"	"	
894	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la l., en été.
896	"	"	"	"	"	"	6e lune.	"	"	"	"	"	
898	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	27	"	
900	"	"	"	28	"	"	"	"	"	"	"	11e lune.	
903	"	"	v. l'équin.	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
904	"	"	"	"	"	30	"	"	"	"	"	"	
905	"	"	"	12	"	"	"	"	"	"	"	"	
911	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	17	
924	"	"	"	"	"	"	21, 23	"	"	"	"	"	
925	"	"	"	"	"	"	22, 23	"	"	"	7	"	
926	"	"	"	"	"	"	22	"	"	"	"	"	
927	"	"	"	12	"	"	"	"	"	"	"	"	
930	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	24	"	
931	"	"	"	"	"	"	"	"	"	15	"	"	
933	"	"	"	"	"	"	20, 25	"	"	"	"	"	
934	"	"	"	13	"	"	"	"	"	14	"	"	
938	"	"	"	27	"	"	"	"	"	"	"	"	
954	"	20	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
956	"	"	15	3e lune.	"	"	"	"	"	"	"	"	

DEUXIÈME PARTIE.

DYNASTIE SOUNG, DE 960 À 1275.

ANNÉES DE J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATION
960	"	17	"	"	4e lune.	"	1, 12, 23	"	"	19, 20	"	23	
961	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
962	"	"	"	"	"	13	15	"	"	"	"	"	
963	"	"	21	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
964	"	"	"	3	"	"	"	"	"	"	"	"	
965	"	"	"	"	"	"	19	"	"	"	"	"	
966	15	22	"	"	12	"	"	"	"	14	"	"	
968	"	"	"	"	"	"	"	3	"	12	"	"	
969	"	"	"	"	"	"	20	"	"	"	"	"	
970	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	3	"	
971	"	"	"	"	"	"	"	"	20	"	"	"	
972	"	"	"	"	"	"	"	"	28	"	"	"	
974	"	"	"	"	"	"	"	"	"	14	"	"	
977	"	"	"	"	6	"	"	"	"	"	"	"	
978	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5	"	
983	"	"	"	25	"	"	"	4, 25	"	"	"	"	
984	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	16	"	
985	"	9	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
987	"	"	"	"	"	"	17	"	"	10	"	"	
988	"	"	"	"	13	"	12, 16	"	"	"	11	"	
989	"	"	"	"	8	"	"	"	"	"	"	"	
990	"	"	25	"	"	"	"	"	30	"	30	"	
991	"	12	"	"	"	"	19	"	"	"	"	"	
992	"	"	"	20	20	"	29	"	"	"	"	"	
993	"	"	"	"	31	"	"	"	"	"	"	"	
994	"	"	"	"	"	"	"	"	"	8, 28	"	"	
995	"	"	"	"	31	"	"	7	"	"	"	"	
996	"	"	"	"	21	8, 28	"	"	14	"	"	"	
997	"	"	"	"	"	"	"	"	"	19	"	"	
1002	"	"	"	25	"	"	"	"	27	12, 14, 23, 28	"	"	
1003	"	"	"	"	"	8	13	4	"	"	"	23	
1004	25	"	"	"	"	25	"	"	"	"	"	12	
1005	13, 21	"	10	2	"	5	"	"	"	"	7	11	
1006	"	"	"	"	"	12	2, 24	16	"	"	25	"	
1007	"	"	"	13	"	"	"	7, 10	11	"	"	"	
1008	11	"	26	"	"	17	24	"	3	9	"	"	
1009	"	"	"	1	8	16	"	"	5	4	"	"	
1010	"	"	"	"	14	23	23, 31	7, 15	11	14	13	"	
1011	"	"	14	"	27	19	23	2, 8	"	"	16	"	
1012	"	"	5	"	"	"	"	"	11	"	"	"	
1013	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Une o[illegible]va-tion sans [illegible]ne.
1014	3, 9	"	"	2	7	"	"	21	"	24	25	1	
1015	"	"	14	29	31	11	"	"	"	7	"	"	
1016	"	"	"	"	"	4	"	"	"	"	"	"	

NNÉES J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
1017	"	"	"	29	"	"	6e lune.	"	"	"	"	"	
1018	10	"	"	"	"	"	"	"	"	7, 10	9	"	
1019	"	"	"	"	"	"	24	"	"	"	"	"	
1020	17	21	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1021	"	"	"	"	28	"	"	18	"	"	10	"	
1022	"	"	"	24	"	2, 6, 15, 22	"	"	30	20, 23, 28	"	22	
1023	"	14	28	"	"	26	"	16, 17	"	19, 22, 30	"	"	
1024	"	"	"	24	"	"	19	2	"	11	"	"	
1025	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1026	25	"	1	19	9, 24	28	17	"	"	15, 17	"	25	L'observation de décembre a été portée dans le texte en octobre.
1027	15	5, 9	"	"	"	"	"	"	"	8, 12, 29	"	"	
1028	"	"	"	"	16	"	"	"	"	"	"	"	
1029	"	21	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1030	"	"	19	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1031	"		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1032	"	"	"	"	4, 26	"	"	"	"	1, 3, 4, 14	"	"	
1034	"	"	"	"	"	"	"	"	"	7, 13, 15, 17	12	"	
1035	"	"	"	"	"	"	"	"	13	29	"	23	L'observation de décembre a été portée dans le texte en octobre.
1036	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1037	"	"	"	"	28	13, 25	16, 23	21	"	12, 21	8	"	
1038	"	7	"	4, 11, 20, 21	12	"	"	"	9	"	18, 25	19	
1039	"	24	"	18	"	14	"	"	"	"	"	"	
1040	"	13	"	"	7	5, 11	"	7	"	"	3, 17	17, 30	
1041	"	"	"	"	"	"	"	"	4, 20, 22, 26, 30	7, 18, 19	"	"	
1042	"	"	20, 30	26	15	"	21, 28	11, 19, 22, 29	27	6, 11, 13, 17, 21	"	"	
1043	"	3	17	"	22, 25, 30	"	18	26	25	"	18	"	
1044	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1045	"	"	"	"	"	13	23, 24	25	5, 14	9, 12	13, 15, 25	"	
1046	"	"	"	23	8	"	14	19	"	6, 30	"	"	
1047	"	"	"	"	2, 21	"	21	"	18, 25, 28, 30	6	"	"	
1048	11	2, 14	"	2	16	18	4, 24, 25	8	4, 19	16	7, 28	"	
1049	7	1	"	12	23, 26	"	7, 10, 18	"	"	21	"	1	
1050	2	3	"	"	20	"	5	"	23	"	24	"	
1051	"	8	"	"	"	"	"	16	9	12	"	3	
1052	"	"	"	16, 28	7, 29	"	25, 27	"	20, 21, 29	1, 2, 17, 30	18	8	
1053	24	"	"	"	31	23	23, 24	4, 7	4	11, 23	"	"	
1054	"	"	"	"	"	"	"	6	15	"	"	"	
1055	"	"	"	"	"	"	"	23	"	17, 18	"	5, 10, 21, 28	
1056	"	"	27	10, 17	"	"	"	"	"	14	"	"	
1057	"	26	2, 5, 25	"	"	"	"	3, 5	"	3, 4, 5	"	"	
1058	18	"	"	"	"	18	25	8, 20, 29, 31	11, 15, 17, 22	6, 13	"	"	
1059	"	"	"	19, 23	7	20, 28	2, 12, 13, 20, 24	1	22, 30	6, 16, 18, 30	11, 13, 14, 24	3, 11	
1060	9	5	"	"	15, 17, 24, 27, 29	7, 9, 24	2, 5, 24, 26	"	1, 7	5, 26	15	2	

ANNÉES DE J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
1061	11, 17, 18	"		"	"	25	7, 23, 24, 28	24	"	13, 20, 29	"	18	
1062	6, 10	4	10, 14, 27			3	10	9, 11, 23	10, 26, 30	17, 28	6, 7, 20, 27, 29	"	
1063	"	19	"	2, 22		1	27	22	16	20		"	
1064	"	"		20		"	"	12	3	1, 7, 12, 13	"		
1065			16	3	"	9	6	"	10	2, 18		"	
1066		"	"		6	"	"	1, 17, 19		"	"	"	
1067		"	21	"	17		"	"	"	"	"	"	
1068	"	23, 27	21, 24, 25, 31	1	4, 11, 24	6	4, 6, 8, 9, 19, 21, 23, 25, 27	5, 6, 10, 25, 29	2, 3, 4, 5, 6, 22, 24	3, 9, 10, 12, 17, 22, 23, 25, 28, 29, 31	2, 8, 13, 20, 21, 28	11, 27, 28	
1069	18	17	2	19, 20	7, 18	15, 25	1, 8, 17, 19, 20, 23, 27	12, 19, 22	17, 18, 28	1, 19, 28	6, 7, 19, 25	2	
1070	13	18	12	11, 12, 20, 24	11, 14	16	20, 23, 31	20	"	5, 18, 26, 29	7, 16	16	
1071	11	22	12	10	"	15	23, 27	23	3, 5, 7, 9	8, 19, 20, 26, 27, 28, 29	3, 11	5, 13	
1072	"	"	"	"			29	2	"	"	15, 21, 25	12, 21	
1073	27, 28	1, 25	"		6, 12, 14, 15	8	6 ou 26	4, 30	1, 2, 13, 25, 28	7, 9, 14, 24, 30	"	6, 23	
1074		7, 17	4	25	3, 17		1, 9, 10, 15, 20, 21, 22	13, 16, 17, 21, 22	6, 11, 13, 25, 29	3, 5, 21	3, 13, 15	"	
1075	"	7	2, 23, 24	19	19	17	3, 18, 23, 30	6, 15, 24	6, 7, 16	15, 18, 19	14, 17, 18	"	
1076		26, 29	"	14, 26	10, 31	9, 26, 27	1, 5, 7, 11, 23, 24, 25, 28, 30	1, 3, 26, 30	5, 19, 21, 25, 28, 29, 30	4, 5, 8, 15, 24, 27	1, 5, 16, 17, 19, 24, 30	16, 29	
1077	15, 19	21, 25	2, 9, 24	2, 29	19, 24	18, 19, 21	15, 19, 20, 22, 24, 28	18, 22, 25	4, 17, 23	10, 11, 12, 14, 18, 21, 27, 29	2, 10, 11, 12, 16, 24, 25, 26	25	
1078	"	6, 9	13, 15, 20	3	7	5	13	7, 9, 22	7, 16, 22, 23	1, 17, 21	5, 11	12 *	* Suivant touan-lin, 2 tobre
1079	17		"	23		2, 4, 28, 30	1, 2, 4	2, 3, 23	5, 30	"	8, 16	"	
1080	12	12	1		29, 30	27	10, 22, 24	17	11, 14	17	5, 15	"	
1081	10	21	"		"	"	31		8, 14, 24, 29, 30	30, 31	"	9, 15	
1082	"	"	"	"	19, 20	7	15, 27, 29	"	"	26, 27, 30	9, 26, 29	"	
1083	4, 16		"	"	5		19, 21, 22	15	"	4, 5, 7, 14, 16, 31	5	11	
1084	"		"	"	9, 14	"	17, 20, 25	3, 18, 25	6, 28	"	"	18, 20	
1085	"	8, 28	14, 27	"			21	20	"	"	1, 6, 17, 19	4	
1086	21	10	15	8	"	29	31	13	"	15, 17	14, 25, 30	2	
1087	13	25	5	5	29	"	24	"	"	4, 27	"	"	
1088	"	"	27	"	"	28	16, 20	"	7	"	21	17	
1089	"		22	"	10, 14	"	"	"	13	8, 21	"	5	Une obs tion en jui
1090	16	"	17	"	20	9	26, 27	6, 18, 22, 29	4, 7	15, 19, 25, 28	22, 25	"	juillet.
1091	1, 18	"	4, 19	"	"	16, 18	17, 24	"	"	"	12, 20, 25	"	
1092	"	"	15, 31	5, 9	7, 19, 20	6	25, 30		24	27	"	"	

ANNÉES J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
1093	"	4	"	11	"	21	10	"	10, 18	9, 13, 15, 17, 21, 23, 26	"	"	
1094	28	1, 12, 22	17	"	7	"	18, 22	9, 10	"	11, 13, 30	3, 8, 10, 11, 15, 26	3, 12	
1095	3, 12, 13	"	"	18, 27	25	13, 24	1, 22	20, 24, 29	"	3, 5, 18, 31	1, 3, 5, 11, 23, 24, 27, 30	27, 31	
1096	4	"	12	25	30	5, 26	"	16, 18, 20, 26	17, 27	9, 13, 14, 15, 16, 21	8, 13, 24, 25, 29	13, 18	
1097	"	3, 17	7	19	22	"	3, 9, 13, 24	4, 6, 14, 16	3	6, 9, 12, 15, 24	23, 27	"	
1098	9, 18, 30	1	13	3, 29	10, 13, 31	4, 22, 27	17, 25, 26, 31	7, 8, 10, 16	14	15, 18	18	22	
1099	"	10	17, 23, 24	"	"	17	16, 17	"	12	16, 22	17, 19, 28	22	
1100	5	"	"	"	"	"	6	"	"	"	"	"	
1101	"	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1102	"	"	"	14	31	"	"	5	20	"	12	"	
1103	"	7	8	"	"	"	16	"	"	17	"	29	
1104	1	"	"	"	1	28	"	30	"	"	"	"	
1105	12	1	21	18	"	"	9	"	"	"	"	"	
1106	"	7	"	"	"	"	12, 27	"	"	13	"	31	
1107	"	"	6	"	9	"	12	26	"	"	"	"	
1108	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1109	31	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1111	"	"	"	"	"	2, 27	"	"	"	"	"	"	
1112	"	"	"	"	"	"	"	"	23	"	"	"	
1113	"	"	"	"	2	"	"	"	"	"	"	"	
1114	"	"	"	"	"	"	"	"	"	28	"	"	
1117	"	"	5	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1118	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	16	"	
1119	"	"	"	"	2	"	"	"	"	"	19	"	
1120	"	"	"	"	"	"	18	"	"	"	"	"	
1121	5	"	"	"	"	"	"	"	4	"	"	"	
1122	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	11	
1123	"	"	21	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1124	"	"	"	"	"	"	"	"	2	"	"	"	
1125	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	17	
1126	"	"	15	20	"	22	10, 17	"	"	"	"	"	
1127	"	17	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1130	"	"	"	"	"	"	21	"	"	"	4	"	
1131	"	"	"	"	6	"	26	31	"	"	"	8, 15	
1132	"	"	21	11, 13, 14	31	"	"	"	"	"	"	"	
1135	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	23	"	
1136	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	29	"	
1137	"	"	"	"	"	"	"	30	"	"	"	"	
1138	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26	
1139	"	"	"	"	"	2	"	"	"	"	"	"	
1147	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2	"	"	
1156	"	"	"	"	"	24	"	"	"	"	"	"	
1158	"	"	"	"	"	"	7	"	"	"	"	"	
1159	"		"	"	"	"	"	"	"	10	"	"	
1161	"	"	"	"	"	"	8, 10, 17	"	"	3	"	"	

ANNÉES DE J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
1163	"	"	"	"	'	"	20	14, 18, 25, 28	1, 9, 13, 14, 17, 22, 29	21	30	17	
1164		29	"	"		"	14	1, 17	"	21	16, 17, 21	7, 15	
1165	15	"	"	19, 27	"	"	8	5, 23, 31	"	8	12	"	
1166	'		29	"	"	"	3	25		"	"	13	
1167		"	"	"	"	"	"	"	"	'	13	"	
1169			"	'	"	"	"	4	25	"	"		
1170	"		"	"	"	"	"	"	'	15	13	"	
1171		'		'	'	'	"	28	"	23		"	
1176		"	7	'		2	'	"	"		"	"	
1178	'	"	"		"	"	"	"	27	'	"	"	
1179		"	"		"	'	"		9	"	"	'	
1180	'	'	"	"	"	18	"	"	19	'	"	"	
1184		'		"	18	"	'	"	"			"	
1188	"	"	4	"	"	"	"	"	"	"	"		
1196	'	'	"	'	"	"	"	"	"	12	'	"	
1198	'			"	"	"	"	2, 10	"	24	"	"	
1199	"		'	"	"	"	11	"	"	14	'	'	
1202		"		30	"	'	"	"	"	31	"	"	
1204		'	'	"	"	"	"	"	"	"	"	4	
1205		'	4	"	"	"	25		"	"	"	'	
1206			'		"	"	10	"	"	"	"	'	
1208		'	"	"	"	'	17	"		"	"	'	
1209		"	"	"	"	"	23, 31	"	'	"	"	"	
1210			"	"	"	"	"			'	18	"	
1212			'	'	'	"	30	"	"	"	"	"	
1213			"	"	"	13	"	'	21	5	15	9	
1214	18			28	'	"	6		"		"	'	
1215	"	'	'	"	"	"	'	22, 25	12	"	"		
1216	2	"	"	"		"	9		"	"	'	'	
1217		'	"	"	"	1		"	'	"		"	
1218		'	'	"	"	"	9	'	'	'			
1219	"		'	"	"	'	"	20		'	21	"	
1220				"	'		'	"			"	27	
1221	1	"	22	'	"	"	"	25			19	"	
1223		"	'	"	"		"	"	'	"		17	
1226	"	'		"	21		"	'		'	"	'	
1228	'				"		10				"	"	
1229		6		"	'		"	'	'	16		"	
1230		'			"	'	"	"	'		"	25	L'observati
1231			'			"	"	25	'	18		'	de décembre a é
1232		"	"		"	'		22		17			portée dans
1234	'					"	16	"			"	"	texte en octobr
1235	'	'		"	13	"	22, 24	"	"		13	"	
1236	"	"			"	29	12	'	"	"	"	"	
1237	"	26	5	"	"		'		25		9	"	
1238	"	"	"	"	"	3	13	29	6	"	1	"	
1239	"	"	'	9	"	"	"		3		"	"	
1240	"	10	1	12	"	"	15	"	'		"	"	
1241	'	"		"	"	"	26	1		'	'	'	

ANNÉES J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
1243	"	"	"	"	"	"	17	27	"	"	"	"	
1244	"	"	"	"	14	"	"	1	"	"	"	"	
1246	"	"	"	"	"	"	"	29	"	19	"	"	
1247	"	"	"	"	"	"	"	"	"	6	"	"	
1248	"	"	"	"	"	20	"	"	"	"	29	"	
1249	"	"	"	"	"	"	"	2	"	"	"	10	
1250	"	"	"	"	4	"	"	"	"	"	"	"	
1251	"	"	"	"	"	"	"	7, 19	"	"	"	"	
1252	"	"	"	"	16	"	"	"	6	"	"	"	
1253	"	"	"	"	8	"	"	"	"	"	"	"	
254	"	"	"	"	"	"	"	24	"	"	"	"	
1255	"	"	"	"	"	"	"	30	"	"	14	"	
1257	"	"	"	"	"	"	"	25	"	"	"	"	
1258	"	"	"	"	"	"	"	"	"	20	"	"	
1259	"	"	"	"	"	"	18	"	"	"	"	"	
1260	"	"	"	"	"	"	"	18	"	"	25	"	
1262	"	"	"	"	8	"	12	"	"	7, 17, 31	"	"	
1263	"	"	"	"	"	26	25	"	11	"	"	"	
1264	"	"	16	"	"	16	31	"	"	"	"	"	
266	"	"	"	"	"	"	16	"	"	"	"	"	
267	"	"	"	"	"	"	27	"	"	"	"	"	
268	"	"	"	"	"	"	"	18	"	"	"	"	
269	"	"	"	"	"	16	16	17	"	"	"	"	
275	"	"	"	"	19	"	"	"	"	"	"	"	

RÉCAPITULATION

PAR MOIS DU NOMBRE DES JOURS SIGNALÉS PAR DES APPARITIONS, ENTRE LES ANNÉES 960-1275, QUI COMPRENNENT L'ÉPOQUE OÙ L'OBSERVATION DES MÉTÉORES S'EST FAITE LE PLUS RÉGULIÈREMENT EN CHINE [1].

Janvier	62
Février	54
Mars	74
Avril	66
Mai	95
Juin	87
Juillet	187
Août	157
Septembre	122
Octobre	215
Novembre	152
Décembre	87

[1] Cette récapitulation est faite en appliquant la correction grégorienne aux observations.

TROISIÈME PARTIE.

DYNASTIES YOUEN ET MING, DE 1278 À 1644.

ANNÉES DE J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATION
1276	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
1278	"	"	"	"	"	"	"	"	8e lune.	"	"	"	
1299	"	"	"	"	"	"	"	"	"	9	"	"	
1301	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	
1308	"	"	"	"	"	"	"	"	19	"	"	"	
1327	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	24	"	
1328	"	"	"	"	"	26		"	"	"	"	"	
1334	"		"	"	"	"	"	23	"	"	"	"	
1337	"			"	"	"	"	"	"	30	"	"	
1350	"	"	"	"	"	"	"	2	"	"	"	"	
1356	"	"	"		"	"	"	"	"	"	"	3	
1357	"	"	"	"	"	"	"	"	"	15	"	"	
1358	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	11e lune.	
1359	"	17	"	"	"	"	"	"	"	"	12	"	
1360	"	"	"	"	"	"	2	"	"	"	"	"	
1362	"	"			"	"	"	"	"	15	"	"	
1365	"	"	"	"	"	"	24	"	"	"	"	"	
1366	"	"	"	"	"	"	29	"	"	"	"	13	
1368	"	"	"	"	"	"	"	15	"	"	"	"	
1370	"		"	"	"	"	"	"	"	"	13	"	
1388	"	"	"	"	"	"	"	"	1	"	"	"	
1404	6	"	"	"	"	13	"	"	"	"	"	"	
1418	"	"		"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
1424	"	"	"	"	"	21	"	"	"	"	"	"	
1427	12	"	"		"	"	"	"	"	"	"	"	
1436	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2	"	"	
1439	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5	"	"	
1449	"	"	"	"	"	"	"	"	"	22	"	16	
1451	"	"	"	"	"	"	27	"	10	"	"	"	
1459	"	"	"	"	3	"	"	"	"	"	"	"	
1464	"	"	"	5	"	"	"	"	"	"	"	"	
1476	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	11	
1484	"	"	"	"	"	3	"	"	"	"	"	"	
1485	17	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1488	"	"	"	"	"	"	"	"	22	"	"	"	
1491	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	15	2	
1494	"	"	"	"	"	5e lune.	"	"	"	"	"	"	
1495	"	"	"	"	12	"	"	"	"	"	"	"	
1496	"	"	"	23	"	"	"	"	"	"	"	"	
1497	"	11	"	"	"	"	"	"	"	2	"	"	
1498	"	17	"	"	"	"	"	"	"	21	"	"	
1501	"	"	"	"	"	"	"	18	"	"	"	"	
1503	"	"	9	"	"	"	"	"	"	4	"	"	
1507	8	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1510	"	"	"	9	"	"	"	"	"	"	"	"	

ANNÉES J. C.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBR.	OCTOBRE.	NOVEMBR.	DÉCEMBR.	OBSERVATIONS.
1511	"	"	"	"	"	"	"	"	17	"	"	"	
1520	"	6	"	"	15	"	"	"	"	"	"	"	
1533	"	"	"	"	"	"	"	"	"	24	"	"	
1535	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	
1540	"	"	"	"	"	14	"	"	"	"	"	"	
1575	"	"	"	"	"	"	3	"	"	"	"	"	
1576	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	25	"	
1585	"	"	"	"	"	"	28	"	"	"	"	"	
1587	"	"	"	5	"	"	3, 4	"	"	"	"	"	
1589	"	16	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1592	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	Sans la lune.
1594	"	28	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1599	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1602	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5, 27	7	"	
1605	"	"	"	"	"	"		"	"	18	"	11e lune.	
1607	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	12	
1610	"	"	11	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1613	21	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
1615	"	"	"	"	19	"	"	"	"	"	"	"	
1618	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	12	"	
1623	"	"	"	"	"	"	"	"	"	10	"	"	
1642	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	En été, pluie d'étoiles.
1644	"	"	"	17	"	"	"	"	"	"	"	"	

TABLE PARTICULIÈRE

DES APPARITIONS DANS LESQUELLES LES TEXTES CITENT UN NOMBRE CONSIDÉRABLE D'ÉTOILES FILANTES.

AVANT J. C.

687. 23 mars.
15. 27 mars.

APRÈS J. C.

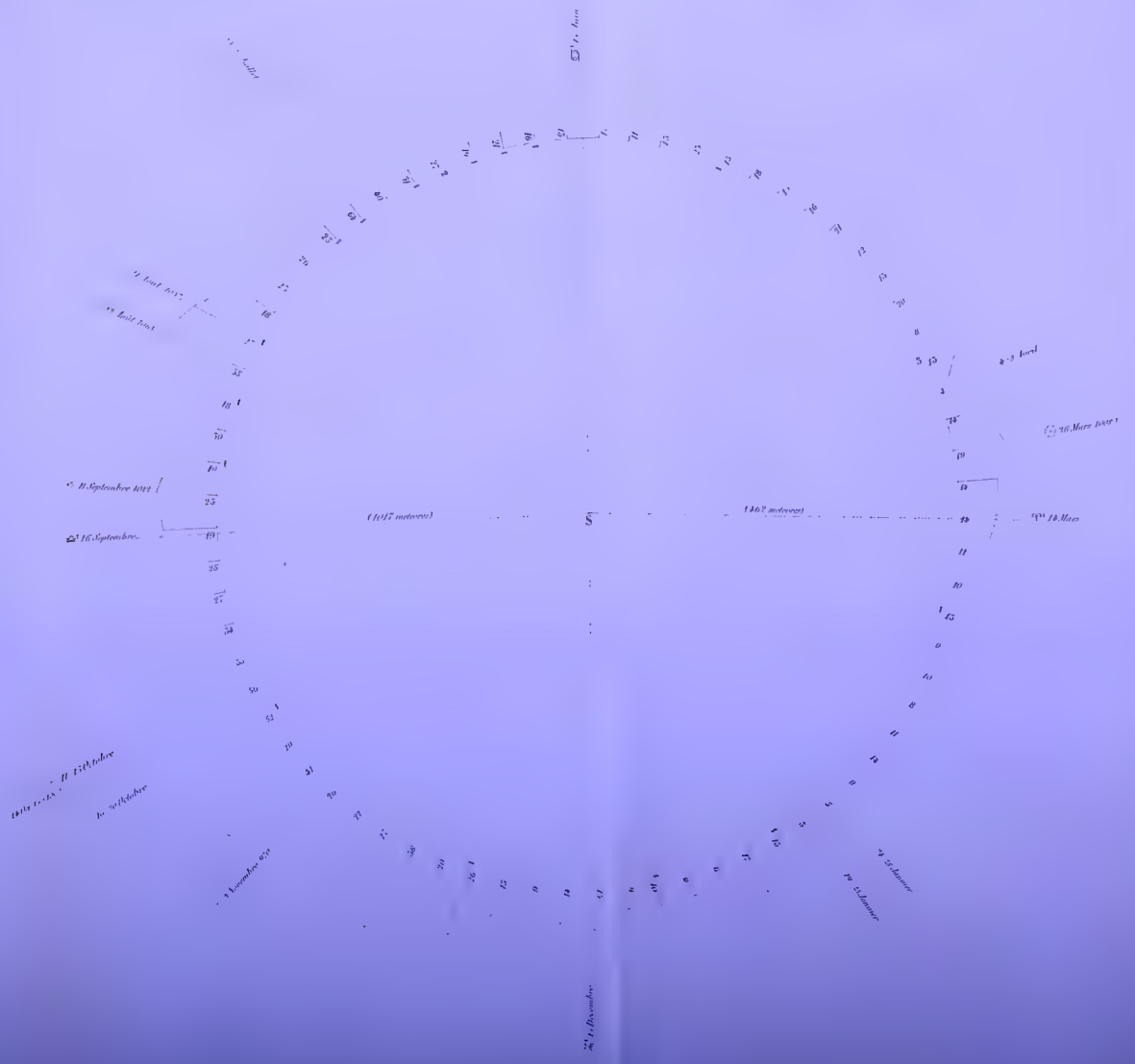
36. 9 février.
* 27 juin.
268. Vers août (7e lune, sans date de jour).
288. 26 septembre.
308. 20 janvier.
401. 8 avril.
532. 28 août.
585. 23 septembre.
599. 26 décembre.
714. 15 juillet.
764. 30 décembre.
784. 10 juillet.
811. Vers février (1re lune, sans date de jour).
824. Vers mai (4e lune, sans date de jour).
830. 22 juillet.
833. 23 juillet.
835. 22 juillet.
837. 8 novembre. (Le phénomène peut être une aurore boréale).
839. 13 avril.
841. 21 juillet.
865. 1er août?
881. Du 10 au 18 septembre.
883. Vers décembre (11e lune, sans date de jour).
905. 12 avril. (Le phénomène semble être une aurore boréale.)
924. 21, 23 juillet.
925. 22, 23 juillet.
926. 22 juillet
927. 12 avril.
930. 24 novembre.
931. 15 octobre.
933. 20, 25 juillet.
934. 13 avril et 14 octobre.
970. 3 novembre.
1002. 14 octobre.
1008. 26 mars.
1012. 11 septembre.
1037. 21 août.
1063. 22 août.
1436. 2 octobre.
1439. 5 octobre.
1451. 27 juillet et 10 septembre.
1533. 24 octobre.
1576. 25 septembre.
1602. 27 octobre et 7 novembre.
1623. 10 octobre.
1642. En été, pluie d'étoiles.

IRCULAIRE

ES DE CINQ JOURS ENTRE LES ANNÉES 960 [illegible]

TABLEAU CIRCULAIRE

DES NOMBRES DE MÉTÉORES OBSERVÉS, PAR GROUPES DE CINQ JOURS, ENTRE LES ANNÉES 960 – 1275.



On a mis des ♈ aux signes des équinoxes et des solstices pour indiquer qu'ils se rapportent ici aux positions de la terre.
Le signe ✳ désigne une apparition en masse ou averse d'étoiles.
Les nombres placés à l'intérieur de la circonférence indiquent les météores vus de jour.

MÉMOIRE

SUR

LA POSITION GÉOLOGIQUE DES TERRAINS

DE LA PARTIE AUSTRALE DU BRÉSIL,

ET

SUR LES SOULÈVEMENTS

QUI, À DIVERSES ÉPOQUES, ONT CHANGÉ LE RELIEF DE CETTE CONTRÉE;

PAR M. A. PISSIS.

(PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 27 JUIN 1842.)

Depuis le mémorable voyage de M. de Humboldt dans l'Amérique australe, les géologues qui ont exploré cette contrée se sont presque tous dirigés vers un même côté, comme si une sorte de prestige les avait toujours entraînés vers la partie occidentale de ce continent. L'aspect imposant de la grande Cordilière, les nombreuses révolutions qui s'y sont opérées, et enfin la grandeur des phénomènes volcaniques, derniers efforts des puissances intérieures, avaient trop d'attrait pour ne pas faire oublier le reste de l'Amérique. Toutefois, si les autres parties de ce continent se présentent sous une apparence plus calme, si elles sont dépouillées de ce grandiose qui séduit l'imagination, elles n'offrent cependant pas moins d'intérêt aux recherches du géologue, et peuvent

lui donner la clef de toutes les révolutions qui se sont opérées, mieux que les contrées traversées par la grande Cordilière, où des perturbations récentes ont en quelque sorte effacé ou tout au moins considérablement modifié les traces des événements antérieurs. Le Brésil, entre autres, présente par l'ancienneté des terrains dont il se compose, par la régularité et la simplicité de son relief, une des contrées dont l'étude peut jeter le plus de jour sur la géologie de l'Amérique. C'est là que l'on peut étudier, dans leur état normal, les premiers mouvements qui ont été imprimés au sol dès le commencement des terrains intermédiaires, puis ceux qui ont succédé à ces mêmes terrains, dont ils ont relevé les couches: seule révolution qui se révèle entre cette époque et la fin de la période tertiaire, à peine troublée par quelques petits soulèvements qui ne paraissent pas avoir sensiblement modifié le relief général; et puis, n'y a-t-il pas encore un grand intérêt dans l'étude comparative de ces terrains et de ceux de l'Europe, de ces couches déposées pendant une même période à des distances de deux à trois mille lieues? Cette étude comparative n'est-elle pas aujourd'hui le but de toutes les recherches géologiques; ne satisfait-elle pas à cette tendance générale de réunir des matériaux, des observations de tous les points du globe, pour pouvoir ensuite les comparer, et séparer, par chaque formation, les caractères constants de ces circonstances accidentelles qui peuvent tenir à telle ou telle localité, pour prendre, si je puis m'exprimer ainsi, une sorte de moyenne indépendante de toute oscillation irrégulière? Mais de telles recherches n'ont une utilité réelle qu'autant que les résultats que l'on en a déduits ont été soumis à la critique, qu'ils ont subi cette sorte de contrôle qui fait qu'on peut les admettre en toute confiance et les faire entrer comme autant de données propres à avancer la solution des divers problèmes de géologie, sans craindre d'être entraîné dans les erreurs auxquelles pourraient conduire des observations inexactes ou incomplètes. Tels sont les motifs qui m'ont engagé à soumettre au jugement de l'Académie le résumé des observations que j'ai pu faire pendant

les cinq années que j'ai employées à parcourir la partie australe du Brésil. J'ai pensé, que pour les exposer avec toute la clarté convenable, il était nécessaire de réunir dans deux parties séparées celles de ces observations qui se rapportent à la composition des terrains et à leur position relative, et celles qui ont pour objet les grands traits qui caractérisent le relief de cette contrée, l'étude des chaînes de montagnes, la direction des couches, leur inclinaison, enfin les relations des couches cristallines avec les terrains stratifiés.

Quelques coupes, où le relief du sol se trouve représenté aussi exactement que possible, en conservant aux distances verticales et horizontales leurs rapports naturels, m'ont paru nécessaires pour compléter cette description, et j'ai cru devoir aussi y joindre une carte représentant la partie australe du Brésil pendant le dépôt du terrain silurien.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Fig. 1. Vue et coupe du groupe du Corcovado, près Rio-de-Janeiro, suivant une ligne dirigée du S. au N. depuis la plage de Copa-Cabana jusqu'à l'habitation de la Perreira, sur le versant septentrional du Corcovado.

Fig. 2. Coupe d'une chaîne qui se montre à huit lieues au S. de Barbacéna, sur la route d'Ouro-Preto, et qui sépare les eaux du Parana de celles du San-Francisco et du Rio-Doce.

Fig. 3. Coupe du terrain des talcites phylladiformes, s'étendant depuis la base méridionale de l'Itacolumi jusqu'à la vallée du Rio-Gualaxo. Cette coupe, dont la longueur ne dépasse pas quatre lieues, présente toutes les formations de l'étage des talcites immédiatement superposées, et donne ainsi une idée complète de ce terrain.

Fig. 4. Coupe de la cascade de João Dias de Toledo, près Jatui. On y voit toutes les couches qui composent la partie supérieure du terrain de transition et les diorites qui se sont épanchés à la surface.

Fig. 5. Escarpement de Porto-Felix sur les bords du Tiété. Il montre à découvert la majeure partie des grès et psammites.

Fig. 6. Pointe ou fort de Mont-Sarrate, à une lieue au N. de Bahia, sur le bord de la baie, où elle forme une langue allongée entre l'anse d'Itabajipe et la plage de Bom-Fim. Les couches du terrain tertiaire y sont relevées et plongent en sens inverse de celles de l'île d'Itaparica.

Fig. 7. Coupe du plateau sur lequel se trouve la ville de San-Paulo. Ce plateau présente dans tout son développement le terrain lacustre du Tiété.

Fig. 8. Carte de la partie australe du Brésil pendant le dépôt du terrain silurien. Cette carte a été construite en prenant pour la limite des mers de cette époque la côte actuelle, d'une part, et, de l'autre, la ligne formée par le contact du terrain de transition avec les roches cristallisées. Les montagnes qui y sont figurées se rapportent à l'émission des granits à grain fin ou aux premiers soulèvements dont on trouve des traces.

La contrée que j'ai explorée se trouve comprise entre le 12^{me} et le 26^{me} degré de latitude australe, et les 40^{me} et 32^{me} degrés de longitude occidentale; sa plus grande longueur est d'environ 460 lieues et sa largeur varie de 120 à 150. Elle forme une longue bande limitée à l'E. par la mer, et à l'O. par le San-Francisco et le Parana, qui, prenant leur source dans les mêmes montagnes, se dirigent l'un au N. l'autre au S. Vers l'extrémité septentrionale, on rencontre de vastes plateaux qui s'élèvent de plus en plus à mesure que l'on avance vers le S. Entre le 14^{me} et le 15^{me} parallèle, cette terrasse se trouve dominée par plusieurs chaînes de montagnes dont l'ensemble court sensiblement du N. E. au S. O. jusque sous le 20^{me}, où les points culminants atteignent une altitude de 1,800 à 1,900 mètres. Les montagnes se dirigent alors vers l'O. où elles forment la Serra-dos-Vertentes, qui sépare les eaux du San-Francisco de celles du Parana. La terrasse qui supporte ces montagnes atteint dans les mêmes lieux un niveau d'environ 1,000 mètres; elle s'élève en avançant vers le S. et se termine

par une longue chaîne qui vient rencontrer la côte près du 24me parallèle. A l'E. de cette chaîne, généralement connue sous le nom de Serra da Mantiqueira, s'étend une vaste région couverte de forêts et sillonnée par de profondes vallées, dont la direction la plus générale est du N. E. au S. O. Le sol, dans cette partie, est toujours à un niveau inférieur à celui de la Mantiqueira, et varie entre 600 et 800 mètres sur les points culminants; il s'élève en approchant de la côte et se termine par plusieurs groupes de montagnes sensiblement placés sous le prolongement l'un de l'autre, dont l'ensemble forme la Cordilière maritime (Serra-do-Mar), élevée de 1,100 à 1,200 mètres. L'intervalle compris entre le Parana et la Serra-da-Mantiqueira forme un vaste plateau sillonné par de nombreux cours d'eau et présentant une double pente en allant de l'E. à l'O. et du N. au S. Il s'élève de nouveau entre le 24me et le 25me parallèle pour former la chaîne qui sépare les eaux du Tiété de celles du Paranapanéma, et finit par se réunir aux vastes plaines des Pampas.

Des roches primordiales, appartenant à l'étage du gneiss ou à celui des talcites phylladiformes, occupent la majeure partie de cette contrée; elles sont recouvertes vers l'O. par une puissante formation de grès, de phyllades et de calcaires de transition, et sur quelques points de la côte par des couches tertiaires. Enfin, des terrains de transport, souvent d'une grande épaisseur, se montrent principalement sur les Taboleiros, qui occupent la partie septentrionale.

ÉTAGE DU GNEISS.

Le gneiss commence à se montrer au N. de Bahia, où il forme la base de quelques plateaux recouverts par le diluvium et celui qui supporte une partie de la ville. Il disparaît quelque temps recouvert par les formations tertiaires qui occupent le pourtour de la baie, se montre au S. pour former la butte de San-Paulo, et disparaît de nouveau sous le terrain tertiaire, qui s'étend jusqu'à l'embouchure du Rio-de-Contas. A partir de ce point, il forme

une bande non interrompue qui s'étend sur toute la côte et pénètre fort avant dans l'intérieur des terres, en suivant d'abord les grandes vallées, puis la base de la Serra-dos-Vertentes; il atteint dans cette partie sa plus grande largeur, qui est d'une centaine de lieues, puis se rétrécit en allant vers le S. O. et forme une espèce de triangle dont le sommet serait placé près de Paranagua.

Le gneiss leptinoïde à grain fin et très-compacte domine vers la partie septentrionale, notamment dans les environs de Bahia, où il renferme quelques couches subordonnées de diorite à grain très-fin. C'est encore la même variété qui se montre près de l'embouchure du Rio-de-Contas; toutefois, l'altération très-grande de cette roche, presque partout transformée en argile, les épaisses forêts qui la recouvrent et la puissance souvent très-considérable de la couche de terre végétale, rendent les observations fort difficiles dans tout l'intervalle qui s'étend entre ce fleuve et la Parahyba.

MONTAGNES DE GOÏTACAZAS.

Après avoir passé l'embouchure de la Parahyba, le terrain qui forme la côte s'élève de plus en plus, et présente plusieurs séries de collines qui vont se rattacher à la chaîne des montagnes de Goïtacazas, séparées de la mer par un intervalle de quelques lieues seulement. Le gneiss constitue à lui seul presque tout ce premier groupe, le plus oriental de la Serra do Mar; cette couche est partout fortement altérée et transformée en une argile rougeâtre sur une épaisseur qui atteint souvent plus de 100 mètres. Dans les parties où elle est moins altérée, elle offre une couleur gris jaunâtre; le mica y est très-abondant, ce qui lui donne peu de dureté et une structure schistoïde très-prononcée. Elle forme des montagnes dont le sommet se trouve généralement arrondi et recouvert, ainsi que les flancs, de majestueuses forêts. Ses couches, dont on ne peut guère observer la position que dans le lit des torrents où les eaux ont mis à décou-

vert la roche vive, offrent une direction générale du N. E. au S. O. et plongent vers le S. E. en faisant avec l'horizon un angle qui souvent se rapproche de 90°. Le versant opposé à la mer présente des pentes beaucoup plus escarpées et souvent assez rapides pour que les forêts n'aient pu s'y établir. On y observe encore le gneiss, qui occupe toute la ligne de faîte; mais, à mesure que l'on approche de la base, cette roche se trouve remplacée par des couches d'une pegmatite à grain très-fin et d'une structure schistoïde. Cette roche, qui apparaît quelques lieues à l'E. de Morro-Queimado, se développe de plus en plus, à mesure que l'on avance vers le S. O. et finit par former seule de ce côté l'extrémité de la chaîne. Elle éprouve dans ce trajet des modifications fort remarquables : le quartz diminue peu à peu, on commence à y rencontrer quelques grenats disséminés, et elle se transforme définitivement en un leptinite grenatifère.

SERRA-DOS-ORGAOS.

Au N. de la chaîne de Goïtacazas se montre un autre groupe de montagnes courant dans la même direction, et compris entre le Rio-Grande et le Rio-Negro, deux affluents de la Parahyba. La ligne de faîte s'élève successivement, à partir des bords de ce fleuve, jusqu'à la partie appelée Serra-dos-Orgãos, qui se termine brusquement au N. de la baie de Rio-de-Janeiro. L'espace compris entre la Parahyba et Cantagallo offre beaucoup de ressemblance avec la chaîne précédente; mais, dès que l'on approche de Morro-Queimado, on remarque un grand nombre de pics aux pentes rapides, sur lesquelles les grands arbres, n'ayant pu trouver un appui suffisant, ont cédé la place à de rares arbustes croissant dans les fentes des rochers. Les sommets de ces pics atteignent des hauteurs d'autant plus grandes qu'ils s'avancent davantage vers le S. O. où ils atteignent une altitude de 1,100 mètres. Un gneiss, semblable à celui des montagnes de Goïtacazas se montre dans les environs de Cantagallo, où il ne tarde pas à

faire place au leptinite, qui se trouve lui-même remplacé par une autre roche : celle-ci est un gneiss à très-gros grain, enveloppant de gros cristaux de feldspath rose, qui lui donnent une structure porphyroïde, et dont le mica, généralement noir ou d'un brun foncé, se trouve disposé par zones ondulées qui suivent tous les contours de ces cristaux de feldspath. Il constitue à lui seul tous les pics qui occupent la partie moyenne de ce groupe et disparaît sous les leptinites des montagnes des Orgãos. Cette dernière partie est la plus accidentée : le leptinite s'y trouve fortement redressé et présente des lames colossales qui, vues de Rio-de-Janeiro dans le sens de leur épaisseur, apparaissent comme de hautes et minces aiguilles placées les unes à côté des autres et ressemblant assez à des tuyaux d'orgues, ce qui a fait donner à ces montagnes le nom qu'elles portent. A l'O. de ces aiguilles, se montre un massif dont l'altitude dépasse 1,100 mètres; il est coupé presque à pic du côté de la baie, et du sommet à la base se précipitent plusieurs petites rivières que l'on aperçoit de Rio-de-Janeiro, bien qu'il y ait entre ces deux points une distance de plus de 10 lieues. La direction générale des couches est encore du N. E. au S. O. mais le sens de leur inclinaison est tellement variable, qu'il est impossible de lui assigner un côté plutôt qu'un autre. Sur quelques points, la direction devient E. O. et les couches plongent alors vers le N.

La vallée du Rio-Grande, qui sépare les deux chaînes précédentes, se bifurque vers le milieu de sa longueur et laisse dans l'intervalle un petit groupe secondaire qui vient se terminer, dans les environs de Morro-Queimado, par plusieurs pics isolés dont l'ensemble forme comme une espèce de cirque entourant la petite plaine où coule le Rio-das-Bengalas. Ces montagnes sont entièrement formées d'un gneiss porphyroïde semblable à celui du groupe précédent. C'est surtout sur les pics que cette roche se montre à découvert, formant d'immenses cônes dont les flancs, inclinés de 50° à 60°, ne supportent aucune végétation. A la base de ces pics, près du petit village des Allemands, on rencontre des dioritines

qui se délitent en couches concentriques, à la manière de certains basaltes des anciens volcans du centre de la France. Elles forment autour de la vallée du Rio-das-Bengalas une espèce de fer à cheval qui semble suivre le contour de la chaîne de Goïtacazas, et former la ligne de séparation entre les leptinites et les gneiss porphyroïdes. Les diorites stratiformes se montrent vers l'extrémité occidentale de cette même vallée, sur les bords et près des sources du Rio-Grande; ils forment une couche de 6 à 8 mètres d'épaisseur subordonnée aux leptinites, et contiennent beaucoup de fer oxydulé disséminé en petits grains, ainsi que des pyrites.

SERRA DA ESTRELLA.

La route qui conduit de Rio-de-Janeiro dans la province de Minas-Geraës passe à la base des montagnes des Orgãos et laisse au S. O. un autre groupe qui va se terminer vers les marais de San-João d'Itaguahi : ces montagnes portent le nom de Serra-da-Estrella et se trouvent comprises entre le Rio-Negro et le Parahyba. Elles présentent dans leur ensemble à peu près la même disposition que la chaîne des Orgãos, mais dans un sens précisément inverse; le revers qui fait face au S. était le plus escarpé. Le gneis porphyroïde domine dans toute la partie orientale; sur quelques points, le mica cesse de former des zones continues entre les cristaux de feldspath; les feuillets sont alors distribués dans des plans différents, et la roche passe à un véritable granit, qui se change lui-même, près de la nouvelle route de Minas-Geraës, en une belle variété de syénite rose ressemblant beaucoup à celle de la haute Égypte. Du côté de la Parahyba, l'inclinaison du terrain est beaucoup moins forte; il s'abaisse insensiblement jusqu'au bord de ce fleuve, où il atteint un niveau de 187 mètres. Le gneiss porphyroïde, ainsi que les syénites, ne tardent pas à disparaître sous les couches de leptinite. Cette roche présente une structure schistoïde : sa couleur la plus générale est le blanc grisâtre; on y trouve beaucoup de grenats disséminés et quelque peu

de mica noir. Elle se montre sur les bords de la Parahyba et suit, en remontant, le cours de ce fleuve jusqu'à Rézende, où elle disparaît à son tour sous des gneiss. Des diorites sans délit, semblables à ceux de Morro-Queimado, se montrent sur quelques points; ils présentent la même altération que ces derniers et la même disposition à se déliter en couches concentriques.

MONTAGNES DE RIO-DE-JANEIRO. (Fig. 1.)

A une petite distance de la côte et en avant de la Cordilière maritime (Serra-da-Estrella), on rencontre un petit groupe de montagnes entièrement isolé: il se compose de deux massifs qui abritent la ville de Rio-de-Janeiro au S. et à l'O. Le premier de ces massifs, qui est le moins élevé, porte le nom de Corcovado et se trouve séparé du second, celui de la Tijuca, par un col qui ne dépasse pas 200 mètres. Ce petit groupe, quoique peu important par son étendue, est l'un des plus intéressants à étudier, en ce que les roches de la formation gneissique s'y trouvent à découvert, ce qui permet de déterminer d'une manière précise leur position relative. Le massif du Corcovado se trouve séparé de la côte par une petite chaîne de collines assez escarpées commençant à l'E. par une masse conique, élevée d'environ 300 mètres, à laquelle on a donné le nom de Pain-de-Sucre (Pão-d'Assucar), et se terminant sur les bords du lac de Rodrigues de Freitas. La vallée qui occupe l'intervalle se dirige de l'E. à l'O. et se trouve en grande partie comblée par des sables et des blocs détachés des montagnes voisines. Le sol, un peu plus élevé vers le milieu de sa longueur, présente, dans cette partie, quelques mamelons d'une argile rougeâtre provenant de la décomposition du gneiss. La roche qui forme le Pain-de-Sucre et les collines qui s'y rattachent, est un gneiss porphyroïde à gros cristaux de feldspath rose, quelquefois gris. Ses couches, dirigées de l'E. à l'O. plongent vers le S. sous un angle de 60° à 70°; après avoir formé le versant méridional de cette petite chaîne, elles disparaissent

sous les sables de la côte, qui forment une petite plaine terminée par les récifs de Copa-Cabana. Ces récifs, également dirigés de l'E. à l'O. se composent d'un gneiss très-riche en mica d'un gris foncé enveloppant de gros grenats et quelques nodules de pegmatite. Les couches suivent la direction des récifs et plongent vers le S. mais sous un angle qui varie seulement de 40° à 45°.

De l'autre côté de la vallée, on rencontre d'abord, à la base du Corcovado, de grosses masses d'un granit à grain fin gris bleuâtre, qui disparaissent sous des gneiss porphyroïdes semblables à ceux du Pain-de-Sucre; ils forment d'abord une masse sans stratification apparente coupée à pic du côté de la vallée; et s'élèvent jusqu'au sommet du Corcovado, dont l'altitude est de 518 mètres. Le volume de cristaux des feldspath, la dispersion du mica dans des plans souvent perpendiculaires, laissent quelques doutes sur l'espèce de cette roche, que l'on serait tenté de rapporter au granit; mais, en la suivant au N. de la montagne, on voit le grain devenir de plus en plus fin, le mica former des zones ondulées, et bientôt elle alterne avec des gneiss granatiques identiques avec ceux qui constituent les récifs de Copa-Cabana. Les couches se montrent alors dirigées de l'E. à l'O. et leur inclinaison diminue peu à peu à mesure que l'on s'éloigne du sommet. Enfin, les gneiss granatiques font place à une puissante formation de leptinite qui constitue tout le revers septentrional et se prolonge jusqu'à Rio-de-Janeiro, où il forme la petite butte de Sainte-Thérèse et celle du Castel, placée sur son prolongement. Ce leptinite présente une structure schistoïde très-prononcée; sa couleur varie du blanc au gris jaunâtre, et l'on y trouve beaucoup de petits grenats disséminés, ainsi que du quartz, qui devient quelquefois assez abondant pour constituer une pegmatite. L'épaisseur très-considérable de cette formation ne peut pas être appréciée exactement à cause de l'inclinaison des couches; tout ce que l'on peut dire à cet égard, c'est qu'elle forme la majeure partie du massif; et comme la largeur de celui-ci est de 3,000 mètres depuis le sommet du Corcovado jusqu'au col de la Tijuca,

on aurait, en supposant l'inclinaison moyenne de 40°, une épaisseur de 1,900 mètres.

Les montagnes de la Tijuca présentent les mêmes roches que le Corcovado, et elles y sont placées dans le même ordre, quoique cette disposition soit plus difficile à saisir à cause de la grande confusion qui règne dans la position des diverses couches, qui, relevées au S. et au N. plongent dans deux sens opposés. Les gneiss porphyroïdes se montrent à la base de l'espèce de cirque qui se présente du côté de Rio-de-Janeiro; on les retrouve sur le versant opposé près de la côte, tandis que le leptinite occupe la partie centrale du massif. Vers la partie inférieure du col qui sépare cette montagne du Corcovado, on rencontre des granits à grain fin, semblables à ceux qui sont à la base du Corcovado, et quelques mamelons de diorite sans délit, fortement décomposé et se présentant à la surface du sol en masses sphériques rougeâtres composées de couches concentriques de xérasite enveloppant des noyaux de diorite à grain fin.

CORDILIÈRE MARITIME DEPUIS SAN-JOÃO D'ITAGUAHI JUSQU'À SANTOS.

La Cordilière maritime, après s'être interrompue sur un petit espace vers les plaines marécageuses de San-João d'Itaguahi, reparaît à l'O. et se continue sans interruption jusqu'au delà de Santos, où elle forme la Serra-do-Cubatão. Elle se compose de trois groupes courant au S. O. un peu O. le premier, ou le plus oriental, s'élève en avançant vers le S. O. et se termine par le pic de Parati, petit groupe isolé offrant par sa position beaucoup de ressemblance avec celui de la Tijuca; la Serra-d'Ubatuba, ou le groupe intermédiaire, en est séparé par une gorge où se trouvent les sources de la Parahyba, et va se terminer un peu au delà de San-Sebastião; enfin, la serra do Cubatão se montre derrière celle d'Ubatuba, dont elle est séparée par une petite vallée où coule la Parahybana, petite rivière qui va se réunir à la Parahyba près de San-Joze. Ces trois chaînes viennent se terminer près de la côte

par des pentes très-escarpées et, rencontrant la plage, qui dans cette partie court sensiblement à l'O. sous un angle très-aigu, forment, dans l'intervalle qui les sépare, les golfes de Parati, d'Ubatuba et de Santos. Leur élévation est sensiblement la même pour toutes les trois: elle varie entre 1,000 et 1,100 mètres et atteint son maximum près des sources de la Parahybana. Les granits à grain fin continuent à se montrer à la base : on les observe surtout dans les environs d'Angra-dos-Reis et d'Ubatuba; ils forment tantôt des mamelons, tantôt des dykes puissants au milieu des gneiss porphyroïdes qui constituent la base des groupes de Parati et d'Ubatuba. Le leptinite, qui s'était montré avec une si grande puissance dans les montagnes des Orgãos et de Goïtacazas, se trouve ici remplacé par un gneiss très-riche en mica, et dans lequel on rencontre encore quelques grenats disséminés, qui apparaissent comme les derniers vestiges du leptinite, qui, en admettant dans sa composition une plus grande quantité de mica, a fini par donner naissance à ce gneiss. La Serra-do-Cubatão offre une composition différente de celle des deux premiers groupes; le gneiss porphyroïde cesse de se montrer même dans les parties les plus basses, et les roches qui, dans les environs de Santos, se montrent au niveau de la mer se rapportent à un gneiss leptinoïde très-compacte; il forme la base de la chaîne et supporte un autre gneiss beaucoup plus riche en mica, décomposé jusqu'à une grande profondeur et transformé en une argile rouge au milieu de laquelle on aperçoit, de distance en distance, quelques couches de quartzite à très-gros grain, blanc ou rougeâtre, et des amas de pegmatite altérée que l'on reconnaît surtout à la couleur blanche des argiles qui en proviennent et aux larges lames de mica blanc qui ont résisté à cette décomposition. La direction des couches dans ces trois groupes est sensiblement parallèle à la ligne de faîte; et elles plongent vers l'intérieur des terres, présentant leur tranche sur le versant du S. E. de telle sorte, que les roches qui, de ce côté, se montrent à la base sont bien réellement celles qui occupent la partie inférieure. Le versant du

N. O. n'offre qu'une pente à peine sensible, le terrain s'abaissant d'abord de quelques centaines de mètres, puis se continuant au même niveau jusqu'à une distance de dix ou douze lieues, en ne montrant plus qu'un vaste plateau sillonné par quelques rides qui ne sont que le prolongement des parties orientales de ces divers groupes.

TERRAIN COMPRIS ENTRE LA CORDILIÈRE MARITIME ET LA SERRA-DA-MANTIQUEIRA.

L'espace qui se trouve compris entre la Cordilière maritime et la Serra-da-Mantiqueira forme un vaste triangle dont le sommet se trouve près de San-Paulo et la base sur le Rio-Doce; il présente un sol élevé d'environ 800 mètres, qui va en s'abaissant à mesure que l'on avance vers le N. E. Sa surface, à peine ridée dans la partie australe, devient de plus en plus irrégulière vers le N. les petites chaînes qui la parcourent du S. O. au N. E. se maintenant sensiblement au même niveau, tandis que les vallées, de plus en plus profondes, s'abaissent de 600 jusqu'à 100 mètres, et quelquefois moins. Les roches qui se montrent dans tout cet intervalle sont encore des gneiss et des leptinites, assez difficiles à observer à cause des épaisses forêts qui occupent tout cet espace et de leur profonde altération, qui ne permet de les voir intacts que dans le fond des vallées ou sur quelques cimes escarpées où les argiles qui résultent de leur décomposition n'ont pu se former sur une grande épaisseur. Toutefois, malgré cette altération, l'on observe quelques différences notables dans la nature des roches à mesure que l'on s'approche de la base de la Mantiqueira: les leptinites disparaissent et sont remplacés par des gneiss leptinoïdes à grain très-fin passant quelquefois au pétrosilex; ils ont beaucoup mieux résisté à la décomposition, et forment, au milieu des argiles rouges, des affleurements qui les font reconnaître de loin. Les quartzites stratiformes alternent avec ces gneiss et deviennent plus abondants près de la base de la Mantiqueira, où ils

commencent à renfermer quelques cristaux de tourmaline. Enfin, des couches de calcaire lamellaire blanc ou bleuâtre se montrent dans les environs de San-Luiz, entre la Parahybana et la Parahyba, et sur les bords de cette dernière rivière, près de Cantagallo. Les couches présentent généralement la direction N. E. S. O. quelquefois E. O. et, dans ce dernier cas, il y a presque toujours, dans le voisinage, des diorites sans délits qui forment des filons ou de petits mamelons.

SERRA-DA-MANTIQUEIRA.

La Serra da Mantiqueira se compose de plusieurs systèmes dirigés sensiblement du N. E. au S. O. qui atteignent des hauteurs d'autant plus grandes que l'on s'avance davantage vers le S. Le plus oriental commence sur les bords du Rio-Doce, et de là s'étend jusqu'auprès de l'habitation du Nacimento, où il est interrompu par le col qui donne passage à la route de Rio-de-Janeiro à Barbacina. La ligne de faîte se relève au S. O. de ce col, et forme la ligne qui rattache la Juruoca à la chaîne précédente. Le troisième système, celui qui suit immédiatement la Juruoca, porte le nom de Serra-da-Mantiqueira, et s'étend depuis le village de Sivramente jusques auprès de Jacarahi, où il est remplacé par la Serra-da-Cantareira, qui se termine par le pic de Jaragua, petit groupe isolé de toutes parts, au pied duquel coule le Tiété, qui franchit dans ce point l'arête élevée sur laquelle se trouvaient placées les diverses chaînes précédentes. Enfin, de l'autre côté du Tiété, le terrain se relève encore et forme un large massif composé de plusieurs chaînes parallèles qui, courant au S. O. viennent rencontrer la côte près de Paranagua.

La roche qui domine dans la Serra-de-San-Geraldo est un gneiss riche en mica et fortement altéré ; on y remarque de petites couches subordonnées d'un quartzite à gros grain, généralement blanc, quelquefois jaunâtre, et contenant alors des lamelles de mica assez abondantes pour donner à la masse une structure grossière-

ment schistoïde. Les forêts qui recouvrent toute cette chaîne, et la grande épaisseur des argiles rouges dues à la décomposition du gneiss, rendent, d'ailleurs, les observations fort difficiles, et c'est seulement dans le lit des ruisseaux qui s'en échappent que l'on peut voir quelques couches à découvert. Les roches sont un peu moins altérées dans la partie qui se trouve comprise entre l'habitation de Nacimento et la Serra-de-Juruoca. Vers la partie inférieure se montre ung neiss assez semblable à celui de la Serra-de-San-Geraldo; il est d'une teinte rougeâtre par suite de l'altération du mica, d'une structure schistoïde bien prononcée, et ses couches alternent avec des quartzites schistoïdes contenant également du mica. Ces roches gneissiques ne s'élèvent guère au delà de 800 mètres; elles sont remplacées, dans la partie moyenne de a chaîne, par des leptinites analogues à ceux de Rio-de-Janeiro et des bords de la Parahyba. Enfin, la ligne de faîte est occupée par des diorites stratiformes à grain fin, présentant deux variétés, l'une grisâtre ou tout à fait noire, suivant la plus ou moins grande quantité d'amphibole; l'autre, d'un vert jaunâtre, composée de feldspath blanc et d'actinote verte. Ces deux variétés alternent, et l'ensemble de leurs couches atteint une épaisseur de 60 à 80 mètres. Elles plongent vers le N. O. un peu N. mais sous un angle très-petit comparativement à ce que l'on observe dans les parties inférieures de la même chaîne, puisque cet angle ne dépasse pas 25°, tandis qu'il en atteint 80 près de la base.

La Serra-de-Juruoca ou Serra-Negra, dont quelques sommets atteignent une altitude de 1,200 à 1,300 mètres, se montre très-escarpée sur le versant S. E. Son aspect, de ce côté, rappelle les montagnes de la Serra-do-Mar; les pentes sont rapides, et de nombreuses cascades se précipitent à travers les forêts qui la recouvrent sur toute son étendue. La seule roche qui soit à découvert est un gneiss rougeâtre, fortement altéré jusqu'à une grande profondeur, et seulement intact dans le lit des torrents qui ont emporté les parties les plus friables. Ses couches, qui ne sont pas fort inclinées, plongent vers le N. O.

La Serra-da-Mantiqueira, qui s'étend entre Baependi et Jacarahi, se maintient à peu près à la même hauteur que la précédente, approchant quelquefois de 1,400 mètres. Peu escarpée au N. O. elle se trouve coupée presqu'à pic sur le versant S. E. où elle s'étend jusqu'à la Parahyba, présentant entre la ligne de faîte et le lit de ce fleuve une différence de niveau de 800 à 900 mètres. Le gneiss, qui en forme toute la masse, se montre rarement sans altération; il se présente presque toujours à l'état d'une argile rouge ou jaunâtre, traversée, de distance en distance, par quelques couches de quartzite à gros grain, contenant quelquefois des aiguilles de tourmaline noire. Ces couches, les seules qui n'aient éprouvé aucune altération, servent heureusement de repère pour reconnaître la position de la masse à laquelle elles se trouvent subordonnées. Leur inclinaison est comprise entre 50° et 60°; elles plongent vers le N. O. et se dirigent N. E. S. O. Il y a toutefois une modification dans la position des couches près de la partie méridionale; elles s'infléchissent et paraissent un moment courir E. O. plongeant vers le S.

Le dernier groupe que l'on rencontre avant d'arriver au Tiété, celui de la Cantareira, est le moins étendu, et longe cette rivière, qui prend sa source près de son extrémité orientale. Ces montagnes se distinguent des précédentes par leur relief; elles n'envoient point comme elles de ramifications perpendiculaires à l'axe et s'élèvent immédiatement au-dessus des marais de Muji-das-Crusas, se maintenant assez constamment à la même hauteur jusqu'auprès de Saint-Paul, où elles s'abaissent brusquement. On observe ici à la base un gneiss porphyroïde grisâtre, qui passe sur plusieurs points à un véritable granit. Il est recouvert par un autre gneiss fortement altéré, rouge, laissant voir çà et là quelques lames assez larges de mica blanc qui a résisté à la décomposition. Cette variété s'étend jusqu'à la partie supérieure de la chaîne, où elle est traversée par des veines de quartz blanc et des filons de pétrosilex verdâtre. Les couches sont ici, comme dans les autres parties, dirigées vers le S. O. Le versant septentrional, beaucoup

moins escarpé, présente une série d'arêtes parallèles à la ligne de faîte, qui, diminuant successivement de hauteur, finissent par se confondre avec le plateau qui s'étend jusqu'au Parana.

L'axe de la Mantiqueira se relève sur l'autre rive du Tiété, au S. O. du Jaragua, où elle forme les montagnes de Cutia. A partir de ce point, elle n'éprouve plus aucune interruption jusqu'à la côte, dont elle se rapproche de plus en plus. Les montagnes qui occupent cet intervalle se trouvent disposées sur plusieurs lignes parallèles, formant comme autant d'échelons qui vont successivement s'élevant jusqu'à une chaîne culminante qui occupe à peu près le milieu. La première chaîne, qui se montre un peu au-dessus de Cutia, est entièrement formée d'un gneiss décomposé, alternant avec quelques couches de quartzite à grain fin, dont l'épaisseur varie de 1 à 3 décimètres; elles sont dirigées de l'E. N. E. à l'O. S. O. et dans une position presque verticale. C'est encore la même roche qui se montre dans la seconde ligne, comprise entre celle-ci et Saint-Roch; seulement, on n'y rencontre point de quartzite, et la ligne de faîte se trouve formée sur presque toute sa longueur par un granit à grain très-fin, d'un gris bleuâtre, et prenant quelquefois une texture presque compacte, qui le rapproche de certains porphyres quartzifères. Les couches sont dirigées comme dans la chaîne précédente, et plongent vers le S. S. E. sous un angle de 55° à 60°. Une vallée assez large, occupée dans le fond par des marais où le Rio-Grande prend sa source, et désignée sous le nom de Vargem-Grande, sépare ce groupe d'un autre situé au delà de Saint-Roch, qui compose en quelque sorte le revers septentrional du massif formé par la réunion de ces diverses chaînes; il se distingue, même à une grande distance, des chaînes qui précèdent par ses montagnes à croupe arrondie, entièrement déboisées et couvertes seulement de quelques arbustes desséchés, ayant de loin l'aspect de nos bruyères. Des talcites rougeâtres se montrent sur toute son étendue, et forment de ce côté la limite des roches gneissiques.

Les gneiss qui constituent les deux versants de la chaîne

intermédiaire disparaissent un peu au delà de la petite ville de Una et sont remplacés par des granits porphyroïdes qui forment dans le S. les derniers prolongements de la Mantiqueira, jusqu'au point où elle vient rencontrer la côte. Ces granits, tantôt d'un gris jaunâtre, tantôt roses, mais toujours à très-gros grain, sont entièrement semblables à ceux qui se montrent à la base de la Cordilière maritime, où ils passent souvent au gneiss; ils sont traversés par de nombreux filons de pegmatite ou de granit à grain fin identique à celui qui forme l'axe central de la chaîne intermédiaire, et, sur quelques points, l'on remarque aussi des filons de diorite sans délit dirigés de l'E. à l'O. ou des mamelons formés par la même roche. Les parties du granit qui se trouvent en contact avec ces diorites sont altérées sur une assez grande épaisseur, et transformées en une argile rouge offrant de nombreuses fissures dont les surfaces sont tapissées de dendrites d'oxyde de manganèse.

TERRAIN COMPRIS ENTRE LE PARANA ET LA MANTIQUEIRA. (Fig. 2.)

C'est encore le gneiss qui domine dans toute la partie comprise entre la Mantiqueira et le Parana; il est associé à d'autres roches qui atteignent souvent une grande puissance et il se présente le plus ordinairement dans un état de décomposition tel, qu'il est souvent fort difficile de le reconnaître. Tantôt il se trouve transformé en une argile rouge, et cette circonstance a lieu toutes les fois que les couches renferment peu de quartz; dans le cas contraire, il donne lieu à une espèce de quartz carié, où le feldspath et le mica, passés à l'état argileux, remplissent les cavités d'une matière ocreuse rouge ou jaunâtre. Les quartzites, qui avaient commencé par former dans quelques parties de la Mantiqueira des couches de peu d'épaisseur, deviennent ici de plus en plus abondants et atteignent une puissance de plus de 100 mètres. N'ayant pu éprouver d'altération de la part des agents atmosphériques, ils forment partout des affleurements au milieu

des argiles gneissiques, où ils recouvrent presque toute la surface du sol, ce qui ferait croire, au premier aperçu, que cette roche est l'espèce dominante. Outre les quartzites, l'on observe encore des couches subordonnées de micacite, de talcite compacte (pierre ollaire) ou de talcite feldspathique. La présence de ces nouvelles roches, et surtout celle des quartzites, donne au sol de cette contrée un aspect entièrement différent de celui qui s'étend de l'autre côté de la Mantiqueira : l'abondance du quartz, qui forme un gravier grossier à fragments anguleux, la dureté des argiles, ne permettent plus aux grands arbres de se développer; les forêts vierges s'arrêtent où il commence, et depuis longtemps ces régions ont été distinguées de celles où le gneiss se montre presque seul, et désignées sous le nom de Campos-Géraës par opposition aux autres parties couvertes de forêts. Enfin, la présence de certaines substances minérales vient encore différencier cette partie de l'étage gneissique de celle qui a été examinée précédemment. On y trouve de nombreuses couches de quartz compacte, formées le plus souvent par une suite de renflements réunis entre eux par des parties beaucoup plus minces et se réduisant quelquefois à une seule masse lenticulaire. Ces quartz renferment souvent du sesqui-oxyde de manganèse et des pyrites aurifères, altérées à l'extérieur et passées à l'état de sous-sulfate de peroxyde de fer. La tourmaline noire se trouve associée aux quartzites, souvent uniformément disséminée et formant alors une roche particulière, d'autres fois en masses considérables composées de gros cristaux entrelacés. Sur quelques points, tels que Queluz et Barbacéna, les oxydes de manganèse atteignent une grande puissance et forment des couches subordonnées au gneiss, ou des montagnes entières.

Le sol de cette contrée se compose de nombreuses collines aux formes arrondies, assez semblables à celles qui s'étendent depuis le bassin de la Limagne jusqu'aux Margerides, et déchirées par de profonds ravins, où l'on exploite des sables aurifères. Du milieu de cette surface, qui apparaît de loin comme une mer houleuse, s'élèvent quelques petites chaînes couvertes de forêts

courant au S. O. ou à l'O. S. O. Ces chaînes forment les dernières traces des couches inférieures de l'étage gneissique et présentent des leptinites semblables à ceux de la Cordilière maritime, sur lesquels reposent des diorites stratiformes qui disparaissent à leur tour sous la formation des gneiss et des quartzites. Ces dernières roches occupent, à l'exception des chaînes précédentes, tout l'intervalle compris entre la Serra-da-Mantiqueira et la Serra-dos-Vertentes, s'abaissant, à partir de la ligne qui joint Barbacéna à Queluz, où elles dépassent 1,100 mètres, jusqu'au Tiété, où leur altitude n'est plus que de 500 à 600. Elles disparaissent près de cette rivière dans les environs d'Itu et sont remplacées par des granits porphyroïdes rouges à gros cristaux de feldspath, qui, longeant la chaîne schisteuse de Saint-Roch, viennent s'éteindre près de la petite ville de Campo-Largo, à 6 lieues à l'O. de Sorocaba, où ils disparaissent sous le terrain de transition. Les couches, dans tout cet intervalle, plongent, tantôt vers le S. E. tantôt vers le N. O. et présentent des directions qui varient du N. E. à l'E. N. E. Dans quelques cas, elles se dirigent même E. O. mais cette circonstance est beaucoup plus rare et n'a lieu qu'au voisinage de quelques dykes de diorite sans délit qui suivent la même direction. Après avoir formé la base des chaînes dos Vertentes et de Deos-te-Livre, cette formation pénètre dans l'intervalle qui les sépare et s'étend, dans le bassin du Rio-das-Vellhas, jusqu'auprès de Santa-Rita ; d'une autre part, elle contourne à l'E. la Serra-de-Deos-te-Livre et s'étend du S. au N. en suivant les extrémités des Serras-da-Caraça, do Gongo-Socco, da Piedade et d'Itabira, d'où elle s'étend à l'E. jusqu'au Rio-Doce, occupant tout l'intervalle compris entre ce fleuve, la Serra-de-San-Geraldo et les chaînes centrales de la province de Minas-Géraës.

Les faits qui précèdent conduisent naturellement à séparer en deux parties les roches de l'étage du gneiss qui se montrent dans les provinces centrales du Brésil : la première, occupant tout le terrain compris entre la Serra-da-Mantiqueira ou son prolongement et la mer ; la seconde, s'étendant depuis le versant

N. O. de cette chaîne jusqu'aux roches talqueuses qui s'élèvent au N. et à l'O. Chacune de ces parties forme une région naturelle, entièrement distincte de l'autre par le relief du sol, les productions et le climat : l'une est la région des forêts ou la partie fertile du Brésil, celle où se trouvent toutes les grandes cultures; l'autre, la région des Campos, généralement aride et n'offrant à ses habitants d'autres ressources que l'éducation des bestiaux et l'exploitation des minerais aurifères. Le groupe inférieur, ou la partie comprise entre la Mantiqueira et la mer, renferme trois formations toujours superposées dans le même ordre : la plus basse est celle des gneiss porphyroïdes, qui se montrent le long de la côte et à la base de la Cordilière maritime; ils sont recouverts, sur quelques points, par des gneiss leptinoïdes très-riches en mica, d'une structure glandulaire produite par de nombreux nodules de grenats. Cette roche, qui atteint une épaisseur d'une quarantaine de mètres au plus, n'existe que dans la partie médiane de la Cordilière; ailleurs, les gneiss porphyroïdes se trouvent immédiatement recouverts par une puissante formation de leptinite granatique dont l'épaisseur atteint plusieurs centaines de mètres, et qui passe dans le S. à un gneiss à grain fin contenant encore quelques grenats. Un autre gneiss à grain fin, ne contenant point de grenats et renfermant quelques couches subordonnées de quartzite à gros grain légèrement micacé, vient terminer cette première série et s'étend jusqu'au sommet de la Mantiqueira.

Le groupe supérieur ne présente qu'une seule formation, dont la roche dominante est un gneiss à grain fin semblable au précédent; mais il s'en distingue par le nombre et la puissance des couches de quartzite qui lui sont subordonnées, par les couches, moins fréquentes, il est vrai, de talcite et de micacite, et surtout par l'abondance des minerais métallifères, dont il existe à peine des traces dans le groupe inférieur. Enfin, des granits à grain fin, généralement d'un gris bleuâtre, et des diorites sans délit se sont fait jour à travers les roches de ces deux groupes, où ils forment des dykes puissants ou de petits mamelons.

ÉTAGE DES TALCITES PHYLLADIFORMES. (Fig. 3.)

Les roches talqueuses commencent à se montrer près du 14e parallèle de latitude S. où elles forment la partie supérieure de la Serra-das-Almas, dont la base est occupée par le gneiss. Après avoir disparu quelque temps sous le terrain de transition, elles se montrent de nouveau près du Rio-Belmonte, où elles occupent la partie orientale de la Serra-de-Grammagoa, puis s'étendent au S. pour former le morro d'Itambé, l'un des points culminants du Brésil, la Serra-das-Esmeraldas, qui s'étend à l'E. de cette montagne, puis celles da Pièdade, do Gongo-Socco, da Caraça, où elles atteignent une hauteur de 1,858 mètres, et viennent se terminer entre 20° et 21° de latitude vers la Serra-de-Deos-te-Livre. A partir de ce point, elles se prolongent vers l'O. sur la Serra-dos-Vertentes et se rattachent ainsi aux parties beaucoup plus centrales qui occupent la province de San-Paulo. Celles-ci forment d'abord une bande assez étroite qui apparaît près d'Itu, et s'étend de là au S. O. en formant une chaîne comprise entre Saint-Roch et Sorocaba. Cette bande se bifurque un peu au delà de Sorocaba, laissant dans l'intervalle des granits porphyroïdes : la branche orientale a peu de longueur et se trouve bientôt remplacée par les mêmes granits, tandis que la branche occidentale se prolonge jusqu'au delà de la Curitiba. Ces roches ne forment point une surface continue; elles se présentent en grands lambeaux qui semblent comme jetés sur le gneiss, et s'étendent au N. E. ou au S. O. occupant la partie supérieure des plus hautes chaînes des provinces de Minas-Géraës et de San-Paulo. Les talcites phylladiformes dominent dans tous ces lambeaux : ils sont associés à des quartzites talcifères qui occupent après eux le plus d'étendue; viennent ensuite les itabirites, et enfin des calcaires talcifères, qui ne forment jamais que des couches subordonnées. Ces diverses roches se présentent sous deux conditions différentes : tantôt elles se montrent en couches de peu d'épaisseur, subor-

données aux talcites; d'autres fois, elles atteignent une grande puissance et occupent alors une place déterminée et constamment la même, quelque éloignés que soient les points où on les observe. Le calcaire fait seul exception à cette règle générale; il ne se montre jamais subordonné, et forme toujours des couches puissantes occupant la même position. Ce mode de distribution des diverses couches au milieu de l'étage des talcites phylladiformes permet de le diviser en autant de formations différentes. La plus inférieure, celle qui repose immédiatement sur le gneiss, comprend des quartzites talcifères qui, sur quelques points, atteignent une épaisseur de près de 800 mètres; ils sont recouverts par des talcites phylladiformes qui supportent eux-mêmes une seconde formation de quartzites différant des premiers par leur structure éminemment schistoïde. Ces quartzites sont recouverts par la formation des itabirites; et c'est dans l'intervalle de ces deux formations que se montrent les deux calcaires, qui, ainsi que je l'ai dit précédemment, n'apparaissent que sur quelques points. Viennent ensuite d'autres talcites beaucoup plus friables que les premiers; enfin, des quartzites pseudo-fragmentaires terminent cette série.

QUARTZITES INFÉRIEURS.

Les quartzites inférieurs sont généralement d'un blanc jaunâtre, friables, à grain très-fin et contenant de nombreuses lamelles de talc jaune verdâtre qui s'y trouvent uniformément disséminées et donnent à la roche une structure grossièrement schistoïde. Ils atteignent leur plus grand développement près du 20^{e} degré, à la Serra-de-Deos-te-Livre, et de là vont en diminuant, à mesure que l'on avance vers le N. cédant la place aux talcites phylladiformes, au milieu desquels ils ne forment bientôt que des couches subordonnées et de peu d'épaisseur. En même temps qu'ils diminuent ainsi de puissance, ils éprouvent des changements considérables dans leur structure : le grain devient plus inégal, le talc plus rare,

et ils passent à un quartzite glandulaire gris composé de grains très-fins de quartz blanc, qui servent en quelque sorte de ciment à des parties plus volumineuses de quartz enfumé. On y rencontre quelques minéraux disséminés, et notamment l'or, qui se trouve dispersé en parcelles très-fines à la surface des parties les plus riches en talc; il est souvent accompagné de titane rutile, et des aiguilles de disthène se montrent assez abondamment dans les variétés glandulaires.

TALCITES INFÉRIEURS.

Les talcites qui succèdent à cette formation présentent un très-grand nombre de variétés, soit dans la couleur, soit dans leur dureté plus ou moins grande, ou par la nature des substances qui s'y trouvent uniformément mêlées. Toutefois, il existe certains caractères généraux qui les font distinguer de ceux que l'on rencontre dans les parties supérieures. Les couleurs qu'ils affectent le plus ordinairement sont le rouge, le gris verdâtre et le jaune plus ou moins foncé. Les variétés rouges occupent ordinairement la partie inférieure; elles sont recouvertes par des talcites très-durs, gris foncé ou verdâtres, et renferment assez souvent entre leurs feuillets de petites aiguilles de disthène disposées autour d'un centre d'où elles divergent. Sur les points où, par suite du grand amincissement des quartzites précédents, ces talcites reposent sur le gneiss, ils se présentent avec une teinte jaune et contiennent alors de nombreux cristaux de pittizite et des octaèdres de fer oxydulé. Dans quelques localités, l'hydrate de fer qui les colorait en jaune se trouve remplacé par de l'acerdèse, qui leur donne une teinte brune plus ou moins intense; ils sont alors très-friables et renferment des nids d'une matière talqueuse blanche et pulvérulente, dans laquelle se trouvent implantés de nombreux cristaux de quartz enfumé, des topazes, du titane rutile et des euclases.

QUARTZITES MOYENS.

Les couches de quartzite que l'on rencontre au-dessus de cette première formation des talcites se distinguent immédiatement de ceux qui leur sont inférieurs par leur structure schistoïde, qui permet de les diviser en plaques très-minces, leur grain très-fin et uniforme ne passant jamais à la structure glandulaire. Le talc ne s'y trouve plus uniformément disséminé, il forme des lits continus, très-minces, alternant avec d'autres lits de quartz arénoïde, généralement très-blanc. Dans les variétés les plus pures, le talc est d'un blanc légèrement verdâtre et d'un éclat nacré très-vif. Souvent une petite quantité d'oligiste terreux s'est étendue, sous forme d'enduit, à la surface des joints de clivage et présente de larges taches rouges. A mesure que l'on s'élève, ces quartzites perdent de leur blancheur par suite du mélange d'une petite quantité d'acerdèse pulvérulent qui leur donne une teinte d'abord jaunâtre, passant au brun dans les parties les plus voisines de la surface supérieure. Cette formation renferme peu de minéraux disséminés, on n'y rencontre ni disthène, ni titane rutile, et de minces lames de talc, souvent d'un beau vert, viennent seules interrompre l'uniformité de cette roche; encore se trouvent-elles dans une circonstance exceptionnelle, au voisinage de filons de quartz compacte qui traversent leurs couches dans une direction presque perpendiculaire à leur plan de stratification. Ces filons sont d'ailleurs, comme les quartzites, dépourvus de toute espèce minérale; ce qui permet de les distinguer des couches de quartz également compacte qui alternent avec les quartzites, et renferment ordinairement de la tourmaline et du mispickel aurifère. Dans les parties où cette roche se trouve exposée à l'air, elle éprouve à la longue une sorte de désagrégation, sans doute par suite des changements de température : les grains de quartz ne se trouvent alors maintenus que par les lamelles de talc qui, leur permettant de se mouvoir dans les intervalles qui les séparent,

donnent à ces couches, ainsi altérées, une flexibilité remarquable, surtout dans quelques variétés à gros grains qui forment de petites couches subordonnées à la masse principale.

ITABIRITE.

Les couches supérieures de ces quartzites, celles qui sont colorées en brun par l'acerdèse, ne tardent pas à s'associer quelques parcelles d'oligiste micacé, et cette substance, devenant de plus en plus abondante, finit par constituer l'itabirite, roche essentiellement formée de quartz et d'oligiste, mais contenant ici, comme principe accidentel, une quantité toujours assez grande de braunite ou d'acerdèse. La variété dominante d'itabirite forme une roche schistoïde, d'un rouge-brun très-foncé ; elle alterne avec d'autres couches beaucoup plus minces, d'un gris d'acier, et presque entièrement formée d'oligiste très-éclatant. Une autre roche qui atteint souvent une grande puissance se montre encore subordonnée à l'itabirite: elle est d'un gris très-foncé, friable, tachante, et se compose d'une très-grande quantité de braunite associé à de l'oligiste et du quartz. Cette roche, connue des mineurs brésiliens sous le nom de *jacutinga*, occupe toujours les parties inférieures de la formation, où elle se montre en couches de peu de longueur ou en amas lenticulaires atteignant souvent une épaisseur de plus de 100 mètres. Elle renferme fréquemment de grosses masses d'oligiste presque pur formées par la réunion de petits octaèdres dont les faces sont ordinairement recouvertes d'une petite quantité de quartz arénoïde, ou des couches subordonnées de quartz compacte accompagné de braunite cristallisé.

Enfin, des filons de quartz qui ne sont que le prolongement de ceux que l'on a vu traverser les quartzites coupent les couches de cette formation; le talc qui les accompagnait dans ce dernier cas, cesse de se montrer et se trouve en quelque sorte remplacé par de l'oligiste lamellaire qui existe au point de contact de ces filons avec les couches.

L'itabirite est, de toutes les formations, celle qui renferme le plus grand nombre d'espèces minérales; l'oligiste s'y montre sous toutes les formes, depuis les masses compactes formées par de petites couches, jusqu'à des lamelles courbes très-brillantes et se divisant en écailles aussi minces que le mica. Cette variété occupe une position extrêmement remarquable : elle accompagne des couches de quartz subordonnées à l'itabirite, semblables à celles qui occupent la même position dans les quartzites, et l'oligiste, dont les lames suivent toutes les ondulations du quartz, semble ici remplacer le talc, non-seulement dans sa position, mais dans sa structure, comme cela aurait lieu pour une substance pseudo-morphique. Le fer oxydulé s'y rencontre en octaèdres disséminés, soit dans les couches de jacutinga, soit dans des talcites jaunâtres très-friables qui occupent la partie supérieure. Dans les cavités qui accompagnent souvent les couches de quartz, on trouve de petites stalactites de sous-sulfate de fer et des cristaux de néoctèse. Enfin, l'or se montre plus abondant ici que partout ailleurs : il existe dans les couches de quartz et principalement dans le jacutinga, où il forme de petites veines ayant quelquefois cinq millimètres d'épaisseur. Les mines les plus importantes du Brésil, celles du Gongo-Socco de Cocaës, de la Cata-Preta et de Brocotu, appartiennent à cette formation.

Rien n'est plus variable que l'épaisseur de l'itabirite : réduite sur quelques points à une couche de deux ou trois mètres, elle en atteint sur d'autres plusieurs centaines. Il existe, entre cette formation et celles des quartzites moyens, une liaison telle, que ces deux roches passent de l'une à l'autre au point que, dans quelques localités, les quartzites disparaissent entièrement, et les talcites mêmes qui se trouvent au-dessous se changent en acerdèse schistoïde, ainsi qu'on peut l'observer dans les environs d'Antonio-Pereira. Ce qui achève encore d'établir cette liaison, c'est l'épaisseur à peu près constante des deux formations réunies, de l'itabirite et des quartzites moyens, de telle sorte que le développement

de l'une a lieu aux dépens de l'autre, les quartzites se montrant très-minces là où l'itabirite domine, et réciproquement.

CALCAIRES.

Les calcaires qui appartiennent à cet étage sont le plus souvent grenus ou saccharoïdes, plus rarement compactes et quelquefois glandulaires; ils forment des couches de peu d'étendue placées entre les quartzites moyens et l'itabirite. Ces couches, qui se réduisent quelquefois à une seule masse lenticulaire un peu allongée, se composent, lorsqu'elles ont une plus grande étendue, de masses semblables réunies entre elles par des parties beaucoup plus minces, de manière à présenter, entre les étranglements et les parties renflées, une différence d'épaisseur de 1 à 50 ou 60 mètres. La variété qui forme les étranglements est un calcaire talcifère, à structure schistoïde, dont la couleur varie du gris foncé au vert bleuâtre; il passe à la structure glandulaire et enveloppe alors des amandes de calcaire compacte blanc jaunâtre ou de calcaire spathique fortement coloré en rouge par de l'oligiste ; il suit les contours de la masse principale, dont le centre est occupé par des variétés saccharoïdes ou grenues traversées par quelques veines de quartz et renfermant des géodes de la même substance tapissées de beaux cristaux prismatiques. Les variétés saccharoïdes sont en général colorées en rose, tandis que les calcaires grenus présentent des couleurs variant du jaune plus ou moins foncé au gris bleuâtre. Ces derniers contiennent un peu de magnésie et des pyrites disséminées.

La position de cette roche semble, au premier abord, n'être pas bien déterminée: on la voit tantôt intercalée entre les couches de l'itabirite, tantôt à la séparation de cette formation et de celle des quartzites moyens, enfin placée dans ces mêmes quartzites; mais cette irrégularité tient uniquement au peu de constance qui existe entre l'épaisseur des quartzites et de l'itabirite, qui, ainsi qu'on l'a vu précédemment, passent de l'un à l'autre au point de ne pré-

senter souvent qu'une seule roche pour ces deux formations réunies. Mais si, au lieu de considérer les caractères minéralogiques de ces deux formations, on ne tient compte que de leur épaisseur, on reconnaît facilement que le calcaire les partage toujours en deux parties, dont les épaisseurs se trouvent sensiblement dans le même rapport, sur quelque point qu'on les examine, de telle sorte que, loin d'occuper une place indéterminée, il forme au contraire la limite la plus naturelle que l'on puisse établir entre les quartzites et l'itabirite, les parties supérieures au calcaire se trouvant toujours les plus riches en oligiste, tandis que le quartz domine dans les couches inférieures.

TALCITES SUPÉRIEURS.

Les talcites supérieurs reposent immédiatement sur l'itabirite; ils diffèrent de ceux qui séparent les deux premières formations de quartzites par leur grande friabilité, leur couleur grise passant du gris foncé au gris de perle et les couches de quartzite pulvérulent qui s'y trouvent subordonnées. On y rencontre quelques lits très-minces d'oxyde de manganèse (mélange de braunite et d'acerdèse) et de disthène, qui forme souvent de grosses masses dans des amas lenticulaires de quartzite à gros grain, qui se trouvent intercalés entre les couches de talcite. Ce sont, d'ailleurs, les seules espèces minérales que l'on y rencontre; l'or, les pyrites et les autres substances qui se trouvaient répandues dans les parties inférieures de cet étage cessent de se montrer au delà de l'itabirite.

QUARTZITES SUPÉRIEURS.

Les talcites précédents supportent une puissante formation de quartzite, qui termine l'étage des talcites phylladiformes. Les roches que l'on y rencontre présentent deux variétés: la première est un quartzite à grain moyen, offrant de nombreux points noirs ou brun foncé formés par de l'oligiste; ils renferment peu de talc

et montrent une structure plutôt massive que schistoïde. Ces quartzites, qui occupent les parties inférieures, alternent un peu plus haut avec d'autres quartzites pseudo-fragmentaires qui finissent par dominer et former à eux seuls des couches d'une grande épaisseur. Cette dernière variété se compose, tantôt d'une pâte à gros grain de quartz parsemée de quelques lamelles de talc, enveloppant des amandes de quartzite sableux à grain beaucoup plus fin; sur d'autres points, elle enveloppe des parties de talcite gris ou verdâtre qui la font ressembler tellement à un grès anagénique, qu'il est souvent fort difficile de se prononcer sur la nature cristalline ou sédimentaire de cette roche, l'espèce de passage que l'on remarque entre la pâte et les parties enveloppées pouvant tenir au peu de dureté de ces substances, qui fait qu'on ne peut les en séparer sans les briser. Quoi qu'il en soit, cette roche atteint toujours une grande puissance, son épaisseur variant de 400 à 500 mètres; elle se montre sur les points les plus élevés de la province de Minas-Géraës, tels que l'Itacolumi, la Serra-da-Caraça, le Morro-d'Itambé. Elle ne renferme point de minéraux disséminés, et se trouve seulement traversée par quelques couches de quartz fortement fendillé et dont les joints sont recouverts d'un enduit d'oligiste ou d'oxyde de manganèse.

Tels sont les caractères généraux des diverses formations qui composent l'étage de talcites; et, pour compléter leur description, il suffira de jeter un coup d'œil sur les localités les plus remarquables, soit dans la province de Minas-Géraës, soit dans celle de Saint-Paul.

MONTAGNES DE MINAS-GÉRAËS.

SERRA-DE-DEOS-TE-LIVRE ET D'ITACOLUMI.

La Serra-de-Deos-te-Livre se présente comme une longue muraille qui s'élève presque verticalement au-dessus des gneiss qui forment la région des Pampas, près du 20^{e} degré de latitude S.

à environ six lieues de Villa-Rica. Elle court de l'O. à l'E. la ligne de faîte atteignant une altitude de 1,320 mètres près de l'extrémité occidentale et s'abaissant, en avançant vers l'E. de manière à ne plus s'élever qu'à 1,000 ou 1,100 mètres. Le gneiss se montre jusqu'au tiers de la hauteur, où il forme de petites collines arrondies qui sont recouvertes de forêts et se distinguent ainsi de fort loin des autres parties, entièrement dépourvues de végétation. Ces gneiss supportent une puissante formation de quartzite talcifère à grain fin, d'un blanc jaunâtre, dont les couches, fortement inclinées, se dirigent E. O. et plongent au N. sous un angle qui varie de 60° à 70°. Ces quartzites continuent à se montrer au N. de la ligne de faîte sur une distance d'environ 1,000 mètres; ils sont ensuite remplacés par des talcites phylladiformes rouges alternant avec d'autres talcites verdâtres beaucoup plus durs, et qui finissent un peu plus loin par dominer. En avançant encore vers le N. ces talcites disparaissent près de la petite habitation du Capâo sous les quartzites moyens et l'itabirite, qui se trouvent ici peu développés, et en quelque sorte subordonnés aux talcites qui reparaissent au-dessus et supportent les quartzites pseudo-fragmentaires des montagnes d'Itatiaia et de l'Itacolumi. Les couches changent ici de direction, courant au N. E. 10° à 12° E. et plongent en sens inverse de celles de la Serra-de-Deos-te-Livre, c'est-à-dire vers le S. E. Elles atteignent leur plus grande altitude au pic de l'Itacolumi, élevé de 1,734 mètres, et vont ensuite en s'abaissant suivant une arête E. O. qui forme la Serra-de-l'Itacolumi.

SERRA-DA-CAXOËRA ET D'ANTONIO-PEREIRA.

La Serra-da-Caxoëra se trouve séparée de l'Itacolumi par une gorge profonde où coule le Rio-do-Carmo, l'un des principaux affluents du Rio-Doce; elle se dirige également de l'O. à l'E. et les couches plongent vers le S. sous un angle d'environ 40° au sommet, mais beaucoup moindre à la base, les couches offrant une courbure qui tourne sa concavité vers le S. La ligne de faîte

va s'abaissant vers l'O. et se termine, près de Mariana, par un massif dont le centre est occupé par du gneiss. Ce massif, où le Rio-das-Velhas prend sa source, s'abaisse vers l'O. jusqu'aux environs de Caxoëra, où il ne s'élève guère qu'à 8 ou 900 mètres, tandis que, dans cette partie, la chaîne en atteint plus de 1,500. Le gneiss, renfermant quelques couches de quartzite à gros grains et de talcite compacte, forme, jusqu'aux deux tiers de sa hauteur, le versant septentrional de cette chaîne ; il est remplacé par d'autres talcites grossièrement schistoïdes, qui alternent avec des couches peu épaisses de quartzite glandulaire gris foncé, renfermant des aiguilles de disthène. Les talcites phylladiformes apparaissent ensuite sur une épaisseur de 150 à 200 mètres et supportent les formations des quartzites moyens et de l'itabirite. Cette dernière roche forme tout le versant méridional de la chaîne jusqu'auprès de la base où elle disparaît sous les talcites supérieurs. Dans la partie la plus resserrée de la gorge qui sépare cette chaîne de l'Itacolumi, entre Ouro-Preto et Mariana, on rencontre une couche de calcaire d'une cinquantaine de mètres d'épaisseur, qui repose sur des quartzites gris et supporte l'itabirite. Les parties de ce calcaire qui sont en contact avec le quartzite présentent une structure schistoïde et renferment de petits lits de talc gris. Les parties centrales sont grenues, d'un blanc jaunâtre contenant des pyrites cuivreuses, et se trouvent séparées de l'itabirite par d'autres calcaires schistoïdes et talcifères. Vers l'extrémité orientale de la chaîne, les couches changent de direction, plongent un instant vers l'E. puis reviennent sur elles-mêmes, courant de l'E. vers l'O. où elles forment la Serra-d'Antonio-Pereira, dont le versant méridional présente absolument les mêmes roches que le versant septentrional de la Caxoëra, tandis que l'itabirite recouvre tout le versant septentrional. Cette formation atteint ici une puissance remarquable : elle envahit, non-seulement les quartzites moyens, mais encore les talcites qui les supportent. Dans les profonds ravins qui se montrent un peu à l'O. du village d'Antonio-Pereira, on voit ces talcites remplacés par de l'acerdèse schisteuse entremêlée de quelques

paillettes d'oligiste micacé, et enveloppant souvent de grosses masses formées de cristaux octaédriques d'oligiste. Cette roche renferme quelques couches subordonnées de quartz où l'on trouve de l'or, des stalactites de pittizite et quelques cristaux de néoctèse. Elle est immédiatement recouverte par l'itabirite manganésifère (jacutinga), qui s'étend jusqu'au delà du Rio-Gualaxo, qui coule au pied de cette chaîne. De l'autre côté de cette rivière, on rencontre encore l'itabirite; mais ses couches plongent en sens inverse, c'est-à-dire au S. et présentent une épaisseur beaucoup moindre; elles sont séparées des quartzites moyens par une puissante formation de calcaire, qui, dans les parties qui se trouvent en contact avec cette roche, présente une variété schistoïde composée de talc verdâtre enveloppant des lits ondulés de calcaire spathique dont la couleur varie du rose au rouge foncé et même au violet. Quelques veines de quartz se montrent dans ces calcaires talcifères, qui sont remplacés un peu plus bas par une variété saccharoïde d'un beau rose ne contenant point de talc. Un peu plus à l'O. ces calcaires changent de couleur, deviennent d'un gris bleuâtre, prennent une texture grenue et contiennent un peu de magnésie. Enfin, les couches les plus inférieures, celles qui reposent sur le quartzite, reprennent la structure schistoïde et renferment de nouveau du talc d'un vert bleuâtre.

SERRA-DA-CARAÇA ET DU GONGO-SOCCO.

Les montagnes d'Antonio-Pereira décrivent, un peu à l'O. de ce village, une partie de cercle et viennent s'appuyer contre un massif beaucoup plus élevé, dont la partie culminante se dirige au N. E. depuis Capanéma jusqu'à Catas-Altas, et porte le nom de Serra-da-Caraça. Les quartzites moyens occupent la ligne de faîte et forment la majeure partie de la chaîne; leurs couches sont dirigées au N. E. et fortement redressées : elles plongent vers le S. E. formant tout le versant de cette chaîne, où l'on trouve seulement quelques lambeaux d'itabirite reposant sur ces quartzites.

L'oxyde de manganèse abonde dans les parties inférieures de cette dernière roche, et sur tous les points où il se montre, tels que la Cata-Préta, le Morro-d'Aguaquente, les Catas-Altas, on l'exploite comme minerai aurifère. Sur le versant N. O. les talcites inférieurs apparaissent immédiatement au-dessous des quartzites; ils sont d'une couleur rouge ou jaunâtre, et renferment de nombreux cristaux de pyrite décomposée, de fer oxydulé et de quartz hyalin blanc ou enfumé. Cette dernière substance forme des poches souvent assez grandes qui se trouvent dans les couches les plus basses. Les quartzites inférieurs n'existent point ou, plus exactement, ne sont représentés que par des couches de peu d'épaisseur d'un quartzite glandulaire blanc grisâtre qui se trouvent subordonnées au talcite. Le gneiss se montre immédiatement au-dessous des quartzites ou des talcites, et forme tout l'espace compris entre cette chaîne et la Serra-de-Capanému, qui occupe la partie occidentale du massif. Cette dernière, qui présente d'abord la même composition que la Caraça, s'infléchit en face de Catas-Altas et forme la Serra-du-Gongo-Socco, dirigée de l'O. à l'E. séparant les eaux du Parana de celles du Rio-Doce. Les couches suivent également la direction E. O. elles plongent vers le S. et font avec l'horizon un angle qui varie de 30 à 40°, suivant qu'on les observe au sommet ou à la base. Le gneiss occupe environ les deux tiers du versant septentrional; il est recouvert par des talcites phylladiformes rouges, qui alternent avec des couches subordonnées de quartzite glandulaire variant du blanc au gris foncé. Les quartzites moyens occupent la ligne de faîte; leur épaisseur est peu considérable et ils prennent bientôt cette teinte brune qui annonce leur passage à l'itabirite. Celui-ci s'étend sur tout le versant méridional jusqu'à la base de la chaîne où il renferme des couches subordonnées de jacutinga, dans lesquelles se trouvent creusées les galeries du Gongo-Socco. La richesse en or semble se trouver ici en rapport avec la puissance de cette roche; elle forme une couche composée de plusieurs renflements de forme lenticulaire, dont le plus grand, placé un peu à l'O. des habitations, atteint

une épaisseur de plus de 100 mètres. Les veines d'or les plus considérables se montrent dans la partie centrale et diminuent rapidement à mesure que l'on s'en éloigne. De nouvelles couches d'itabirite recouvrent le jacutinga et supportent un peu plus au S. une puissante formation de calcaire. Ces calcaires offrent la plus grande analogie avec ceux d'Antonio-Pereira; les parties qui se trouvent en contact avec l'itabirite présentent une structure glandulaire et renferment des lits de talc verdâtre, dont la couleur se détache fortement sur le rouge plus ou moins foncé des amandes calcaires. La partie médiane est d'un blanc jaunâtre, compacte ou saccharoïde, et forme plusieurs renflements qui s'étendent depuis le Gongo-Socco jusqu'à San-Joâo-de-Morro-Grande, sur une longueur de 3,000 à 4,000 mètres. L'itabirite reparaît au-dessus de ces calcaires et supporte, sur quelques points seulement, les talcites supérieurs.

SERRA-DA-PIEDADE.

La Serra-da-Piedade, qui commence un peu à l'O. de Sabara, présente dans sa direction, sa forme et la nature des roches qui la constituent, une ressemblance frappante avec celle du Gongo-Socco. Dirigée d'abord à l'E. N. E. elle s'infléchit à peu près vers le milieu de sa longueur et prend la direction E. O. Les couches suivent les mêmes inflexions; elles sont fortement redressées et plongent d'abord vers le S. S. E. puis vers le S. Le versant septentrional, si toutefois l'on peut donner ce nom à un vaste plateau ondulé qui s'abaisse graduellement vers le N. se compose presque entièrement de gneiss; les talcites apparaissent un peu avant de rencontrer la ligne de faîte: ils sont d'abord jaunâtres et renferment des couches subordonnées de quartzite glandulaire, dont l'épaisseur dépasse rarement cinq ou six mètres. Des talcites verdâtres les remplacent et supportent les quartzites moyens qui forment l'arête culminante. Ces quartzites sont très-durs, d'un gris foncé, et renferment quelques couches subordonnées de

talcite offrant la même couleur. Ils s'étendent ainsi sur le revers méridional jusqu'à une petite vallée longitudinale qui se trouve placée à peu près au tiers de la hauteur; là ils supportent des calcaires qui, occupant le fond de cette vallée, s'élèvent sur le côté opposé jusqu'à une hauteur de 60 à 80 mètres. Les couches inférieures sont formées par une variété glandulaire, dont les amandes, d'un blanc jaunâtre, sont enveloppées de talcite gris. Les couches moyennes, qui sont beaucoup plus épaisses, présentent un calcaire compacte blanc jaunâtre, traversé par de nombreuses veines de calcaire spathique, et renfermant des poches tapissées de cristaux prismatiques de quartz hyalin. Les parties supérieures appartiennent à une variété schistoïde, jaunâtre, composée de calcaire saccharoïde et de talc brun. Au-dessus de cette formation, se montrent des quartzites semblables à ceux qu'elle recouvre, puis des quartzites plus friables colorés en brun par de l'acerdèse, enfin l'itabirite se montre depuis la ligne de faîte de cette petite chaîne secondaire, qui se trouve adossée contre la première, jusqu'à sa base, d'où elle s'étend au delà, formant, de l'autre côté du ruisseau qui longe la Piedade, une série de monticules où les couches plongent en sens inverse.

Les autres chaînes qui s'étendent, soit au N. soit à l'O. présentent une composition analogue : le gneiss se montre toujours jusqu'à une certaine hauteur sur le versant qui présente la tranche des couches, tandis que l'itabirite recouvre le versant opposé. Les seules différences que l'on observe consistent dans le plus ou moins d'épaisseur des diverses formations et les changements de structure ou de couleur des roches qui les composent.

CHAINE SCHISTEUSE DE LA PROVINCE DE SAN-PAULO.

Les talcites qui forment la Serra-dos-Vertentes, après avoir disparu à l'O. sous les terrains de transition qui recouvrent la majeure partie de la province de San-Paulo, se montrent de nouveau à quelques lieues au S. de la ville d'Itu, où ils forment une

chaîne qui, se dirigeant au S. O. passe entre San-Roc et Sorocaba. Ces talcites se bifurquent un peu avant d'atteindre le parallèle de Sorocaba, laissant entre eux des gneiss, puis des granits porphyroïdes, qui forment la ligne de faîte et s'étendent au S. O. jusqu'à la mer. La bande méridionale a peu de longueur : elle longe pendant quelques lieues le versant S. E. de la chaîne granitique, et s'éteint près d'une petite rivière qui vient déboucher dans la mer, à Iguape : la bande septentrionale longe le versant opposé de la même chaîne et s'étend bien au delà de la Curitiba.

On ne retrouve ici qu'une partie des formations qui se présentent dans la province de Minas-Géraës. Les quartzites ont entièrement changé d'aspect, l'itabirite a complétement disparu, et les calcaires sont réduits à quelques couches de peu d'épaisseur. Les talcites se montrent seuls sur toute l'étendue des deux bandes, où ils atteignent une épaisseur qui paraît dépasser 1,000 mètres; ils reposent immédiatement sur le gneiss. Les variétés dominantes sont fort tendres et varient du rouge foncé au rose pâle; elles renferment quelques couches subordonnées de talcite beaucoup plus dur, gris ou verdâtre, et des couches de quartz compacte. Ces diverses couches, toujours fortement redressées et quelquefois même absolument verticales, se dirigent du N. E. un peu E. au S. O. un peu O. Dans toute la partie comprise entre l'extrémité orientale et le point où elles se bifurquent, elles plongent vers le N. O. A partir de ce dernier point, elles sont inclinées en sens inverse, celles de la bande méridionale plongeant au S. E. et les autres au N. O. Près du point où le Rio-Sorocaba franchit la chaîne où il prend sa source, ces talcites sont recouverts par une formation de quartzites dont l'épaisseur est d'environ 150 mètres. Les diverses couches que l'on y rencontre appartiennent toutes à des variétés très-dures, renfermant à peine des traces de talc et prenant souvent une texture tout à fait compacte. Leur couleur varie du gris foncé au blanc jaunâtre, et l'on rencontre dans la masse quelques couches subordonnées de talcite très-dur gris d'ardoise. Ces quartzites forment plusieurs petites collines qui s'étendent au

N. E. jusqu'auprès de Sorocaba, et au S. O. jusqu'auprès du Rio-Capivari, où ils disparaissent sous les grès du terrain de transition. Quelques couches de calcaire compacte, d'un gris foncé, alternant avec des talcites de la même couleur, et renfermant de nombreuses veines de calcaire spathique blanc, se montrent dans certaines localités, telles que la chapelle de San-Francisco et la montagne d'Arasoïaba, au-dessus de ces quartzites, et supportent immédiatement les grès de transition qui les recouvrent en stratification discordante.

Lesespèces minérales sont ici infiniment plus rares que dans la province de Minas-Géraës: les seules que j'y aie rencontrées sont la tourmaline et le braunite, qui se trouvent disséminés ou en petites veines dans les couches de quartz compacte. L'or se montre aussi sur quelques points; il y avait anciennement des lavages près de la chapelle de San-Francisco, et l'on en extrait encore de petites quantités des sables que charrient les rivières comprises entre la Curitiba et la mer.

TERRAIN DE TRANSITION.

Le terrain de transition occupe à lui seul presque toute la province de Bahia; il se montre ensuite dans le N. de la province de Minas-Géraës, où il forme les Taboleiros, la Serra-de-Grammagoa et la partie occidentale du Cerro-Frio, puis il s'étend à l'O. de la Serra-dos-Vertentes, se rapproche de nouveau de la côte, et, après avoir franchi le Parana, vient recouvrir toute la partie australe de la province de San-Paulo. Les roches qu'il présente peuvent se rapporter à deux formations, l'une très-développée, soit en épaisseur, soit en étendue; l'autre limitée aux parties australes : la première renferme des grès et des phyllades; les grès occupent la partie inférieure; ils offrent un très-grand nombre de variétés, soit dans le grain, la structure ou la couleur. Ceux que l'on rencontre dans les environs de Bahia sont rougeâtres, quelquefois même très-chargés d'oligiste terreux; la variété dominante est à

grain fin, mais elle renferme des couches subordonnées dont le grain est beaucoup plus gros: c'est un véritable conglomérat anagénique, où l'on trouve des fragments de talcite et des masses arrondies de quartzite rouge à grain très-fin et très-dur. Dans la Serra-de-Grammagoa et le Cerro-Frio, la variété dominante est à grain fin, d'un blanc jaunâtre; elle renferme d'autres grès à grain beaucoup plus gros, enveloppant des fragments roulés de quartzite et de gneiss. Ce sont encore les mêmes variétés qui se montrent dans la province de San-Paulo, dans toute la partie comprise entre le Tiété et la formation des talcites phylladiformes. Ces grès prennent un grain plus fin vers les parties supérieures, la matière argileuse dominant de plus en plus, et ils ne tardent pas à admettre quelques couches subordonnées de phyllade ou de psammite à grain très-fin, car ces deux espèces passent assez souvent de l'une à l'autre et même à l'argile schisteuse, qui sur beaucoup de points remplace les phyllades. Cette première formation, y compris les phyllades, présente, dans les lieux où elle se montre entièrement à découvert, une épaisseur qui varie de 300 à 400 mètres. C'est aux couches inférieures de ces grès, qui avaient été, sous le nom d'itacolumite, confondus avec les quartzites talcifères de l'Itacolumi, que l'on doit rapporter tout ce qui a été dit sur le gisement du diamant. Sans parler des diamants qui ont été trouvés dans les grès de la Serra-de-Grammagoa, et sur lesquels on pourrait élever quelques doutes, il est constant que cette précieuse substance ne s'est jusqu'à présent rencontrée que dans les parties occupées par cette roche, telles que la Serra-de-Grammagoa, la Serra-de-San-Antonio, le Cerro-Frio et les environs de la Curitiba; tandis que, malgré les nombreux lavages opérés sur les sables des terrains occupés par les quartzites talcifères, pour en retirer l'or, on n'a jamais rencontré aucun diamant. Enfin, l'une des rivières qui avoisinent la Curitiba, le Rio Guacahi, que j'ai suivi depuis sa source jusqu'aux cascades où on lave les sables diamantifères, coule entièrement sur les grès qui forment seuls les vastes campos du S.

La seconde formation, celle des calcaires et des schistes bitumineux, n'existe que dans le S. de la province de Saint-Paul, d'où elle s'étend jusqu'au Parana; les calcaires qui sont séparés des grès par une couche de phyllade ou d'argile schisteuse gris-bleuâtre, commencent à se montrer sur les bords du Tiété au lieu appelé Java-Coara, à six lieues environ de Porto-Félix; ils forment des plateaux élevés qui s'étendent au N. et au S. de cette rivière.

Les premières couches sont formées par un calcaire argilifère, schistoïde, blanc jaunâtre; elles alternent avec quelques couches de psammite, et sont recouvertes par d'autres calcaires plus compactes, ne renfermant plus d'argile, mais une petite quantité de silice. Ces plateaux s'abaissent en avançant vers l'O. les grès disparaissent bientôt au-dessous du Tiété, et l'on ne rencontre plus que les calcaires, qui sont devenus plus puissants et qui renferment une couche de psammite bitumineux, passant aux schistes bitumineux par suite de la grande ténuité des grains. Ces schistes, qui avaient été pris pour de la houille, sont d'un brun noirâtre; ils contiennent de 10 à 12 p. 100 de matière combustible, et laissent, après la calcination, une matière schisteuse colorée en rouge, entièrement semblable à celle que l'on rencontre dans les houillères en combustion. Les calcaires qui supportent ou qui recouvrent ces schistes diffèrent de ceux de Java-Coara par la présence de nombreux silex, qui s'y trouvent disséminés en rognons semblables à ceux de la craie, ou se confondent avec la roche en passant à l'état de calcaire siliceux.

Telles sont les roches stratifiées que l'on rencontre dans les parties où le terrain de transition atteint son plus grand développement. Elles sont traversées, sur beaucoup de points, par des roches d'éruption se rapportant, soit aux diorites sans délit, soit aux sélagites, qui se montrent souvent sur une grande étendue, formant plusieurs petites collines courant de l'E. à l'O. Ces roches, fortement altérées à leur surface, donnent par leur décomposition une argile d'un rouge foncé; les parties moins altérées pré-

sentent des couches concentriques semblables à celles de certains basaltes décomposés, d'abord jaunâtres, puis grises, et se confondant avec les parties intactes. Ces collines dioritiques forment, au milieu des plaines arides des Campos, de petites oasis couvertes de forêts, et qui se distinguent encore à une très-grande distance par la couleur rouge du terrain.

ENVIRONS D'ITU.

Les localités où cette formation présente les coupes les plus faciles à observer sont, d'abord, les environs d'Itu, qui, un peu au S. de cette ville, possèdent une grande carrière où les grès schistoïdes, passant au phyllade, sont exploités pour en tirer de larges dalles qui servent au pavage des rues. Sur une coupe verticale de 40 à 50 mètres, on observe d'abord les grès proprement dits, qui occupent la partie inférieure, puis des psammites schistoïdes qui reposent sur ces grès, présentant des couches sensiblement horizontales. Ces psammites, d'un gris verdâtre, alternent avec de petites couches très-minces, de 1 à 2 centimètres au plus, de phyllade bleu foncé, très-tendre et se délayant facilement dans l'eau; elles deviennent plus abondantes vers les parties supérieures, où le psammite paraît leur être subordonné.

ESCARPEMENT DE PORTO-FÉLIX. (Fig. 5.)

A quelques lieues à l'O. d'Itu, le Tiété coule au bas d'un escarpement qui présente une coupe verticale d'une centaine de mètres. Un grès à grain fin, blanc jaunâtre, se montre dans les parties inférieures et forme le lit de cette rivière; il supporte des couches à grain très-fin d'un grès schistoïde jaunâtre, qui ne tarde pas à passer aux phyllades, également jaunes, qui occupent le sommet de l'escarpement. Ces couches présentent une légère inclinaison vers le S. qui paraît se trouver en relation avec des diorites sans

délit compris entre le Tiété et le Rio-Sorocaba, où ils forment plusieurs petites collines courant de l'E. à l'O.

MONTAGNE D'ARASOÏABA.

La montagne d'Arasoïaba se trouve tout auprès des forges d'Ypanéma, à 3 lieues environ à l'O. de Sorocaba. Sa forme est celle d'un vaste plateau à peu près rectangulaire, élevé d'abord de 340 mètres au-dessus des plaines voisines, et qui, s'abaissant vers le N. finit par se confondre avec elles. Plusieurs collines de diorite sans délit, formant une masse puissante dirigée de l'E. à l'O. s'appuient contre le versant méridional. Les grès, qui en sont séparés par une légère dépression, se montrent à la base, d'où ils s'étendent jusqu'aux deux tiers de la hauteur. Ils sont d'un blanc jaunâtre, semblables à ceux de Porto-Félix, et renferment assez souvent des fragments roulés de gneiss ou de quartzite rougeâtre. D'autres grès schistoïdes, à grain beaucoup plus fin, et passant au phyllade, les recouvrent et s'étendent jusqu'au sommet, dont l'altitude est de 860 mètres. Ils s'abaissent à partir de ce point, et à une lieue vers le N. ils n'atteignent plus que 530 mètres. Sur le versant occidental, on voit ces mêmes grès reposer en stratification discordante sur des calcaires talcifères gris foncé, traversés par de nombreuses veines de calcaire spathique blanc. Enfin, dans la partie centrale du massif, l'on trouve une dépression occupée par plusieurs mamelons de dolomie grenue blanc jaunâtre, contenant une très-grande quantité de fer oxydulé, qui s'y trouve disséminé en petits octaèdres. Cette masse dolomitique présente, sur plusieurs points, de larges crevasses tapissées par des cristaux, souvent très-gros, de fer oxydulé, ou remplies par des filons de la même substance. C'est ce minerai que l'on distingue en mine pauvre et en mine riche, suivant qu'il renferme plus ou moins de dolomie, qui alimente les forges d'Ypanéma.

ENVIRONS DE TATUI. (Fig. 4.)

A une lieue S. de Tatui, dans la propriété de Joâe-Antonio-Dias de Toledo, on rencontre une cascade où une grande partie des roches du terrain de transition se trouvent immédiatement superposées. Des grès semblables à ceux de l'Arasoïaba et de Porto-Félix se montrent à la partie inférieure, où ils sont recouverts par une couche de 3 à 4 mètres d'une argile schisteuse gris verdâtre. Sur cette couche, repose une première assise de calcaire compacte blanc jaunâtre, enveloppant de grosses masses de silex, qui se confondent avec le calcaire de manière à présenter à la circonférence un calcaire siliceux, et dans le centre le silex à peu près pur, tantôt rouge et jaspoïde, d'autres fois brun et fibreux au point d'imiter des bois silicifiés; ou blond, translucide, et en tout semblable aux silex blonds de la craie. Ces calcaires forment une masse d'une vingtaine de mètres d'épaisseur, qui se trouve coupée par trois couches d'argile schisteuse semblables à la première, mais beaucoup plus minces, leur épaisseur variant de $0^{m},5$ à 1 mètre. Elle est recouverte par une couche d'environ 2 mètres d'un psammite schistoïde fortement chargé de bitume, passant vers sa partie supérieure au schiste bitumineux. Ce schiste, qui contient de 10 à 12 pour 100 de matière combustible, renferme entre ses feuillets quelques cristaux de gypse et des sphéroïdes siliceux, quelquefois entourés d'une mince couche bitumineuse. Il est recouvert par des argiles schisteuses semblables aux précédentes, mais d'une couleur un peu plus foncée, qui supportent elles-mêmes des calcaires schistoïdes renfermant des nodules de silex semblables à ceux que l'on rencontre dans le schiste bitumineux. Enfin, des diorites à grain fin se sont étendus d'un petit mamelon placé dans le voisinage jusque sur ces calcaires, qu'ils ont transformés en calcaire gris foncé, fétide, et traversé par des veines de calcaire spathique. L'altération ne s'est toutefois propagée qu'à une très-petite distance, puisqu'à 8 déci-

mètres ou 1 mètre au plus au-dessous de ces diorites, les calcaires reprennent leur couleur blanc jaunâtre et leur structure terreuse. Il est bien remarquable que les seuls débris de corps organisés que j'aie rencontrés dans tout le terrain de transition se soient trouvés dans ces calcaires modifiés; ils sont, d'ailleurs, si petits et si mal conservés, qu'il est impossible de leur assigner une place déterminée. Mais si les caractères zoologiques manquent entièrement pour déterminer l'âge de ces roches, il existe entre elles et celles des terrains de transition les mieux caractérisés une ressemblance si frappante, que l'on ne peut hésiter à les rapporter à la même époque. Les grès, soit qu'on les prenne dans la province de Minas-Géraës ou dans celle de San-Paulo, c'est-à-dire à une distance de plus de 300 lieues, sont partout identiques à ceux de Lima : les phyllades qui alternent avec eux; la présence des psammites bitumineux et celle de l'ampélite; enfin, la grande analogie de ces roches avec celles recueillies dans le haut Pérou par MM. Pentland et d'Orbigny, et dans lesquelles on trouve des térébratules et des astrées, tout concourt à leur assigner une place dans la partie inférieure du terrain de transition.

TERRAIN TERTIAIRE.

A partir du terrain de transition, on ne rencontre dans la partie australe du Brésil aucun représentant des nombreuses formations qui se sont succédé depuis ce terrain jusqu'à la période tertiaire, et, s'il en existe quelques traces, elles doivent se trouver plus à l'O. peut-être dans le bassin du Paraguay, autant du moins que l'on peut en juger d'après quelques échantillons de gypse et de soufre qui proviennent de cette contrée. Les roches tertiaires se montrent seules, formant de petits bassins placés à une grande distance les uns des autres, reposant tantôt sur le terrain de transition, tantôt sur le gneiss. On les rencontre d'abord le long de la côte depuis Bahia jusqu'à Rio-de-Janeiro, où elles occupent de petits golfes placés dans le voi-

sinage des principaux fleuves, tels que le Rio-da-Caxoeira, le Rio-Doce et la Parahyba; puis dans l'intérieur des terres, où elles forment deux petits bassins très-rapprochés : l'un, près des sources de la Parahyba, l'autre dans les environs de San-Paulo.

BASSIN DE BAHIA. (Fig. 6.)

Le bassin de Bahia est le plus remarquable de tous, tant par son étendue, que par la variété des roches que l'on y rencontre. Après avoir formé quelques îles, dont la plus grande, celle d'Itaparica, a près de six lieues de longueur sur deux ou trois de large, le terrain tertiaire s'étend dans le fond de la baie de San-Salvador, où il forme les plaines connues sous le nom de Recôncave; puis, franchissant le Rio-da-Cachoëra, il s'étend au S. jusqu'au Rio-de-Contas, dans tout l'intervalle compris entre la mer et les plateaux qui terminent le terrain de transition. Les couches que l'on y rencontre peuvent se diviser en deux groupes : les unes, voisines de la côte, renferment, des débris d'animaux marins et occupent la partie inférieure; les autres, appartenant à une formation d'eau douce, se montrent dans le fond de la baie entre le Rio de San-Amaro et Cachoëra. Des grès argilifères gris verdâtre, à grain plus ou moins fin, et renfermant un grand nombre de coquilles, parmi lesquelles on remarque surtout des peignes, des cythérées et des huîtres, constituent, avec quelques couches subordonnées de sable quartzeux, la partie inférieure. Ces grès, qui ont la plus grande ressemblance avec ceux qui se montrent sur la côte du Chili, près de la Conception, forment à eux seuls toute l'île d'Itaparica, l'île de Mare et le petit archipel qui se trouve dans le fond de la baie, quelques lieues avant San-Francisco. On les voit encore auprès de Bahia composant la petite butte de Mont-Sarrate; ils sont en couches inclinées et reposent sur un conglomérat de roches cristallines, parmi lesquelles on remarque une grande quantité de diorite sans délit, en fragments

roulés et ressemblant au premier coup d'œil à des galets de basalte.

En remontant la rivière de Santo-Amaro, on voit ces grès s'abaisser successivement, et ils sont bientôt remplacés par une couche d'argile jaunâtre qui disparaît un peu plus loin sous des marnes noirâtres que les habitants nomment *massapé*. Ces marnes forment la partie inférieure du terrain d'eau douce et supportent des couches de marnolite jaune ou verdâtre, se délitant en fragments conchoïdaux et entièrement semblables à celles du bassin de la Limagne. Elles renferment quelques couches de calcaire marneux, et l'ensemble de ces deux roches forme de petits plateaux élevés de 150 à 200 mètres au-dessus de la plaine, dans tout l'intervalle compris entre la rivière de Santo-Amaro et le Rio-da-Cachoëra, où ils s'appuient contre les couches redressées du terrain de transition; ils reparaissent de l'autre côté du Rio-da-Cachoëra, se prolongeant au S. jusqu'auprès du Rio-de-Contas, et présentent sur quelques points des couches subordonnées de lignite.

BASSIN DE SAN-PAULO. (Fig. 7.)

Le terrain d'eau douce qui se montre dans les environs de San-Paulo occupe un petit bassin à peu près triangulaire, compris entre la Cordilière maritime et la Serra-da-Mantiqueira. Il forme d'abord une plaine assez élevée recouverte par des marais tourbeux où le Tiété prend sa source; puis, coupée de plus en plus profondément par le lit de cette rivière, elle se divise en deux parties : l'une, s'étendant au pied de la Mantiqueira; l'autre, à la base de la Cordilière maritime, jusque dans les environs de la Penha, où elle se termine par des escarpements de 60 à 80 mètres, pour donner passage à une petite rivière qui coule au bas de San-Paulo; enfin, un troisième lambeau forme les plateaux qui supportent cette ville et s'étend au S. O. Le point le plus convenable pour étudier la composition de ce terrain est le

plateau même de San-Paulo. A la partie inférieure, et jusqu'au-dessous des eaux de la rivière, on voit une argile très-fine, fortement colorée en jaune par de l'hydrate de fer : elle supporte des argiles panachées rouges et vertes, alternant avec des couches subordonnées d'un grès manganésifère, et dont l'épaisseur varie de 15 à 20 mètres. Ces argiles supportent une puissante assise de grès argilifère, friable et d'un blanc verdâtre; il passe sur quelques points à un conglomérat en grande partie formé par des fragments arrondis de quartzite, et se trouve recouvert par un grès ferrugineux rouge renfermant à sa partie supérieure des géodes de limonite. Ce grès, dont l'épaisseur est extrêmement variable, forme presque partout la surface des plateaux et passe sur quelques points à une argile rouge également très-chargée d'oligiste. Les couches de ce terrain sont partout horizontales; je n'y ai rencontré aucune trace de calcaires ni de restes organiques, malgré tout le soin que j'ai pu mettre à leur recherche.

BASSIN DE LA PARAHYBA.

Le bassin tertiaire de la Parahyba occupe également une dépression comprise entre la Serra-da-Mantiqueira et la Cordilière maritime; il est traversé par cette rivière dans toute sa longueur et s'étend depuis Jacarahi jusqu'à Areïas, sur un espace d'environ 35 lieues. Sa forme est celle d'une ellipse fortement allongée, dont le petit axe n'a pas plus de 6 lieues. Les couches que l'on y rencontre présentent la plus grande analogie avec celles de San-Paulo; seulement, les grès ferrugineux supérieurs manquent entièrement et se trouvent remplacés par des argiles rouges qui alternent avec des galets de quartzite. A l'exception de ces dernières couches, qui sont fort irrégulières, les autres présentent une horizontalité remarquable, puisque entre Jacarahi et Areïas, séparés par une distance de plus de 30 lieues, la différence de niveau que l'on observe ne dépasse pas 50 mètres.

DILUVIUM.

Ce terrain se montre au N. et au S. du grand massif formé par les roches primordiales. Dans les environs de Bahia, il recouvre la surface des Taboleiros et se compose d'un sable quartzeux rougeâtre, quelquefois agglutiné par de l'oxyde de fer, qui lui donne une ressemblance complète avec les grès de San-Paulo; il alterne avec des galets, parmi lesquels le quartzite à gros grain et le quartz compacte forment les deux espèces dominantes : elles sont associées à des grès de transition, à des jaspes et à des diorites sans délit. Près de Bahia, sur le petit plateau qui s'étend entre Bora-Fina et Mont-Sarrate, on peut voir ses rapports avec le terrain tertiaire, dont il remplit les dépressions laissées par l'inclinaison des couches ; il forme partout des couches horizontales qui dominent les vallées actuelles, et comprend la majeure partie des cascalhos diamantifères : je dis la majeure partie, parce qu'un grand nombre de ces cascalhos ne sont autre chose que des alluvions modernes élevées de quelques mètres seulement au-dessus du lit des rivières. Dans le S. il se présente sous un tout autre aspect, et offre la plus grande ressemblance avec le diluvium du bassin de Paris. Comme lui, il se compose d'une argile sableuse rougeâtre enveloppant des masses de silex : c'est ainsi qu'il se montre à la surface des calcaires avec silex du terrain de transition, d'abord dans les plaines du Tiété, qui sont dominées par ces mêmes calcaires, puis dans celles du Parana, d'où il paraît s'étendre jusqu'aux Pampas. Enfin, les grès supérieurs de San-Paulo et les argiles de la Parahyba ont trop de ressemblance avec le diluvium du N. pour qu'on ne doive pas les rapporter à la même époque, et, s'ils paraissent ici continuer le terrain tertiaire , cela tient uniquement à l'horizontalité des couches de ce terrain.

Il résulte des faits précédents, que les divers terrains de la

partie australe du Brésil se rapportent à quatre époques différentes, qui sont, en partant des plus anciennes :

1° L'époque primitive, comprenant l'étage du gneiss et celui des talcites phylladiformes;

2° Le terrain de transition;

3° Le terrain tertiaire;

4° Le diluvium.

L'étage du gneiss comprend trois formations superposées dans l'ordre suivant : les gneiss porphyroïdes, passant au granit dans leur partie inférieure; le leptinite granatique, ou le gneiss leptinoïde; et les gneiss métallifères renfermant des couches subordonnées de quartzite.

L'étage des talcites phylladiformes, dans les parties où il est le plus développé, en présente sept, qui sont, en partant de la partie inférieure : les quartzites talcifères immédiatement en contact avec le gneiss; les talcites phylladiformes inférieurs, les quartzites talcifères moyens, les calcaires talcifères, l'itabirite, les talcites phylladiformes supérieurs, et enfin les quartzites pseudo-fragmentaires, qui sont peut-être des roches conglomérées, et se rapporteraient alors à la partie inférieure du terrain de transition.

Le terrain de transition se rapporte à l'étage ampélitique ou formation silurienne. Il comprend deux formations : celle des grès et psammites, existant seule dans la partie septentrionale, et celle des calcaires avec silex, renfermant des couches subordonnées de schiste bitumineux; cette dernière repose sur les grès et se montre dans le S. occupant l'intervalle compris entre la Serra-do-Mar et le Parana.

Les terrains tertiaires se divisent en formations marines, qui se montrent près de la côte, où elles occupent le fond de petits golfes entre Bahia et Rio-de-Janeiro, et en formations lacustres, placées dans l'intérieur des terres entre la chaîne de la Mantiqueira et la Cordilière maritime.

Enfin, le diluvium recouvre les plateaux inférieurs de la pro-

vince de Bahia et les plaines du haut Parana, où il est en grande partie formé des débris des roches qui dominent ces plaines.

DÉTERMINATION DES GRANDS MOUVEMENTS DU SOL

QUI ONT EU LIEU DANS LA PARTIE AUSTRALE DU BRÉSIL, DEPUIS L'ÉPOQUE DES TERRAINS DE TRANSITION JUSQU'AUX TEMPS ACTUELS.

Le sol de la partie australe du Brésil présente trois arêtes, trois grandes lignes saillantes auxquelles viennent se rattacher les divers groupes de montagnes que l'on rencontre depuis la côte jusqu'au lit du Parana ou du San-Francisco. La plus orientale, qui est aussi la moins élevée, s'étend depuis l'embouchure de la Parahyba jusqu'au Rio de la Plata, courant ainsi du N. E. au S. O. C'est à elle que se rattachent les divers groupes dont l'ensemble constitue la Cordilière maritime (Serra-do-Mar); le terrain qui s'étend au N. O. de cette première ligne, au lieu de se terminer par des pentes rapides comme cela a lieu du côté de la mer, se maintient jusqu'à une assez grande distance au même niveau que l'arête principale et va ensuite s'abaissant graduellement depuis 1,000 jusqu'à 600 mètres, de telle sorte que sa forme, abstraction faite des inégalités secondaires, est celle d'un vaste plateau légèrement incliné au N. O. La seconde arête, qui porte dans sa plus grande étendue le nom de Serra-da-Mantiqueira, se montre derrière ce plateau, dont elle est séparée par des pentes rapides; elle se maintient à un niveau de 1,100 à 1,200 mètres, courant, comme la Cordilière maritime, du N. E. au S. O. et formant au N. O. un second plateau qui s'étend jusqu'au Parana. La troisième ligne est beaucoup plus irrégulière : les groupes qui la composent ne forment plus, comme dans les deux lignes précédentes, de petites chaînes placées en arrière ou sur le prolongement les unes des autres; ils affectent au contraire deux directions dif-

férentes, l'une parallèle à l'arête principale, l'autre de l'E. à l'O. qui coupe conséquemment la première sous des angles de 40° à 50°. Les points où cette dernière direction vient rencontrer l'arête médiane sont presque toujours signalés par un massif ou un pic très-élevé, tels que l'Itacolumi, la Serra-da-Caraça, le Morro-d'Itambé, dont les hauteurs sont comprises entre 1,800 et 1,900 mètres, tandis que celles des lignes de faîte auxquelles ils se rattachent dépassent rarement 1,500 mètres. Cet aperçu rapide conduit naturellement à séparer en deux classes les divers groupes de montagnes qui se rattachent aux trois grandes lignes précédentes, les uns dirigés du N. E. au S. O. et sensiblement parallèles à ces lignes, et les autres courant de l'E. à l'O. Cette première division, établie sur le relief du sol, va se trouver confirmée par la position des couches qui composent ces montagnes.

DIRECTION ET INCLINAISON DES COUCHES.

J'ai pensé qu'il serait fastidieux de rapporter toutes ces observations, qui s'élèvent à plus de trois cents, et qu'il suffisait de reproduire celles qui offrent le plus d'intérêt, celles qui, appartenant à des points séparés par une assez grande distance, établissent des rapports entre les parties éloignées d'un même groupe ou entre des groupes différents; et afin que ces rapports fussent plus facilement saisis, je les ai disposés dans le tableau suivant, qui renferme quatre colonnes où se trouvent successivement inscrits les noms des localités où les observations ont été faites, les directions des couches, le côté où elles plongent et l'angle qu'elles font avec le plan horizontal; enfin, les roches cristallines non stratifiées qui se montrent dans ces localités, et dont la présence paraît se trouver en rapport avec des changements observés dans les directions.

DIRECTION ET INCLINAISON DES COUCHES

DANS LES PRINCIPALES CHAÎNES ET LES DIVERSES FORMATIONS.

LOCALITÉS.	ANGLE DES COUCHES avec le méridien.	CÔTÉ où elles plongent.	ROCHES CRISTALLINES non stratifiées.
ÉTAGE DU GNEISS.			
CORDILIÈRE MARITIME.			
GROUPE DES ORGÂOS.			
Serra-de-Goïtacazas	N. 50° E.	S. de 30 à 50°.	
Idem milieu	N. 35 E.	S. de 30 à 80.	
Morro-Queimado	N. 65 E.	N. de 25 à 40.	Diorite.
Registo	N. 40 E.	N.	
Aiguilles des Orgâos	N. 75 E.	S.	
Idem	N. 60 E.	S.	
Habitation de M. March	N. 80 E.	S.	
Extrémité occidentale	N. 50 E.	N.	
Magé	N. 65 E.	N.	Diorite.
Serra-da-Estrella (sommet)	N. 55 E.	N. de 40 à 60.	
Pampulha	N. 55 E.	N. de 30 à 40.	
Parahyba (en face la ville)	N. 80 E.	90°.	Diorite.
GROUPE DU CORCOVADO.			
Corcovado (sommet)	N. 75 E.	N. de 70 à 80.	Granite à grain fin.
Paineira	N. 80 E.	*Idem.*	
Col de la Tijuca	N. 85 E.	"	Diorite.
SERRA D'UBATUBA.			
Angra-dos-Reis	N. 50 E.	90°.	Granite à grain fin.
En face d'Ubatuba	N. 50 E.	N. de 60 à 90.	
Sommet	N. 50 E.	N. de 50 à 80.	
Sources de la Parahybuna	N. 55 E.	"	
SERRA-DO-CUBATÂO.			
Sommet	N. 50 E.	N. de 30 à 70.	
Rio-das-Pedras	N. 50 E.	N. de 30 à 80.	

LOCALITÉS.	ANGLE DES COUCHES avec le méridien.	CÔTÉ où elles plongent.	ROCHES CRISTALLINES non stratifiées.
SERRA-DA-MANTIQUEIRA.			
Parahybuna	N. 60° E.	90°.	
Entre Morros	N. 55 E.	N. de 40 à 60°.	
Rancho-da-Mantiqueira	N. 65 E.	S. 40°.	Diorite.
Serra-de-San-Geraldo	N. 50 E.	//	
Nacimento	N. 55 E.	N. 30.	
Barbacéna	N. 45 E.	N. 70.	
Aldea-de-San-Luiz	N. 50 E.	N. 40.	
Serra-da-Cantareira	N. 40 E.	N. 80.	Granite à grain fin.
Cutia	N. 55 E.	S. 70.	
Chaine entre San-Roc et Sorocaba	N. 50 E.	N. 60.	Granite à grain fin.
Una	N. 50 E.	S. 45.	
ETAGE DES TALCITES PHYLLADIFORMES.			
Serra-de-Deos-te-Livre	N. 90° E.	N. 80°.	Diorite.
SERRA-DO-ITACOLUMI.			
Pic	N. 50 E.	S. 15.	
En face de Mariana	N. 80 E.	S. de 30 à 35°.	
Extrémité orientale	N. 75 E.	S. 50°.	Diorite.
Serra-da-Caxoeira	N. 90 E.	S. de 30 à 50.	Diorite.
Serra-da-Caraça	N. 55 E.	N.	
SERRA-DO-GONGO-SOCCO.			
Extrémité occidentale	N. 60 E.	S. de 40 à 50.	
Extrémité orientale	N. 90 E.	S. de 25 à 40.	Diorite.
SERRA-DA-PIEDADE.			
Près Sabara	N. 60 E.	S. de 40 à 50.	
Près Cocaës	N. 90 E.	S. de 25 à 40.	Diorite.
SERRA-DOS-VERTENTES.			
Extrémité occidentale	N. 90 E.	N.	
Pic d'Itabira	N. 60 E.	N. de 25 à 40.	
Entre San-Roc et Sorocaba	N. 50 E.	N. de 60 à 70.	

LOCALITÉS.	ANGLE DES COUCHES avec le méridien.	CÔTÉ où elles plongent.	ROCHES CRISTALLINES non stratifiées.
ETAGE DES TALCITES PHYLLADIFORMES. (Suite.)			
Sorocaba	N. 90° E.	S.	Diorite.
Chapelle de San-Francisco	N. 55 E.	//	
Pic du Jaragua	N. 05 E.	N. de 70 à 80°.	
TERRAIN DE TRANSITION.			
Plateaux de Santo-Amaro, province de Bahia	N. 90° E.	N. de 10 à 15°.	
Montagne Arasoïaba, province de Saint-Paul	N. 90 E.	N. de 0 à 30.	Diorite.
Porto-Félix	N. 90 E.	S. de 0 à 10.	Diorite.
Pirapora	N. 80 E.	S. de 0 à 5.	Sélagite.
Tatui, direction des plateaux	N. 90 E.	//	Diorite.
Le Cerrote	N. 90 E.	//	Diorite.
TERRAIN TERTIAIRE.			
BASSIN DE BAHIA.			
Fort de Mont-Sarrate	N. 15° E.	E. de 0 à 10°.	
Ile do Mar	N. 20 E.	E. de 10 à 15.	
Ile d'Itaparica	N. 15 E.	O. de 0 à 5.	

Le premier fait qui résulte de l'examen comparatif des directions rapportées dans le tableau précédent, c'est leur tendance à se rapprocher d'une ligne courant de l'E. à l'O. dont elles ne s'écartent jamais de plus de 75°. Toutefois, cette différence de 75° entre les directions extrêmes est encore beaucoup trop grande pour qu'on puisse les rapporter toutes à une même époque de soulèvement. Mais si, au lieu de les considérer en masse, on les examine dans chaque formation en particulier, ainsi qu'elles se trouvent disposées dans le tableau, l'on arrive à des résultats bien

plus satisfaisants, surtout si l'on procède des formations les plus récentes aux plus anciennes, parce qu'alors chaque mouvement du sol se trouvant ainsi isolé, il devient beaucoup plus facile de déterminer la direction suivant laquelle il s'est manifesté; et l'on n'a plus à résoudre, si je puis m'exprimer ainsi, qu'une série d'équations dont les inconnues deviennent successivement plus nombreuses, mais pour lesquelles on possède déjà les données suffisantes. La formation tertiaire n'offre qu'une seule localité où les couches se montrent sensiblement inclinées : c'est le bassin de Bahia; et ses trois directions observées ne diffèrent pas de 5°, ce qui indique un premier soulèvement dont la direction moyenne serait du N. 17° E. au S. 17° O. L'horizontalité presque générale des couches, leur peu d'élévation au-dessus de la mer, indiquent d'ailleurs que ce mouvement ne s'est pas manifesté sur une grande étendue ni avec beaucoup de puissance.

Dans le terrain de transition, les couches, généralement horizontales, se présentent cependant inclinées sur quelques points, ou bien quelques parties, conservant leur position sensiblement horizontale, se trouvent portées subitement à un niveau beaucoup plus élevé que les couches voisines. Dans les points où l'inclinaison est assez sensible, la direction se rapproche toujours beaucoup de la ligne E. O. Le plus grand écart des observations rapportées dans le tableau est de 10°, et la moyenne de l'E. 2° N. à l'O. 2° S. Cette moyenne, que l'on peut, sans erreur sensible, confondre avec la ligne E. O. s'observe, non-seulement dans la direction des couches, mais encore dans celle de la petite chaîne qui porte le nom de Cerotte et s'étend entre le Tiété et le Parana-Panéma, présentant une longue suite de plateaux placés sur deux ou trois lignes parallèles, dont le sommet se trouve occupé par des couches calcaires identiques avec celles qui forment la surface des plaines qu'ils dominent; et c'est encore la même direction que suivent les espèces de boutonnières par où se sont épanchés les diorites et les sélagites. Ces roches se montrent toujours au voisinage des couches redressées, dont elles empâtent

souvent des fragments, ou qu'elles ont modifiées à leur point de contact, ainsi que cela peut s'observer près de Pirapora, à quelques lieues à l'O. de Porto-Félix, où les grès qui supportent le sélagite sont devenus beaucoup plus durs, se rapprochant de la structure jaspoïde; ou bien encore dans le voisinage de Tatui, à la cascade d'Antonio-Dias-de-Toledo, où le diorite s'est étendu comme une lave à la surface des calcaires qu'il a transformés, jusqu'à une distance de 8 ou 10 décimètres du point de contact, en calcaire noir compacte traversé de veines cristallines. Ce second soulèvement se trouve donc avoir une relation immédiate avec l'émission des diorites; ce qui le distingue de suite de celui dont le terrain tertiaire offre des traces, mouvement postérieur à ces mêmes diorites que l'on rencontre en fragments roulés dans les conglomérats de Mont-Sarrate, et dont la direction diffère d'ailleurs beaucoup trop de celle des couches du terrain de transition, pour que l'on ne soit pas, d'après cette seule circonstance, autorisé à les séparer.

Les roches cristallines ne m'ont jamais présenté de couches à peu près horizontales; elles sont toujours fortement redressées, ce qui permet d'en mesurer très-exactement les directions. Celles qui se trouvent rapportées dans le tableau, comme toutes celles que j'ai pu observer, ne s'écartent jamais de 50° de la ligne E. O. Si l'on considère particulièrement celles qui ont été observées au voisinage des diorites, on voit que leur écart de cette ligne ne dépasse pas 25°, et que leur direction moyenne est de l'E. 10° N. à l'O. 10° S. un peu plus inclinée vers le méridien que celle que l'on observe dans le terrain de transition, comme si, antérieurement à ce soulèvement, les couches avaient déjà présenté une certaine inclinaison et une direction tendant vers le N. Or, cette direction, nous la retrouvons dans toutes les couches éloignées des diorites et dans les granites à grains fins qui se montrent, soit à la base de la Cordilière maritime, soit sur toute la ligne du faîte de la chaîne qui s'étend des bords du Tiété jusqu'à la ville d'Una. En mettant de côté quelques directions trop rapprochées

de la ligne E. O. et qui peut-être sont dues à des diorites inaperçus, les autres oscillent entre l'E. 35° N. et l'E. 50° N. et donnent une direction moyenne de l'E. 38° N. à l'O. 38° S. pour ce troisième soulèvement antérieur aux diorites, puisqu'il n'a point affecté les couches du terrain de transition, et probablement de la même époque que l'émission des granites à grain fin, dont les filons les plus considérables suivent la même direction, et dans lesquels on observe souvent des fragments de gneiss ou de leptinite.

On doit donc rapporter à trois époques différentes les divers soulèvements dont on trouve des traces dans la partie australe du Brésil. Le plus ancien ayant redressé, suivant des lignes courant E. 38° N. à O. 38° S., les couches des gneiss et des talcites phylladiformes, correspondrait au système du hundsrück ou au plus ancien redressement, reconnu par M. E. de Beaumont; mais il se distinguerait surtout de celui observé en Europe en ce que les roches redressées sont uniquement des roches cristallines, à moins que l'on ne voulût regarder les quartzites pseudo-fragmentaires et quelques talcites phylladiformes comme des roches de sédiment, qui, dans ce cas, représenteraient la partie la plus ancienne du terrain de transition.

Le deuxième soulèvement aurait eu lieu suivant la direction E. O. Il correspond à la fin du terrain de transition, et se trouve caractérisé par l'arrivée à la surface de roches amphiboliques qui se sont épanchées sur ce terrain à la manière des laves ou formant de longues lignes de collines dirigées de l'E. à l'O. On le reconnaît, non-seulement dans les parties occupées par le terrain de transition, mais encore dans beaucoup de chaînes uniquement formées de roches cristallines, telles que le massif du Corcovado, près Rio-de-Janeiro, la Serra-dos-Orgâos, l'Itacolumi, et la plupart des chaînes les plus élevées de la province de Minas-Géraës, celle, entre autres, qui sépare les eaux du San-Francisco et celles du Parana.

Enfin, le troisième soulèvement aurait eu lieu vers la fin du

dépôt tertiaire, dont il a redressé les couches ; il s'est étendu du N. 17° E. au S. 17° O. ce qui doit le faire rapporter au système des Alpes occidentales, et placerait le terrain lacustre de Santo-Amaro sur la même ligne que celui de la Limagne, auquel il ressemble par tant de caractères.

CONCLUSIONS.

Si, à l'aide des faits qui ont été exposés dans les deux parties de ce mémoire, l'on cherche à remonter aux époques les plus reculées des temps géologiques, on voit d'abord les roches cristallines qui se montrent dans la partie australe du Brésil former, avant l'existence du terrain silurien, une île assez considérable, dont la forme était celle d'une ellipse allongée ayant son grand axe dirigé du N. E au S. O. et qui s'étendait entre le 16e et le 27e degré de latitude australe. Elle était traversée dans toute sa longueur par des chaînes de montagnes parallèles au grand axe et offrant un relief analogue à celui que présente aujourd'hui l'intervalle compris entre la mer et la Serra-da-Mantiqueira. Déjà des granits à grain fin s'étaient épanchés à travers les larges fentes produites par le soulèvement des gneiss et des talcites, se frayant un passage tantôt à la base des montagnes, tantôt à la partie australe, où ils se montrent en puissants filons, dirigés suivant l'axe des plus hautes chaînes.

Après l'émission de ces granits, qui paraît se rapporter aux premières révolutions du globe, le continent, ou plutôt l'île brésilienne, jouit d'un long période de repos, pendant lequel les couches du terrain silurien se déposèrent dans les mers occidentales sur l'emplacement occupé aujourd'hui par les vastes plaines du San-Francisco et du Parana. Quelques êtres vivants laissaient leurs dépouilles dans la partie supérieure de ces couches, caractérisées par la présence du calcaire et de puissants dépôts de silice gélatineuse, lorsqu'une seconde révolution vient subitement interrompre la suite de ces phénomènes. Les couches du terrain

silurien sont soulevées sur quelques points à une hauteur de 1,000 à 1,100 mètres au-dessus du niveau des mers. Les grandes dislocations qui ont lieu suivant des lignes dirigées de l'O. à l'E. se font sentir jusque sur les parties émergées des roches cristallines, impriment aux premières chaînes de montagnes un second mouvement, qui, ne pouvant changer leur direction, relève les lignes de faîte et leur donne une inclinaison générale du S. au N. tandis que, dans les intervalles qui les séparaient, se forment de nouvelles montagnes dirigées de l'E. à l'O. et dépassant souvent en hauteur les chaînes produites lors de l'émission des granits. C'est à cette époque qu'il faut rapporter les massifs les plus élevés de la Cordilière maritime, tels que la Serra-dos-Orgâos, la Sera-de-Panha, et les groupes isolés du Corcovado et du cap Frio; enfin, la plupart des hautes chaînes de la province de Minas-Géraës. Partout où ces mouvements du sol se font sentir, des diories s'échappent par de larges crevasses et s'étendent sur les roches stratifiées, dont elles modifient la composition ou la structure, changeant les calcaires argilifères en calcaires compactes ou saccharoïdes, les gneiss qui se trouvent au contact en diorites stratiformes, et formant, au milieu des plaines occupées par les grès du terrain silurien, de longues files de collines courant de l'E. à l'O.

Le résultat de ces puissantes perturbations fut un accroissement considérable de la partie émergée; la mer fut repoussée beaucoup plus loin vers le N. et l'O. et la partie australe du Brésil offrit dès cette époque une configuration fort analogue à celle qu'elle présente aujourd'hui. En effet, le massif central de la province de Minas-Géraës existait déjà ; il en était de même de la Serra-da-Mantiqueira et de la Cordilière maritime : les vallées longitudinales étaient donc les mêmes qu'aujourd'hui, et les eaux qui s'échappaient de ces hautes terres devaient, se réunissant suivant les mêmes lois générales, former des fleuves semblables dans leur direction à ceux qui arrosent encore ces contrées.

C'était à l'embouchure de ces fleuves que les débris arrachés

CARTE GÉOLOGIQUE

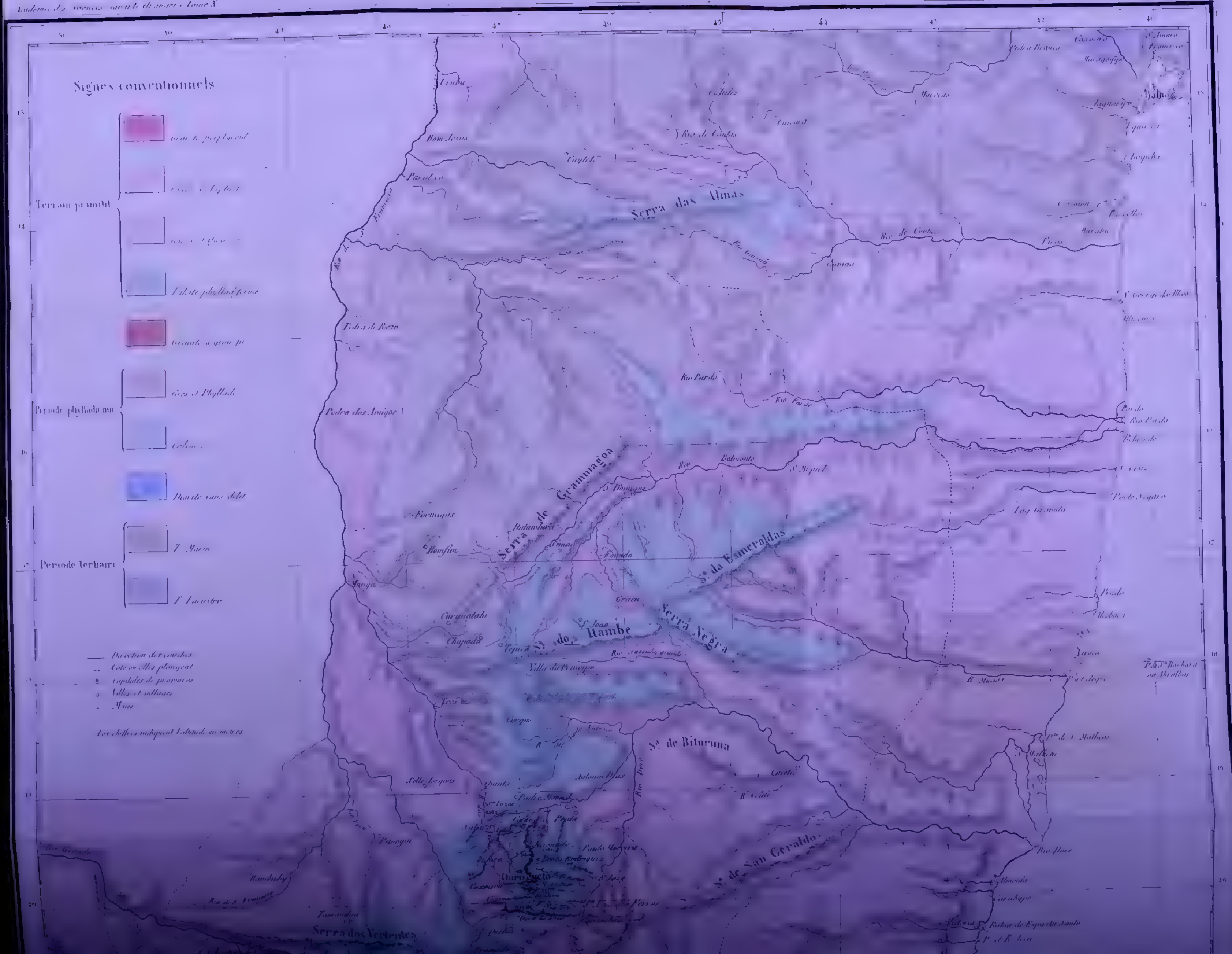
DES PROVINCES AUSTRALES

DU BRÉSIL

PAR A. PISSIS

1842.

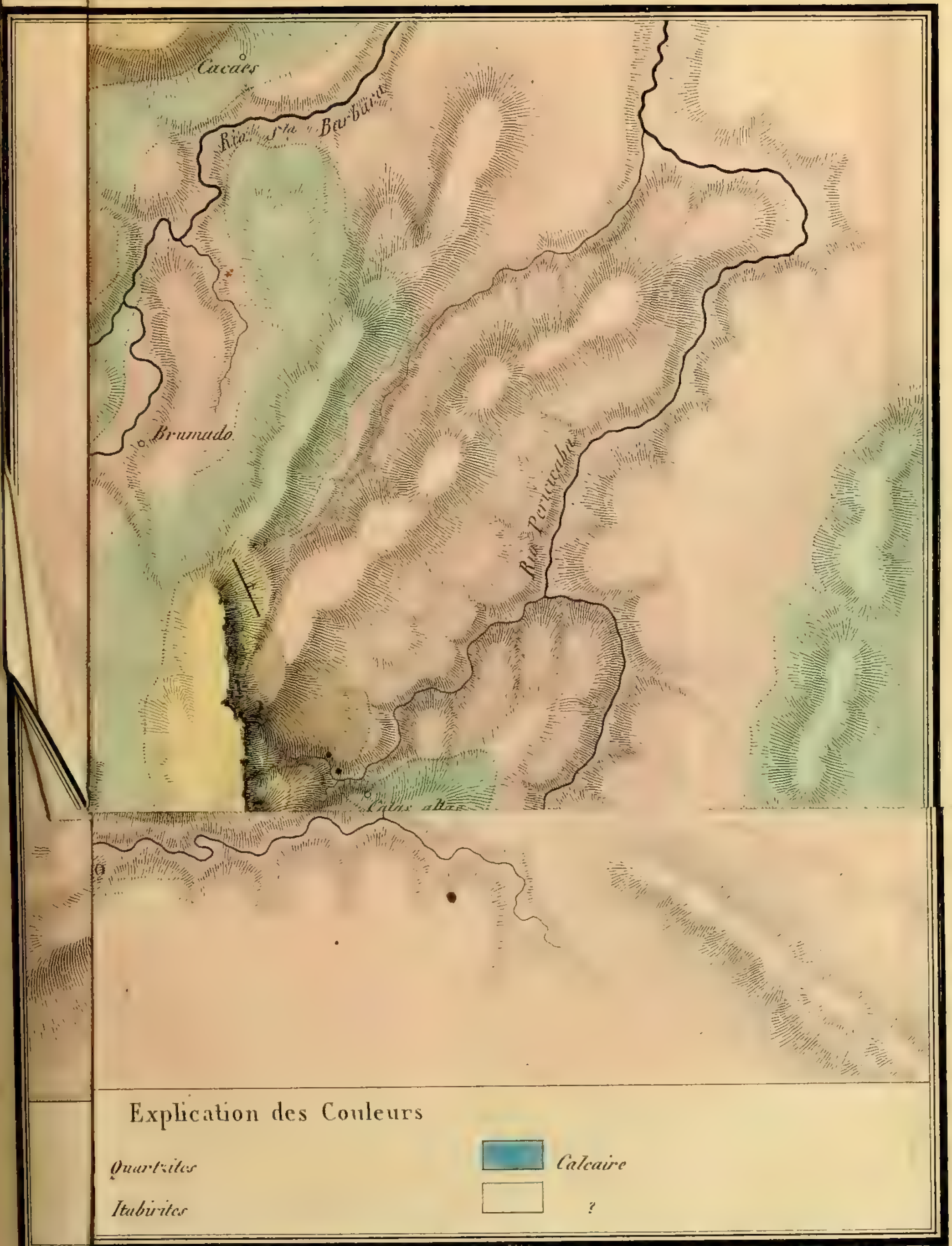
Echelle de 20 Myriamètres


Signes conventionnels.
Terrain primitif
Schiste phylladifère
Période phylladienne
Grès et Phyllade
Diorite sans délit
Période tertiaire
T. Marin
T. Lacustre
Villes et villages
Les chiffres indiquent l'altitude en mètres
Serra das Almas
Serra de Grammagoa
Sª da Esmeraldas
Serra Negra
Sª do Itambé
Sª de Bituruna
Sª de San Geraldo
Serra dos Vertentes
Bahia
Bom Jesus
Caytete
Rio de Contas
Pedra de Bezo
Pedra dos Amigos
Rio Pardo
Belmonte
S. Miguel
Porto Seguro
Formigas
Bomfim
Curmatahi
Chapadã
Tejuco
Villa do Principe
Antonio Dias
Ouro Preto
Rio Doce
Bambuhy

QUE

S GERAES.

Académ



A. Pissis

ESQUISSE GEOGNOSIQUE

DU TERRAIN AURIFERE DE MINAS GERAES.

Vallée de San Clemente

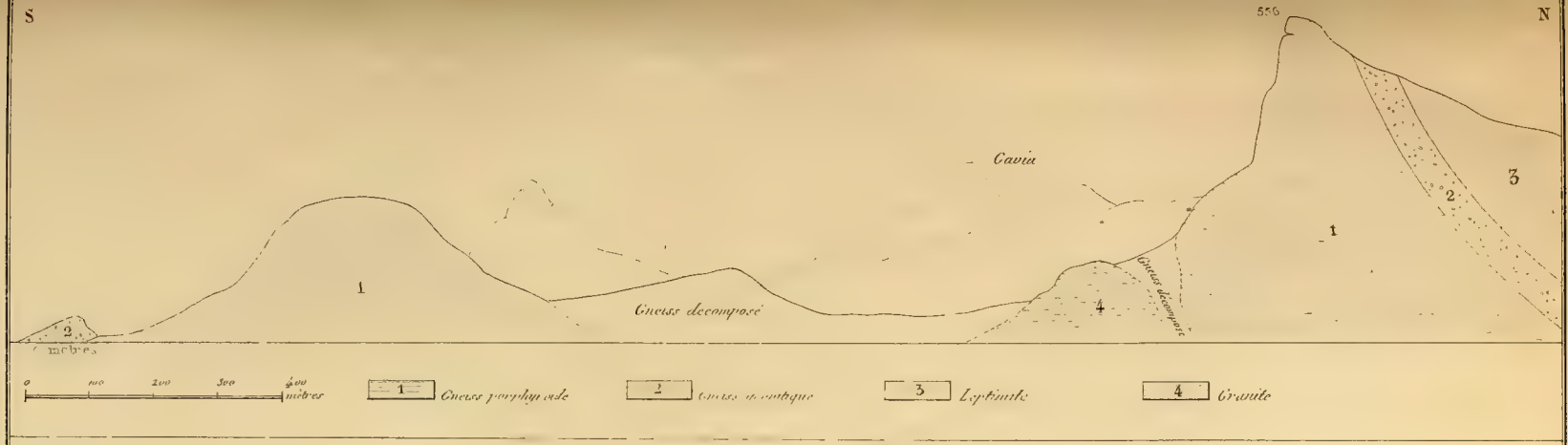
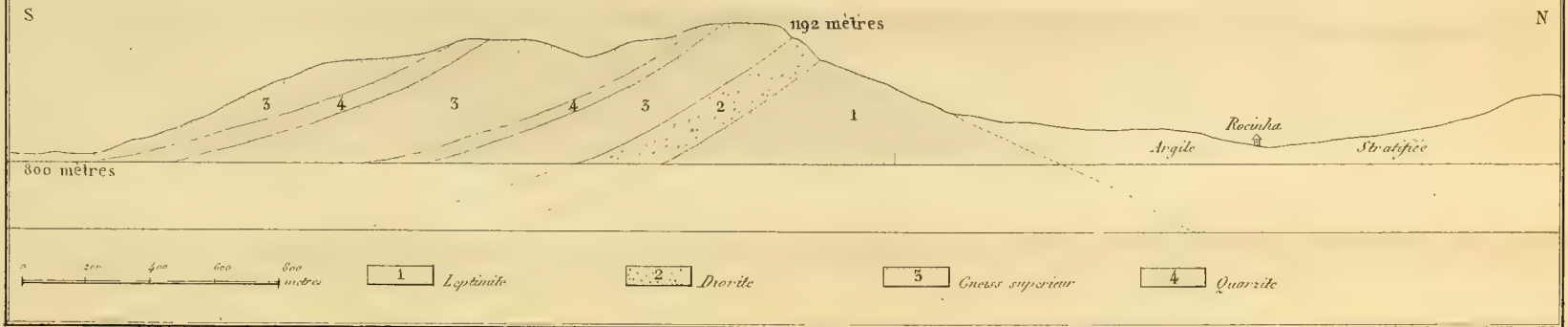
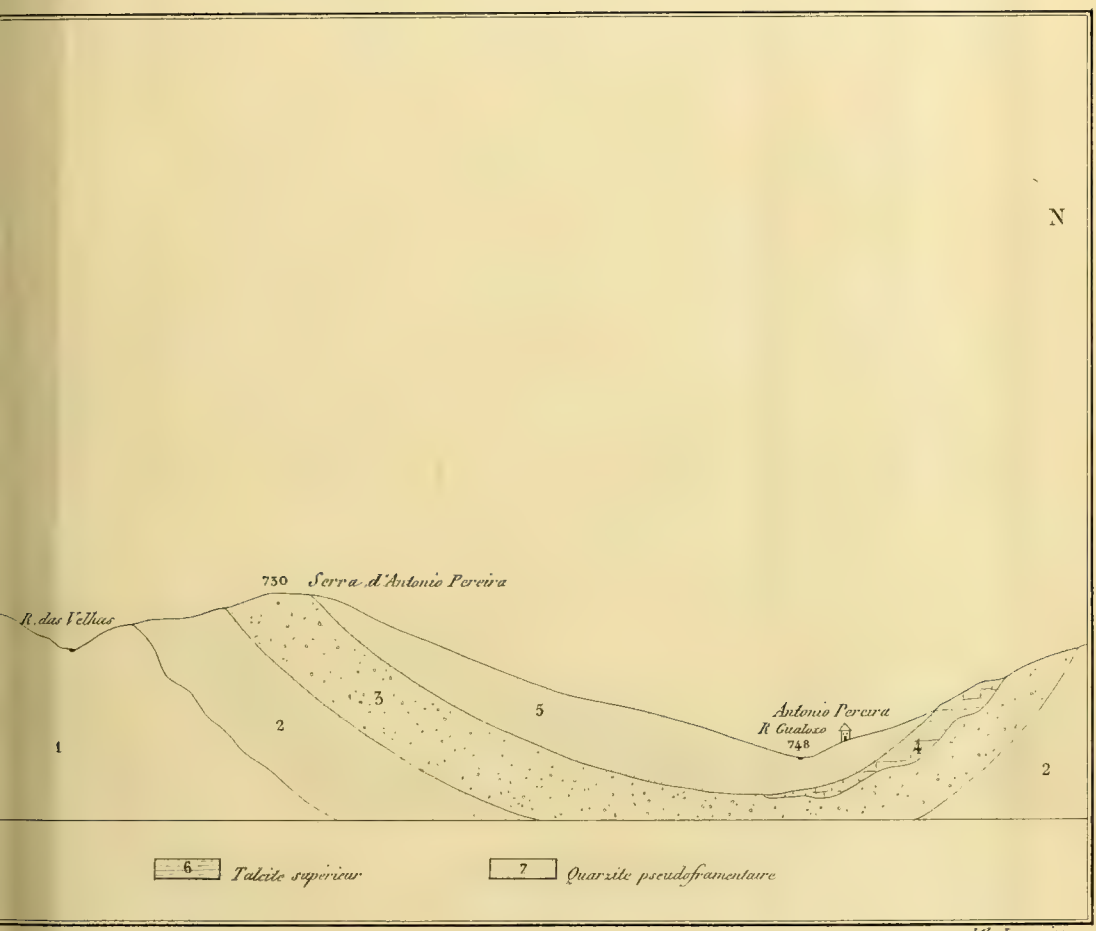


Fig. 2.

Chaine séparant les eaux du Parana de celles du San Francisco.



A. Picon lit. lith. Lemercier

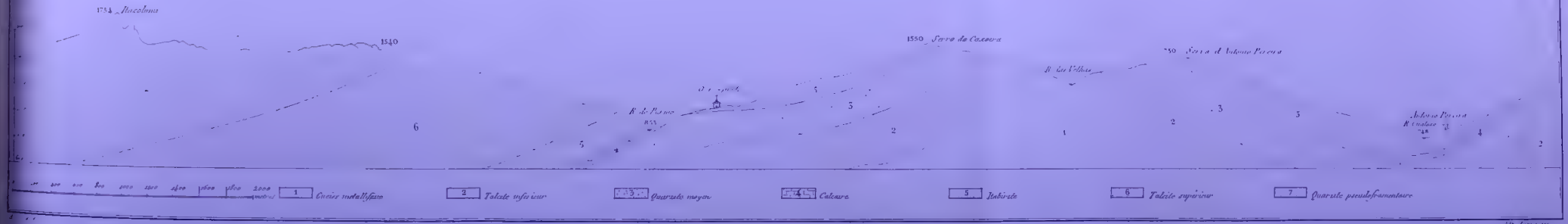


lith. Lemercier

Académie des Sciences savants étrangers tome X

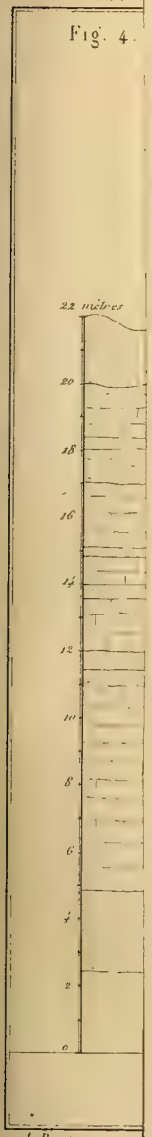
Fig. 5

Coupe du Sud au Nord depuis le pic de l'Itacolumi jusqu'à Antonio Pereira.



Académie des Sci

Fig. 4.



A. Prais

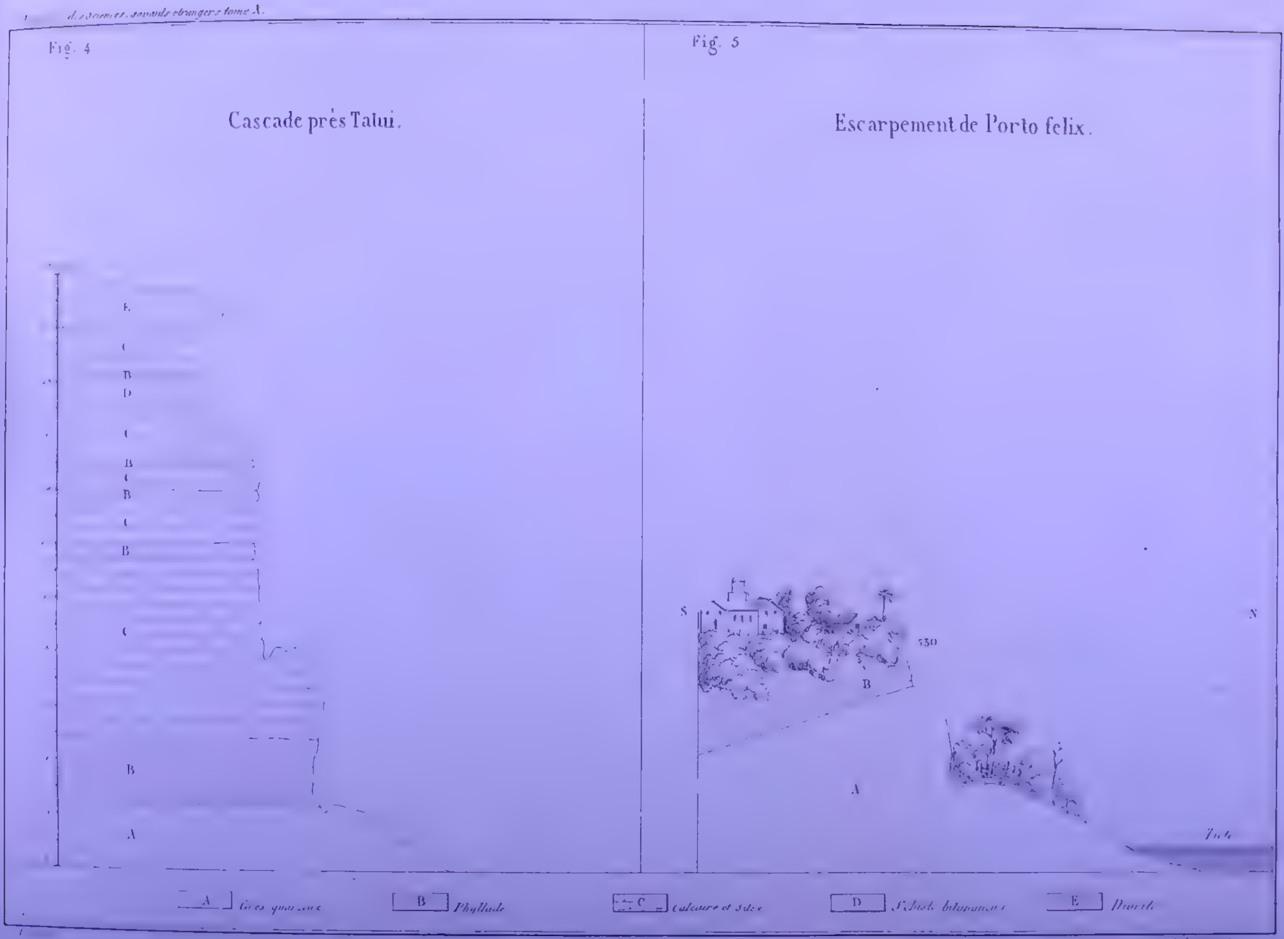


Fig. 4
Cascade près Talui.
E
B
D
B
B
B
B
A
Fig. 5
Escarpement de Porto felix.
S
N
B
A
A
B
Phyllade
C
Calcaire et silex
D
E

Academie des Science

Fig. 6.

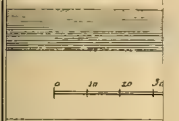
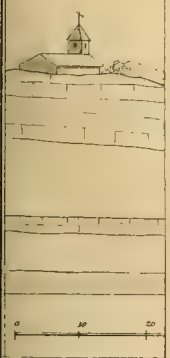


Fig. 7.



A Pâris del

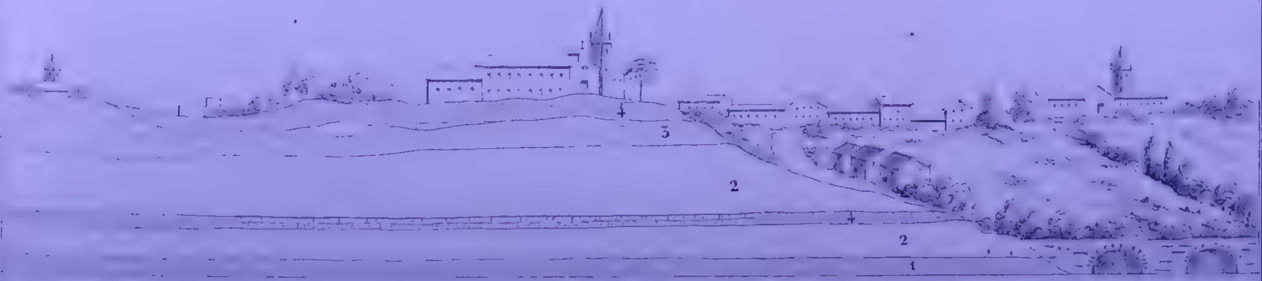
Fig. 6

Pointe de Mont Sarnate près Bahia.

mètres — 1 *Conglomerat* — 2 *Grès, vert, marin* — 3 *Argile jaune*

Fig. 7

Escarpement de St. Paul



mètres — 1 *Argile jaune* — 2 *Argile panachée* — 3 *Grès quartzeux* — 4 *Grès Ferrugineux*

CARTE DE LA PARTIE AUSTRALE DU

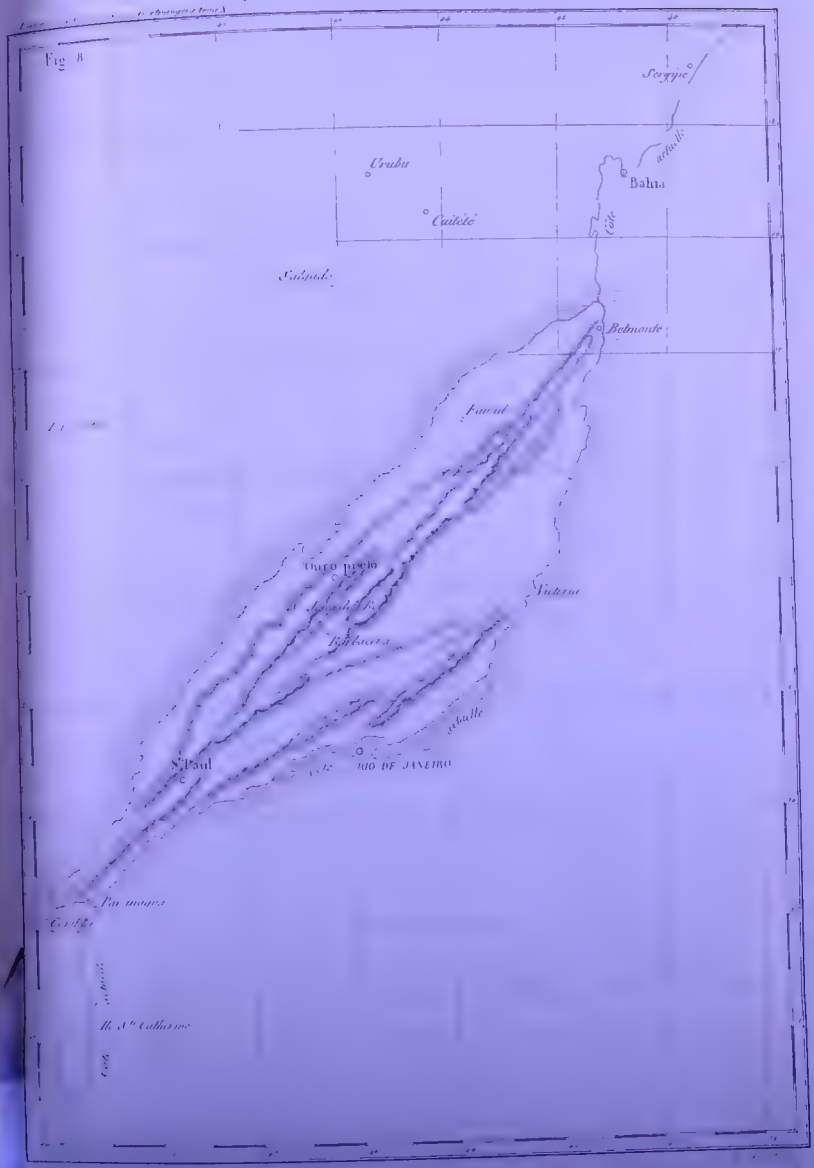
pendant le dépot du terrain silurie

...es des Sciences, Savants étrangers tome X.

Fig. 8.

CARTE DE LA PARTIE AUSTRALE DU BRESIL

pendant le dépot du terrain silurien



aux montagnes venaient former de vastes deltas qui empiétaient de plus en plus sur la mer, et dont quelques parties submergées furent soulevées à la fin de la période tertiaire, et leurs couches, dans lesquelles on retrouve un grand nombre de coquilles analogues à celles qui vivent encore dans les mêmes lieux, élevées de 150 à 200 mètres au-dessus du niveau de la mer. Ce mouvement, qui se propageait du N. 17 E. au S. 17° O. paraît s'être fait sentir également sur le terrain de transition qui occupe le S. de la province de Bahia, auquel il aurait imprimé une double pente vers la mer d'une part, et de l'autre vers le San-Francisco. Quoi qu'il en soit, cette révolution est la dernière qui ait laissé des traces dans le S. du Brésil; à partir de cette époque, l'on ne rencontre plus que des couches détritiques, sensiblement horizontales, et dont la surface se trouve interrompue par quelques vallées d'érosion. Ces couches semblent se lier à l'époque actuelle par des bassins tourbeux où l'on rencontre des végétaux identiques à ceux qui croissent encore à la surface, tels que des rubiacées se rapprochant du genre cœphaëlis, des ériocaulon et de cypéracées.

NOTE SUPPLÉMENTAIRE

AU CATALOGUE

DES ÉTOILES FILANTES

ET DES AUTRES MÉTÉORES OBSERVÉS EN CHINE;

PAR M. ÉD. BIOT.

Dans mon mémoire sur les apparitions de météores et d'étoiles filantes qui ont été notées depuis l'antiquité par les annales chinoises, j'ai fait remarquer que ce genre de phénomènes a été observé, avec une grande régularité, sous la dynastie Soung, qui a régné de l'an 960 à l'an 1275, et j'ai dressé le tableau du nombre de jours signalés par des apparitions dans chaque mois pendant les années comprises entre ces limites. Les résultats numériques auxquels je suis parvenu peuvent, je crois, être rendus plus sensibles, en combinant les observations dans un ordre indépendant de la plus ou moins grande longueur des mois.

Pour cela, je divise la durée de l'année solaire en groupes de 5 jours : j'obtiens ainsi 73 groupes, et je réunis le nombre des apparitions observées pour chaque groupe entre les années 960 et 1275. Je dispose ces 73 nombres sur la circonférence d'un cercle divisé en 73 parties ; puis, je les représente par des longueurs prises sur une échelle arbitraire et portées sur le prolongement des rayons. Je calcule les époques des solstices et des équinoxes pour l'année 1100, et je mène, du centre à la circonférence, les rayons correspondant à la position de ces quatre phases de l'année.

La figure, ainsi tracée, indique deux maxima évidents pour les nombres d'apparitions : l'un se rencontre entre le 18 et le 27 juillet juliens, l'autre entre le 11 et le 20 octobre, et leurs époques se trouvent ainsi nettement déterminées. La même figure fait ressortir un autre résultat numérique assez remarquable : elle montre que le nombre des apparitions est bien moins considérable dans la première moitié de l'année, du solstice d'hiver au solstice d'été, que dans la seconde moitié, pendant l'intervalle du solstice d'été au solstice d'hiver. Les longueurs qui représentent les nombres de chaque groupe sont en effet régulièrement plus faibles pour la première moitié que pour la seconde. Si, maintenant, on additionne les deux séries de nombres correspondant ainsi aux deux moitiés de l'année, on trouve, pour la première moitié, un total de 462 ; pour la seconde, un total de 1017, c'est-à-dire plus du double. Des résultats analogues s'obtiendraient encore quand on ne voudrait considérer que les années où les observations ont été les plus régulières, de l'an 1021 à l'an 1099. On reconnaîtrait deux maxima aux mêmes jours des mêmes mois, et encore une différence du simple au double entre les nombres des apparitions comprises dans l'une et l'autre moitié de l'année. La réalité de cette différence se trouve donc établie par la constance du rapport qui la représente dans ces deux périodes distinctes de temps.

Je ne présenterai pas le même calcul pour les observations mentionnées par les annales chinoises avant et après l'époque que j'ai considérée, c'est-à-dire avant l'an 960 et après l'an 1275. Il conduirait à une différence semblable entre les deux moitiés de l'année; mais les observations sont trop peu nombreuses pour s'attacher avec sûreté à ce résultat. Quant à l'époque actuelle, je trouve, dans le Manuel de météorologie de M. Kaemtz, page 473 de la traduction française, un tableau des globes enflammés observés dans chaque mois. Ce tableau donne 289 bolides pour les six premiers mois de l'année, janvier-juin, et 388 pour les six autres mois, juillet-décembre. La différence est encore dans le même sens, mais bien moins forte que dans les observations chinoises, pour la pé-

riode 960-1275. M. Coulvier-Gravier, qui observe constamment les étoiles filantes depuis quinze années, annonce (Comptes rendus de 1845, 1er semestre, page 1340) « que la moyenne des étoiles filantes, visibles pendant les six mois compris entre le solstice d'été et le solstice d'hiver, est à peu près le double de ce qu'elle est pendant les six autres mois. » Ce résultat se rapproche sensiblement de celui que fournissent les observations chinoises, bien que celles-ci me paraissent se rapporter surtout à des apparitions de globes enflammés.

Je ferai ici une remarque qui peut n'être pas sans importance. La distribution inégale des apparitions pourrait être exprimée par un autre énoncé qui en reproduirait non moins fidèlement le caractère, en la rapportant au partage de l'année, non plus par la ligne des solstices, mais par le grand axe de l'ellipse terrestre. En effet, dans l'an 1100, époque moyenne des observations chinoises que j'ai considérées, le périhélie de la terre différait à peine, en longitude, du solstice d'hiver, et son aphélie du solstice d'été. On pourrait donc dire que la plus grande quantité des météores se trouve répartie de l'aphélie au périhélie, et la moins grande du périhélie à l'aphélie. Or, le mouvement du périhélie de l'orbe terrestre relativement à la ligne des équinoxes étant d'environ 62 secondes par année dans le sens direct, son déplacement, depuis l'an 1100 jusqu'à l'époque actuelle, a été trop petit pour que les deux phases de la répartition ne puissent pas être encore exprimées aujourd'hui de la même manière. Si les météores persistent à se partager avec la même inégalité entre les deux moitiés de l'année, l'avenir montrera quel est celui des deux énoncés qui leur est réellement applicable.

J'ai donné à la fin de mon catalogue un tableau particulier pour les apparitions des étoiles filantes en masse. J'ai jugé utile de refaire ce tableau, en le divisant par mois et en marquant la direction des masses d'étoiles, lorsqu'elle a été mentionnée par les textes. J'y ai joint les principales apparitions en masse observées en Europe, d'après le relevé fait en 1840 par M. Herrick.

Ce second tableau montre de grandes variations dans les époques où se représentent les apparitions en masse. Celle du 20 au 25 juillet, qui a été observée le plus souvent au IX^e^ et au X^e^ siècle, disparaît des annales chinoises depuis l'an 841 jusqu'à l'an 924; elle se représente alors pendant trois années successives, puis disparaît jusqu'à l'an 933, et, après cette année, on ne la retrouve dans les mêmes annales que beaucoup plus tard, en admettant qu'on doive l'identifier avec celle du 27 juillet 1451. Pendant ce long intervalle, les chroniques européennes ne fournissent que deux citations qui puissent se rapporter à la même apparition en masse. Toutefois, on doit remarquer que, durant la période 960-1275, le maximum des apparitions séparées, observé pour le mois de juillet, correspond au même groupe de jours, 20-25 juillet. L'autre maximum, observé au milieu d'octobre, durant la même période, comprend une apparition en masse, le 14 octobre 1002. Deux autres apparitions en masse vers cette date ont été observées en Chine et en Europe au X^e^ siècle, et on en trouve encore deux autres mentionnées à la fin du XII^e^ siècle par les chroniques européennes, toujours vers la même date. Il y a aussi une apparition en masse, mentionnée le 3 novembre 970 par les annales chinoises. Celle qui paraît le mieux se rapporter au phénomène observé récemment le 13 novembre 1832 est l'apparition en masse du 7 novembre julien 1602. Ces intermittences me semblent indépendantes du plus ou moins de soin des observateurs chinois, puisque la période 960-1275, où ils ont noté le plus régulièrement le passage des météores, n'offre qu'un très-petit nombre d'observations relatives à des apparitions en masse.

Les directions communes aux étoiles filantes qui ont ainsi paru en masse varient entre le N. le N. O. l'O. le S. O. Plusieurs fois, le texte des annales chinoises dit que les étoiles filantes tombent dans tous les sens. Deux fois seulement, il indique leur direction commune vers certains groupes stellaires, savoir : le 14 octobre 1002, vers θ, γ, δ Cancer et λ, μ grande Ourse; le 27 octobre 1602, vers γ, δ, ε Éridan.

TABLEAU

DES APPARITIONS D'ÉTOILES FILANTES EN MASSE

RÉPARTIES DANS LES DOUZE MOIS,

AVEC LES DIRECTIONS INDIQUÉES PAR LES TEXTES.

Les dates accompagnées d'un astérisque sont extraites des ouvrages européens; toutes les autres sont extraites des annales chinoises.

ANNÉES.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBRE.	OCTOBRE.	NOVEMBRE.	DÉCEMBRE.
- 687	"	"	23	"	"	"	"	"	"	"	"	"
- 15	"	"	27	"	"	"	"	"	"	"	"	"
36	"	9 → N. N. O. N. E.	"	"	"	27 en tous sens.	"	"	"	"	"	"
268	"	"	"	"	"	"	"	7e lune → à l'O.	"	"	"	"
288	"	"	"	"	"	"	"	"	26	"	"	"
308	20	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
401	"	"	"	8 → à l'O.	"	"	"	"	"	"	"	"
532	"	"	"	"	"	"	"	28	"	"	"	"
585	"	"	"	"	"	"	"	"	23	"	"	"
599	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	26
714	"	"	"	"	"	"	15 → N. N. O.	"	"	"	"	"
764	"	"	mars*.	"	"	"	"	"	"	"	"	30
765*	4*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
784	"	"	"	"	"	"	10	"	"	"	"	"
814	"	1re lune.	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
824	"	"	"	"	4e lune.	"	"	"	"	"	"	"
830	"	"	"	"	"	"	22	"	"	"	"	"
833	"	"	"	"	"	"	23	"	"	"	"	"
835	"	"	"	"	"	"	22 → voie lactée.	"	"	"	"	"
837	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	8?	"
839	"	"	"	13 → à l'O.	"	"	"	"	"	"	"	"
841	"	"	"	"	"	"	21	"	"	"	"	"
855*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	17*	"	"
881	"	"	"	"	"	"	"	"	du 10 au 18	"	"	"
883	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	11e lune → N. O.

ANNÉES.	JANVIER.	FÉVRIER.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOÛT.	SEPTEMBRE.	OCTOBRE.	NOVEMBRE.	DÉCEMBRE.
901*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	25*	"
902*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	24*	"	"
905	"	"	"	12?	"	"	"	"	"	"	"	"
924	"	"	"	"	"	"	21, 23	"	"	"	"	"
925	"	"	"	"	"	"	22, 23 ⟶ S. O.	"	"	"	"	"
926	"	"	"	"	"	"	22	"	"	"	"	"
927	"	"	"	12 ⟶ N. O.	"	"	"	"	"	"	"	"
930	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	24	"
931	"	"	"	"	"	"	"	"	"	4*, 15	"	"
933	"	"	"	"	"	"	20, 25	"	"	"	"	"
934	"	"	"	13	"	"	"	"	"	4*, 14 ⟶ N. O.	"	"
935*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5*	"	"
970	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	3 ⟶ N.	"
1002	"	"	"	"	"	"	"	"	"	14 ⟶ θ, γ, δ, Cancer, et λ, μ, G^de Ourse.	"	"
1008	"	"	26	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1012	"	"	"	"	"	"	"	"	11 ⟶ N.	"	"	"
1029*	"	"	"	"	"	"	juillet*.	"	"	"	"	"
1037	"	"	"	"	"	"	"	21 ⟶ S. O.	"	"	"	"
1063	"	"	"	"	"	"	"	22 ⟶ O.	"	"	"	"
1095*	"	"	"	4*	"	"	"	"	"	"	"	"
1096*	"	"	"	4*	"	"	"	"	"	"	"	"
1106*	"	6*?	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1122*	"	"	"	4*	"	"	"	"	"	"	"	"
1199*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	fin du mois*	"	"
1202*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	19*	"	"
1243*	"	"	"	"	"	"	26*	"	"	"	"	"
1366*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	22*	"	"
1399*	"	"	"	"	"	"	"	"	30*	"	"	"
1436	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2	"	"
1439	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5	"	"
1451	"	"	"	"	"	"	27	"	10	"	"	"
1533	"	"	"	"	"	"	"	"	"	24	"	"
1576	"	"	"	"	"	"	"	"	25	"	"	"
1602	"	"	"	"	"	"	"	"	"	27 ⟶ γ, δ, ε, Éridan.	7	"
1623	"	"	"	"	"	"	"	"	"	10	"	"
1635*	"	"	"	"	"	"	en été*.	"	"	"	"	"
1636*	"	"	"	"	"	"	en été*.	"	"	"	"	"
1642	"	"	"	"	"	"	en été.	"	"	"	"	"
1743*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	4*	"	"
1799*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	12 grégor.	"
1803*	"	"	"	20 grégor.*	"	"	"	"	"	"	"	"
1832*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	13*	"
1833*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	13*	"
1835	"	"	"	"	"	"	10	"	"	"	"	"

J'ai fait de même le relevé des huit directions indiquées par les textes chinois pour les météores isolés observés entre les années 960-1275. Je présente, sous le numéro 3, le tableau des nombres de météores qui ont suivi ces diverses directions. Ce tableau nous montre que le sens le plus fréquent de leur mouvement a été vers la partie du ciel comprise entre le S. O. et le S. E. Un nombre sensiblement moindre de météores, environ les deux tiers, s'est dirigé vers la partie opposée du ciel, entre le N. E. et le N. O. Enfin, il y en a beaucoup moins encore qui aïent suivi les directions E. et O. M. Bravais a signalé une tendance analogue dans les mouvements des arcs formés par les jets lumineux des aurores qu'il a observées en 1838 et 1839 avec les autres membres de la commission scientifique du Nord.

	DIRECTIONS DES MÉTÉORES VERS LES POINTS							
	EST.	NORD-EST.	NORD.	NORD-OUEST.	OUEST.	SUD-OUEST.	SUD.	SUD-EST.
960-1020	6 + une masse en 1002.	6	18 + deux masses en 970 et 1012.	10	4	17	15	15
1021-1067	28	37	33	30	25 + une masse en 1063.	71 + une masse en 1037.	62	52
1068-1077	20	44	39	43	29	63	47	37
1078-1087	8	16	12	23	11	23	16	21
1088-1099	13	20	15	24	12	36	16	34
1100-1199 La direction n'est souvent pas indiquée pendant cette période.	1	11	5	14	4	34	8	22
1200-1275	0	5	0	4	1	7	4	10
Sommes.....	76 + une masse.	135	122 + deux masses.	145	86 + une masse.	251 + une masse.	168	191

Les observations de M. Coulvier-Gravier sur la direction des étoiles filantes, en 1845 et 1846, conduisent aussi à des résultats analogues à ceux des annales chinoises. Elles indiquent que la plus grande quantité des étoiles filantes se dirige vers le S. O. et la plus petite quantité vers l'E.

Enfin, je noterai que les couleurs assignées par les textes chinois aux météores observés sont presque constamment le blanc bleuâtre ou le rouge jaunâtre. Ces textes mentionnent quelques météores de couleur purement rouge ou blanche ; mais ce sont des cas très-rares.

FAUTES A CORRIGER DANS LE CATALOGUE.

P. 180. Ligne 6, au lieu de *Aigle*, lisez : *Cygne.*
182. Ligne 3, en remontant, au lieu de *25 octobre*, lisez : *25 décembre.*
" Ligne 9, en remontant, au lieu de *o*, *Baleine*, lisez : β, *Baleine.*
Faire cette même correction aux autres pages où ce groupe est nommé.
186. Ligne 3, au lieu de *23 octobre*, lisez : *23 décembre.*
190. 191. A plusieurs lignes, au lieu de *Kouan-tso*, lisez : *Kouan-so.*
Faire la même correction aux autres pages où ce groupe est nommé.
205. Ligne 12, en remontant, lisez : *Keou-tchin* (groupe de ζ, *petite Ourse*).
Faire la même correction aux autres pages où ce groupe est nommé.
214. Ligne 18, au lieu de *17 août*, lisez : *17 octobre.*
" Ligne 20, au lieu de *19 août*, lisez : *18 décembre.*
Corriger de même la table à l'année 1066.
258. Ligne 6, en remontant, au lieu de *2 octobre*, lisez : *2 décembre.*
302. Ligne 22, au lieu de *espace trouble*, lisez : *des vapeurs.*
Faire la même correction aux autres pages où cette expression se retrouve.

OBSERVATIONS

ANATOMIQUES ET ORGANOGÉNIQUES

SUR LA CLANDESTINE D'EUROPE

(LATHRÆA CLANDESTINA, L.);

PAR M. P. DUCHARTRE,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

(PRÉSENTÉES À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 18 DÉCEMBRE 1843.)

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

Le travail que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie des sciences a pour sujet une plante aussi singulière par son mode de végétation que par les particularités de sa structure. Très-commune dans le midi de la France, et en particulier dans le haut Languedoc et l'Agenais, la Clandestine d'Europe (*Lathræa Clandestina*, L.) vit en parasite sur les racines de certains arbres qui croissent souvent le long des ruisseaux. Le peuplier d'Italie est celui d'entre eux sur lequel elle paraît se fixer de préférence; mais on la trouve aussi sur le saule blanc, l'aune, le charme. C'est au pied du tronc de ces divers arbres qu'elle montre, au premier printemps, ses grandes fleurs purpurines, réunies en masses souvent considérables.

Depuis longtemps j'avais été frappé de la bizarrerie d'aspect et de mœurs de cette plante. Cette existence toute souterraine jusqu'au moment de la fleuraison; la couleur pâle et comme

étiolée des organes de la végétation, qui semble être la suite de l'influence du milieu dans lequel ils vivent; la consistance charnue et la forme des feuilles, qui ressemblent plutôt à de simples écailles qu'à des productions foliaires : toutes ces particularités que découvre chez cette espèce l'examen le plus superficiel m'avaient fait présumer que sa structure intime pourrait bien s'écarter des règles ordinaires. J'essayai de me fixer sur ce point et de pénétrer, à l'aide du microscope, dans les détails de cette organisation. Mon espoir ne fut pas trompé; dès mes premiers pas dans cette étude, je reconnus des faits qui me parurent nouveaux, d'autres peu connus, et qui cependant me semblèrent bien dignes de l'être. Je résolus dès lors de soumettre la Clandestine à un examen minutieux, et je commençai le travail duquel j'extrais aujourd'hui les points qui me paraissent les plus dignes d'attention.

Ces recherches ont été poursuivies par moi avec tout le soin dont j'ai été capable, et elles m'ont occupé presque uniquement pendant le dernier mois de l'hiver et ceux du printemps en 1842 et 1843. Les résultats qu'elles m'ont donnés ont été conservés par des dessins, dont le nombre est devenu considérable (plus de 360), et par des notes, toutes écrites pendant que les objets étaient encore sous mes yeux. Ce sont ces notes et ces dessins qui me fournissent la matière du mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Depuis déjà trois ou quatre mois, j'avais écrit un résumé de mes observations les plus importantes relativement à l'anatomie des organes de la végétation de la Clandestine. Cet extrait vient d'être imprimé dans les Annales des sciences naturelles, cahier de septembre 1843; mais, dans ce travail, il n'était question ni des organes reproducteurs, ni de l'organogénie de ceux de la végétation. Je n'avais, d'ailleurs, ajouté au texte aucune figure; aujourd'hui je présente le cadre entier de mes recherches, en le réduisant toutefois aux faits qui me semblent dignes d'attention, et en l'accompagnant d'un certain nombre de figures; seulement,

parmi mes nombreux dessins originaux, je ne reproduis que ceux que je crois nécessaires pour faire connaître à peu près en entier l'anatomie et l'organogénie de la Clandestine. Parmi ceux que je néglige, il en est plusieurs qui ont bien encore à mes yeux de l'intérêt, mais que j'ai cru néanmoins pouvoir laisser de côté sans beaucoup d'inconvénient, pour ne pas rendre mon mémoire trop volumineux, et de plus, parce que le texte seul suffit, je crois, pour faire comprendre les diverses particularités qu'ils reproduisent.

Lorsque j'ai entrepris mes recherches anatomiques sur la Clandestine, j'avais devant les yeux des modèles remarquables que j'essayais d'imiter : je veux parler du mémoire de M. Mirbel sur le *Marchantia* et de ceux de M. Decaisne sur la Garance et sur le Gui. Ainsi que ces habiles observateurs, je me proposais de faire un travail complet; si, comme je le crains bien, je n'ai pas réussi à remplir en entier le vaste cadre que je m'étais tracé, je ne dois en accuser que mon peu d'habileté pour des observations si délicates, et peut-être aussi quelques circonstances défavorables et quelques contrariétés qui ont entravé ma marche pendant le cours de mes recherches : aussi mon travail actuel n'est-il pas, je l'espère, mon dernier mot sur la plante qui en est le sujet; et si jamais les circonstances me ramènent dans le Midi à l'époque favorable pour ce genre d'étude, je tâcherai de compléter entièrement l'œuvre à laquelle j'ai consacré déjà beaucoup de temps et de soins.

J'ai fait connaître ailleurs les moyens de travail dont j'ai pu disposer, et les précautions que j'ai prises pour éviter les causes d'erreurs qui auraient pu se présenter à moi et altérer l'exactitude des résultats que je poursuivais. Je dois cependant y revenir ici en deux mots. J'ai employé pour mes observations quelquefois un microscope simple, plus souvent un bon microscope catadioptrique d'Amici. Pour celui-ci, qui a été presque sans cesse entre mes mains, les grossissements auxquels j'ai eu recours ont rarement dépassé 350 ou 400 diamètres. Jusqu'à ce

terme, mon instrument présente une netteté et une clarté très-satisfaisantes. Dans quelques cas rares, j'ai employé un grossissement de près de 600 diamètres; mais alors j'ai eu le soin de répéter plusieurs fois la même observation, de faire varier la position de l'objet, l'incidence de la lumière, etc. En général, je ne me suis pas contenté d'un seul examen pour chaque fait; mais je suis revenu plusieurs fois à la charge; parfois même, j'ai fait un grand nombre de préparations semblables. Souvent, j'ai pris la précaution de dessiner plusieurs fois le même objet sur diverses préparations. Peut-être aurai-je réussi, grâce à ces soins minutieux, à n'obtenir que des résultats positifs.

Quant à mes dessins, ils ont été exécutés presque tous à la chambre claire, tantôt avec le miroir de Sœmmering, tantôt à la *camera lucida,* composée d'un prisme et d'un miroir perforé. Ceux que j'ai l'honneur de soumettre en ce moment à l'Académie ont été soigneusement calqués sur les figures originales, et, par suite, ils reproduisent exactement ce qui s'est présenté à mes yeux dans le champ du microscope.

Lorsque j'ai fait mon travail, j'étais absolument isolé du monde savant, relégué dans un petit village de l'Agenais, sur les confins du Quercy et du Périgord : aussi ne connaissais-je pas l'existence d'un mémoire de M. Bowman sur une plante voisine de la mienne, le *Lathræa squamaria* L., inséré par lui dans les Transactions de la Société linnéenne de Londres, t. XVI, p. 419 et suiv. Depuis mon arrivée dans Paris, j'ai pris connaissance de ce travail remarquable, et j'ai vu avec joie qu'il ne m'obligeait pas à modifier ma manière de voir sur la Clandestine, ni à me défier d'aucune de mes observations. Au surplus, le travail de M. Bowman n'a eu pour but principal que d'étudier le mode de connexion parasite de sa plante avec l'arbre qui la nourrit. Ce n'est guère qu'en passant qu'il a jeté un coup d'œil sur certains points de son anatomie; il me semble même que, pour ce dernier objet, il a généralement employé des grossissements trop faibles, qui n'ont pu l'éclairer suffisamment sur les détails réels de l'organi-

sation dont il s'occupait. Quoi qu'il en soit, dans l'exposé de mes propres recherches, j'aurai le soin de comparer les résultats que j'ai obtenus sur ma plante avec ceux que M. Bowman indique sur la sienne, et de faire ressortir les dissemblances qui résultent, selon toute apparence, de la différence des deux espèces qui ont été soumises à notre examen.

Dans l'exposé de mes observations, j'étudierai en premier lieu les organes de la végétation, et en second lieu ceux de la reproduction. Pour chacun d'eux, je donnerai d'abord le tableau de sa structure anatomique dans l'état adulte; après quoi, le considérant dès son origine, je le suivrai dans les diverses phases de son évolution, en faisant connaître, autant que cela me sera possible, les modifications qui se sont opérées pendant ce temps, soit dans sa configuration générale, soit dans la disposition et dans la nature des tissus qui le constituent. Il me semble que ce sont là les éléments les plus importants pour l'histoire complète de chaque organe, et qu'en suivant cette marche, je pourrai espérer de faire connaître suffisamment l'anatomie et l'organogénie de ma plante tout entière.

PREMIÈRE PARTIE.

DES ORGANES DE LA VÉGÉTATION.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA TIGE.

La tige de la Clandestine, occupant une position entièrement souterraine, devait nécessairement subir dans sa structure quelque influence du milieu exceptionnel dans lequel elle se trouve. Nous allons voir, en effet, que, quoique présentant les traits généraux de la structure des tiges dicotylées, elle s'en écarte néanmoins

sous des rapports très-importants, et que, de plus, elle a quelque chose des racines ordinaires dans les proportions relatives de l'une de ses parties. Exposons d'abord les divers éléments qui constituent la tige d'un an chez notre plante; nous essayerons ensuite de jeter un coup d'œil sur son développement.

Si nous faisons une coupe transversale d'une tige de Clandestine chez laquelle la première couche ligneuse est entièrement développée, nous y voyons les deux divisions principales que présente toute tige de végétal dicotylé : le système central et le système cortical.

Le système central, réduit à une grande simplicité, comprend uniquement la moelle et la zone ligneuse. Je n'y ai rien vu qui représente les rayons médullaires, qu'on a regardés, en général, comme caractérisant presque essentiellement les tiges des dicotylés; rien non plus qu'on puisse considérer comme un étui médullaire.

Le système cortical est, au contraire, très-complet et très-développé : il se compose d'une écorce proprement dite ou d'un liber en couche épaisse, d'une enveloppe cellulaire ou médulle externe, remarquable par sa grande épaisseur; enfin, d'un épiderme.

Je vais étudier maintenant ces diverses parties selon l'ordre dans lequel je viens de les énumérer, c'est-à-dire en allant de l'intérieur vers l'extérieur.

ARTICLE 1er.

SYSTÈME CENTRAL.

§ 1er. Moelle.

La moelle est médiocrement volumineuse chez la Clandestine; les cellules qui la forment constituent un tissu serré dont les mailles sont assez régulièrement hexagonales sur une coupe transversale, et vont en diminuant progressivement de grandeur

du centre vers l'extérieur. Sur une coupe longitudinale, les cellules de ce parenchyme ont une longueur qui égale de deux à trois fois leur largeur. Leurs parois sont minces; elles contiennent des grains de fécule ordinairement moins volumineux que ceux des autres parties de la plante, et assez nombreux, surtout chez les jeunes tiges.

Sur une coupe transversale faite dans la portion moyenne d'un mérithalle, la moelle forme une masse à peu près cylindrique, mais dont le contour extérieur est irrégulier et assez sinueux; mais sur une section qui passe par les points correspondants à la naissance d'une paire de branches, elle change entièrement de disposition : là elle s'étend et s'élargit en une bande transversale qui règne d'un côté à l'autre de la tige, et qui va se rétrécissant, à partir du centre jusqu'à son entrée, dans l'espace laissé pour elle par la portion de couche ligneuse qui s'est détachée de la tige pour donner naissance à ces branches. Il est facile de se convaincre, dans ce cas, que ces deux productions médullaires se rattachent sans interruption au centre de la moelle de la tige; car, sur toute la longueur de cette bande médullaire transversale, on voit la ligne médiane formée de cellules larges, continues à celles du centre de la tige, et les bords occupés par des cellules plus petites et plus serrées.

Rien chez cette plante ne m'a paru jouer le rôle d'un étui médullaire, même sur une tige âgée et pourvue de plus d'une couche ligneuse (tab. I, fig. 1); le contour qui limite la masse médullaire est assez mal défini, irrégulier, et l'on remarque une sorte de passage progressif de la forme des petites cellules extérieures de ce parenchyme central à celle du prosenchyme que nous allons voir interposé aux vaisseaux. La disposition de ces vaisseaux eux-mêmes, dans la portion du corps ligneux qui avoisine la moelle, ne me semble présenter absolument aucune régularité; ils ne se réunissent ni en anneau, ni en figure polygonale distincte, et leur nature ne m'a pas semblé différente en ce point de ce qu'elle est dans le reste de la zone ligneuse.

Un autre fait bien remarquable aussi, c'est l'absence complète de tout rayon ou prolongement médullaire chez cette plante dicotylée; la moelle ne se prolonge pas à travers le bois, et il n'existe aucune relation directe entre elle et l'enveloppe cellulaire si épaisse qui forme la portion la plus volumineuse de cette tige : ce fait est pour moi à l'abri de toute contestation. Pour le reconnaître avec toute sûreté, et pour bannir de mon esprit, à ce sujet, jusqu'à l'ombre d'un doute, j'ai fait un très-grand nombre de coupes, non-seulement transversales, mais encore longitudinales, soit passant par l'axe, soit tangentielles. J'ai examiné ces coupes sous divers grossissements, et jamais je n'ai pu y remarquer le moindre indice de lignes celluleuses divergeant de la moelle. Je crois donc pouvoir assurer qu'il n'existe pas de rayons médullaires chez cette espèce dicotylée.

§ 2. Corps ligneux.

Le corps ligneux de la Clandestine a une structure fort simple: c'est une masse continue, en cylindre creux, dans laquelle on ne distingue pas de zones, et qui se compose uniquement de séries rayonnantes de petites cellules allongées, entremêlées de nombreux et larges vaisseaux.

Ces cellules, qui forment la majeure partie de la masse ligneuse, sont toutes disposées, l'une à côté de l'autre, en séries rayonnantes partant de la moelle, dont la disposition régulière n'est dérangée que par l'écartement que çà et là les vaisseaux produisent parmi elles. Sur une coupe horizontale, elles se montrent sous la forme d'un quadrilatère, ou, plus exactement, sous celle d'un hexagone irrégulier, dont les faces intérieure et extérieure sont les plus larges, dont au contraire les faces latérales, soit à droite, soit à gauche, sont beaucoup plus courtes, et se réunissent sous un angle très-ouvert, d'où résulte pour chaque côté, et sous un grossissement médiocre, l'apparence d'une seule ligne à peu près droite. Leurs parois sont minces et transparentes; elles

ne contiennent que de petites granulations que je n'ai pu bleuir par l'emploi de l'iode.

Examinées sur une coupe longitudinale (pl. I, fig. 9), ces cellules se montrent médiocrement allongées, leur longueur n'égalant que quatre ou cinq fois au plus leur largeur. Le tissu qu'elles forment est très-serré, et les parois des cellules adjacentes se soudent sans laisser entre elles de méats. Elles se superposent par des bases généralement un peu obliques, formant ainsi des séries longitudinales plus ou moins distinctes. Plusieurs fois j'en ai trouvé sous le microscope dont les parois présentaient comme de larges et grandes raies, ou plutôt des sortes d'impressions transversales, qui provenaient peut-être de leur pression contre les vaisseaux.

Les vaisseaux du cylindre ligneux, considérés en particulier, se montrent sous des dimensions considérables et diverses. Leur disposition générale dans le bois peut à peine être regardée comme vaguement rayonnante; ils forment ordinairement des groupes lâches, séparés de leurs voisins par plusieurs séries des cellules prosenchymateuses que je viens de décrire. Tant que la couche ligneuse n'est pas arrivée à son entier développement, on observe assez bien chez eux un arrangement en rayons plus ou moins réguliers, et un accroissement de dimensions du centre vers l'extérieur (Pl. I, fig. 2); mais cet état n'est pas définitif, car, dans les zones ligneuses complétement développées, leur disposition première n'est guère plus reconnaissable : ils semblent alors bien plutôt semés sans ordre dans la masse du bois; de plus, leurs dimensions sont en même temps devenues à peu près égales vers l'intérieur et vers l'extérieur. Sur les coupes horizontales, ils présentent tous un large orifice béant, plus ou moins arrondi, et, le plus souvent, ils sont entourés d'un cercle de cellules prosenchymateuses, dont ils dérangent la position en séries régulières.

Le corps ligneux, formé par ces cellules et ces vaisseaux, ne se laisse pas subdiviser en zones concentriques; mais, dans toute

son étendue, il compose une masse cohérente et continue, dans laquelle il n'existe pas plus d'interruption dans le sens circulaire que dans celui des rayons.

Cette diffusion définitive, sans ordre, des vaisseaux dans toute l'épaisseur de la couche ligneuse, existe aussi chez le *Lathræa squamaria;* car elle y est signalée par M. Bowman, qui mentionne de même l'absence de tout arrangement concentrique dans le bois de cette tige.

Pour reconnaître la nature de ces vaisseaux, il faut avoir recours à des coupes longitudinales. Afin de déterminer tous ceux qui existent dans la tige de la Clandestine, j'ai coupé toute l'épaisseur d'une de ces tiges en lames minces, que j'ai successivement soumises à l'examen microscopique, en ayant le soin de faire varier l'éloignement du porte-objet à l'objectif, afin de voir par transparence ceux de ces vaisseaux qui pouvaient se trouver dans l'épaisseur même des tranches. Par là, j'ai cru reconnaître que tous ces tubes rentrent dans deux grandes catégories : 1° celle des vaisseaux chez lesquels la spiricule interne a ses tours de spire éloignés, plus ou moins anastomosés, et auxquels je donnerai ici la dénomination de *vaisseaux réticulés,* quoique peut-être un peu vague; 2° celle de *vaisseaux rayés ou ponctués.* Pour les trachées proprement dites et déroulables, à spire sans anastomoses, telles que les définissent les plus habiles phytotomistes français, je n'ai pu réussir à les trouver ni dans la tige, ni dans aucune autre partie de la Clandestine.

Les vaisseaux de la première catégorie m'ont paru peu nombreux dans la tige que j'examine; je les ai surtout remarqués facilement dans les zones ligneuses qui n'avaient pas encore atteint leur état définitif, et, selon ce que j'ai cru reconnaître, vers la portion interne de ces zones. J'ai toujours trouvé leur diamètre moindre que celui des autres vaisseaux; ordinairement, ils se sont montrés à mes yeux caractérisés par une spiricule qui, tout en suivant une marche générale en spirale, donnait fréquemment des ramifications directes et des branches anastomotiques laté-

rales. Il en résultait alors, sur les parois du vaisseau, un réseau lâche, à mailles plus ou moins nombreuses, irrégulières et inégales.

Quant aux tubes vasculaires de la seconde catégorie, ils constituent la majeure et la plus importante portion de ceux du bois chez notre plante. Leurs fortes dimensions les font distinguer au premier coup d'œil. Sur les coupes transversales, leur large orifice est à peu près circulaire; du moins il approche assez de cette forme, excepté là où plusieurs se trouvent rapprochés côte à côte et serrés l'un contre l'autre. Sur les coupes longitudinales des tiges très-jeunes et des extrémités de celles déjà bien développées, ils se montrent formés de cellules superposées en séries souvent sinueuses, dont chacune est à peine plus longue que large[1]. Un étranglement assez marqué indique le point de superposition de ces cellules, et donne au vaisseau entier l'aspect que l'on connaît sous le nom de moniliforme.

Plus tard, ou dans les portions de tige plus avancées, les cellules élémentaires sont moins nettement indiquées, mais toujours très-reconnaissables, soit à l'extérieur, à l'aide d'un étranglement encore bien visible, soit surtout à l'intérieur, par suite de l'existence sur les mêmes points d'une saillie circulaire qui rétrécit la lumière du tube. Cette saillie circulaire intérieure est même bifide à son bord libre, et par là elle démontre clairement qu'elle provient uniquement des deux membranes cellulaires primitivement superposées, qui ont été résorbées dans toute leur portion moyenne.

Les ponctuations de ces gros vaisseaux permettraient de les appeler tantôt vaisseaux rayés, tantôt vaisseaux ponctués: en effet, leur longueur varie depuis celle de véritables lignes jusqu'à celles de simples points ovales, sans qu'il me paraisse possible d'établir une bonne division basée sur ces variations. Souvent même, si

[1] Pour les motifs que j'ai déjà énoncés plus haut, je ne reproduis pas ici celles de mes figures qui ont rapport aux formes des divers organes vasculaires. Je crois que les descriptions que j'en donne rendent ces dessins peu utiles ou même à peu près inutiles.

l'on examine avec attention les plus longues de ces ponctuations, surtout par la face interne du vaisseau, on se convaincra que chacune d'elles est subdivisée en deux ou trois portions ponctiformes par des lignes transversales moins marquées et moins visibles que celles qui séparent les grandes ponctuations tout entières l'une de l'autre. D'après ces motifs, il me semble impossible de donner à ces tubes aucune autre dénomination que celle très-vague, et par suite plus convenable ici, de *vaisseaux ponctués*.

Si maintenant je voulais essayer de faire entrer les grands vaisseaux ponctués de la Clandestine dans l'une des nombreuses divisions admises par M. Hugo Mohl, dans son Mémoire sur la structure des vaisseaux (trad. dans les Ann. des sc. nat. 2e sér. décembre 1842, p. 321-338), je les rangerais dans celle dont il est question page 334 *l. c.* et dans laquelle « les ponctuations doivent leur origine à une simple lacune formée par les couches utriculaires secondaires, et correspondent exactement aux ponctuations des cellules parenchymateuses des vaisseaux réticulés et des vaisseaux scalariformes. » En effet, lorsqu'on examine (pl. I, fig. 11), sous un fort grossissement, la face interne des parois de ces vaisseaux, on voit que sur la membrane vasculaire, généralement regardée comme primitive, s'élèvent des côtes saillantes, arrondies, qui marchent généralement en direction parallèle et spirale, mais d'une manière assez irrégulière. Des branches anastomotiques réunissent ces premières côtes, et achèvent de couvrir toute cette surface du vaisseau d'un réseau saillant à petites mailles. Parmi ces branches anastomotiques, les unes semblent être de simples subdivisions des côtes principales, et elles circonscrivent avec celles-ci les grandes impressions totales; les autres sont moins saillantes, et ce sont elles qui subdivisent presque toujours chacune de ces ponctuations en deux ou trois petites aréoles distinctes et séparées, mais entourées toutes ensemble comme d'un cadre général. Entre ces diverses côtes règnent des enfoncements, dans lesquels la membrane vasculaire primitive est sans doute à nu : ces enfoncements constituent les ponctuations.

Pour achever de confirmer ces données par l'observation directe, il est bon de tirailler ces vaisseaux, que par là on réussit facilement à déchirer. Or, on voit alors, 1° qu'ils se rompent en un ruban spiral plus ou moins large; 2° que ce ruban se termine toujours à deux côtes spirales, partageant ainsi les ponctuations dont les membranes plus faibles ont dû céder les premières au tiraillement. Souvent on réussit, par cette simple action mécanique, à isoler quelques-unes de ces côtes spirales, et alors on voit sur leurs bords des fragments de leurs branches anastomotiques qui ont été rompues.

Si l'on examine avec soin la coupe des parois de l'un de ces vaisseaux, on reconnaît sur le bord interne de la section une série de saillies arrondies dont chacune répondait à l'une des côtes intérieures; enfin, si la coupe a passé par les parois de deux vaisseaux juxtaposés, on voit que, comme de coutume, leurs ponctuations se correspondaient : car on observe constamment les petites saillies formées par la section des côtes internes opposées par deux, dont l'une à droite, l'autre à gauche.

Il me semble que ces divers faits démontrent suffisamment la nature des ponctuations de ces vaisseaux.

ARTICLE 2.

SYSTÈME CORTICAL.

§ 1^er^. Zone libérienne.

Immédiatement en dehors de la couche ligneuse se montre une nouvelle zone, que je crois pouvoir appeler *zone libérienne*. Celle-ci forme l'écorce proprement dite; son épaisseur est considérable: dans une tige à un seul anneau ligneux, elle égale ou surpasse l'épaisseur de celui-ci. Examinée sur une coupe transversale, elle se montre sous un aspect différent de l'intérieur à l'extérieur.

Sa portion centrale, qui repose immédiatement sur l'anneau ligneux, est formée de cellules entièrement analogues, pour la

forme, à celles du prosenchyme ligneux; elles sont de même arrangées l'une à côté de l'autre en séries rayonnantes, qui continuent exactement celles du bois, et qui ne se distinguent de celles-ci que par plus de transparence dans leurs parois; mais leurs séries ne s'étendent pas loin : bientôt elles paraissent se porter l'une vers l'autre, de manière à former quelquefois des espèces d'arceaux emboîtés; plus généralement, les cellules qui les composent augmentent de dimensions, surtout dans le sens transversal, en allant vers l'extérieur; par là elles changent de disposition générale, et de là, jusqu'à la fin de cette couche, elles ne forment plus (pl. II, fig. 10) qu'un tissu à mailles plus grandes, disposées sans ordre, plus larges transversalement que de dedans en dehors. Leurs parois deviennent aussi un peu plus épaisses à mesure qu'elles se trouvent plus extérieures, et leurs granules se montrent en même temps plus nombreux et plus gros; vers la limite extérieure de la couche, ils se font reconnaître sans difficulté pour des grains de fécule.

Sur une coupe longitudinale, les cellules libériennes se montrent sous une forme semblable à celle des cellules ligneuses; on remarque, de plus, que les intérieures, qui forment encore des séries, portent assez généralement leurs extrémités à peu près à la même hauteur et sur un même plan horizontal, tandis que les extérieures, placées sans ordre sur la coupe transversale, ne se correspondent plus ici par leurs extrémités; mais tant celles de l'intérieur que celles de l'extérieur se superposent également en files longitudinales et parallèles.

Chez les tiges encore jeunes, ou dont la zone ligneuse n'est pas tout à fait arrivée à son état parfait, le contour extérieur de cette zone est sinueux et irrégulier, tandis que, plus tard, il se montre régulièrement circulaire. Dans le premier cas, on remarque une adhérence très-prononcée entre le liber et le bois; dans le second, cette adhérence est très-faible, au point que, chez de vieilles tiges, le plus léger effort suffit pour séparer les deux. Dans tous les cas, la ligne de séparation entre ces deux couches

est parfaitement indiquée par la différence de leur teinte, celle du bois étant toujours la plus foncée et la moins transparente des deux.

J'ai inutilement cherché dans cette zone libérienne ou corticale des vaisseaux laticifères; je n'ai pu y rien découvrir qui leur ressemblât.

§ 2. Enveloppe cellulaire.

Les cellules les plus extérieures de l'écorce proprement dite, s'élargissant dans le sens horizontal et devenant en même temps plus courtes dans le sens longitudinal, forment en quelque sorte une transition entre cette couche et celle qui l'enveloppe; néanmoins cette transition est bien imparfaite, et l'on peut même dire à peu près nulle : aussi, en dehors de la couche libérienne, voit-on commencer, presque brusquement, une assise cellulaire très-développée et occupant à elle seule la plus grande partie du volume total de la tige.

Cette couche si épaisse, qui n'est autre que l'enveloppe cellulaire des végétaux dicotylés, se compose de cellules grosses, très-lâches, et par suite, laissant entre elles de très-larges méats, plus ou moins arrondies ou oblongues, à parois minces et transparentes : c'est là un véritable *mérenchyme*. Ces cellules contiennent une grande quantité de gros grains de fécule, au point d'en perdre quelquefois leur transparence.

Dans cette grande masse cellulaire, on remarque une diminution progressive dans la grosseur des utricules, en allant de la partie moyenne vers l'extérieur comme vers l'intérieur. Une particularité que je ne dois point passer sous silence, c'est que les parois de ces mêmes cellules se montrent souvent marquées de lignes parallèles et en spirale, tantôt continues, tantôt formées de séries d'impressions oblongues, comme de larges ponctuations. En élevant le porte-objet du microscope, on peut voir la continuation de ces lignes sur la paroi postérieure de la cellule, et

l'on remarque alors le croisement des directions suivies par elles sur les deux faces opposées.

Ces utricules volumineuses conservent encore souvent leur nucléus ou cytoblaste très-visible sous la forme d'un petit cercle.

§ 3. Épiderme.

L'épiderme de la tige de la Clandestine est une couche de petites cellules un peu aplaties de dehors en dedans, dont la forme générale revient assez exactement à celle d'un parallélipipède : de là, leur contour paraît quadrilatère (pl. I, fig. 6 et 7), soit lorsqu'on les regarde de dehors en dedans, soit lorsqu'on les examine sur une coupe transversale ou longitudinale. Sur des points divers et souvent même tout voisins, ces cellules se montrent plus ou moins allongées. Sous un fort grossissement, leurs parois latérales paraissent un peu sinueuses (pl. I, fig. 5); elles sont, du reste, toujours transparentes et minces, même à l'extérieur, de sorte que l'analogie seule pourrait faire admettre une cuticule en dehors d'elles.

Sur une jeune branche, on peut aisément reconnaître chez la plupart des nucléus ou cytoblastes distincts.

Ces cellules sont disposées en séries longitudinales; elles sont plus petites que celles de la couche immédiatement au-dessous d'elles, et surtout, par suite, beaucoup plus petites que celles qui forment la troisième, la quatrième etc. assise de l'enveloppe cellulaire. La différence avec la couche sous-jacente est telle ordinairement, qu'une seule cellule prise dans celle-ci répond en largeur à deux, et en longueur à trois ou quatre de l'épiderme.

Ayant déjà reconnu l'existence des stomates sur l'épiderme des feuilles, ainsi que je le montrerai plus loin avec détail, j'avais présumé qu'il devait en exister aussi sur celui des tiges : mes conjectures se sont parfaitement vérifiées, et j'ai retrouvé ces petits appareils (pl. I, fig. 8) sur la couche épidermique des extrémités

jeunes, soit des tiges, soit des branches. Les stomates y sont, il est vrai, très-rares, car, pour en trouver deux, dont l'un est reproduit par la figure 8, pl. I, j'ai dû examiner avec soin deux lambeaux assez grands d'épiderme. Il m'a semblé que, généralement, ceux de la tige avaient leur petite bouche ou ostiole plus allongée et plus étroite que ceux des feuilles dans les mêmes circonstances; à cette légère nuance près, et elle est peut-être accidentelle, il y a identité parfaite pour tout le reste.

Très-rares déjà sur les branches jeunes, les stomates disparaissent sans doute plus tard, car je les ai inutilement cherchés sur la couche épidermique des tiges déjà bien développées.

ARTICLE 3.

COUP D'ŒIL SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA TIGE.

Pour terminer l'histoire de cette tige, si remarquable par son organisation, il ne me resterait plus qu'à suivre son développement, et à montrer comment et dans quel ordre apparaissent et se forment ses diverses parties. Comme ces recherches présenteraient des difficultés insurmontables chez une plante qu'il est impossible de cultiver, qu'il est même très-difficile de découvrir dans son état jeune et avant sa fleuraison, j'ai essayé de les remplacer par l'examen d'une série de coupes faites l'une au-dessous de l'autre, à l'extrémité d'une jeune branche, jusqu'au point où sa couche ligneuse se montre à peu près complète. Je sais bien que l'un ne remplace pas tout à fait l'autre; néanmoins, comme je crois qu'il peut résulter de cet examen un grand avantage, je vais faire connaître le résultat de mes observations sur ce sujet.

Très-près de son extrémité, la tige de la Clandestine se montre (pl. II, fig. 15) avec une organisation très-simple, dans laquelle on ne retrouve que certaines des parties qu'elle offrira plus bas: ainsi, son centre est occupé par une moelle abondante à larges cellules; autour de celle-ci, règne une couche en forme de lo-

sange, dans laquelle je vois l'analogue des zones ligneuse et libérienne, et dont les cellules, étroites sur leur coupe, sont uniformes sur toute la largeur de cette bande; seulement, la portion intérieure de celle-ci possède une teinte plus foncée et moins de transparence, et probablement cette différence d'aspect indique les deux couches qui doivent se montrer plus loin, à la place de cette masse encore unique. Aucun vaisseau ne se fait reconnaître encore au milieu de cette zone, qu'entoure une enveloppe cellulaire très-épaisse, recouverte elle-même d'une couche épidermique à cellules étroites; l'ensemble de la tige se montre en ce point un peu comprimé et creusé sur ses côtés de deux petits sinus répondant à l'insertion de la paire de feuilles située un peu plus bas.

Une coupe de cette jeune tige, faite un peu au-dessous de la précédente, nous montre la losange centrale munie de quatre faisceaux vasculaires naissants, dont les deux qui se trouvent aux angles les plus avancés sont formés de vaisseaux plus gros et plus nombreux (pl. II, fig. 16). Il est encore impossible de distinguer ici la couche ligneuse d'avec le liber; on peut cependant reconnaître déjà la portion qu'occupera celui-ci, si l'on remarque que les quatre faisceaux vasculaires se montrent dans la moitié intérieure de la zone entière : la moitié extérieure à ces vaisseaux deviendra donc plus tard la couche de liber.

Une série de coupes faites de plus en plus bas, les unes au-dessous des autres (pl. II, fig. 17, 18 et 19; pl. III, fig. 20), nous montrerait la losange fibro-vasculaire émoussant d'abord ses quatre angles, ses vaisseaux augmentant de diamètre et croissant en nombre, enfin, les cellules allongées qui entourent ces derniers, devenant plus nombreuses et indiquant bientôt une tendance à une disposition plus régulière. Quant aux faisceaux vasculaires en particulier, nous les verrons (fig. 18) se subdiviser chacun en deux moitiés, qui, en s'écartant l'une de l'autre, commencent à occuper une plus grande portion de la circonférence de la tige. Cette première division est produite par l'interposi-

tion de quelques cellules allongées qui commencent à être, comme elles le seront plus tard, rapprochées côte à côte en séries dirigées de dedans en dehors; puis, ces vaisseaux devenant toujours et plus gros et plus nombreux, de nouvelles séries de cellules prosenchymateuses les séparent encore en des groupes plus nombreux, et formés chacun d'une ou deux files rayonnantes. Même après que cette division a été poussée assez loin, il est encore possible de rattacher ces lignes vasculaires isolées aux quatre faisceaux primitifs (fig. 19), dont les deux placés aux angles les plus saillants ont donné le plus grand nombre de subdivisions; mais un peu plus bas (fig. 20), cette origine n'est presque plus reconnaissable; elle se trouve enfin totalement effacée dans le milieu de la longueur de la branche ou de la tige.

A mesure que s'opérait cet arrangement des vaisseaux, les cellules interposées entre eux ou placées plus en dehors qu'eux ont modifié leur forme et leur disposition. Dès l'instant où les faisceaux vasculaires ont commencé d'être subdivisés, on a pu reconnaître un commencement, quoique vague, d'arrangement des cellules en séries rayonnantes, et dès cet instant aussi l'on a pu voir leur contour prendre cet aspect quadrilatère qu'il a chez la tige adulte; mais cet arrangement et cette modification de forme sont devenus évidents dès que la subdivision des faisceaux a disséminé les tubes vasculaires à peu près autour de toute la tige (fig. 19, pl. II), et en même temps la distinction des cellules ligneuses et libériennes s'est montrée facile, grâce à la différence de teinte des deux; enfin, lorsque cette subdivision des faisceaux vasculaires et la dispersion des tubes qu'ils comprenaient n'ont presque plus permis de reconnaître leur état primitif (pl. II, fig. 20), les deux zones ligneuse et libérienne se sont montrées nettement tranchées et faciles à distinguer l'une de l'autre par tous leurs caractères.

Au-dessous de ce dernier point, la tige se présente avec tous les traits distinctifs que j'ai décrits plus haut avec détail, lorsque je l'ai étudiée, pourvue d'une couche ligneuse parfaitement dé-

veloppée; mais l'existence de la Clandestine étant de plus d'une année, ce n'est pas là le point où il est possible de s'arrêter, puisque là son accroissement n'est pas encore terminé.

En fouillant profondément en terre, j'ai trouvé des souches qui avaient sept, huit et dix millimètres de diamètre. La figure 1, planche I, représente la coupe transversale d'une de ces souches de sept millimètres de grosseur, et elle montre l'accroissement considérable qui s'y est opéré dans le corps ligneux, ainsi que dans le liber qui l'entoure. Le premier se compose maintenant de deux couches que distingue l'une de l'autre la teinte des cellules prosenchymateuses. En effet, celles-ci se sont foncées au bord externe de chacune des deux couches, et elles sont restées peu colorées et plus transparentes à leur limite interne; du reste, il existe entre les deux une continuité parfaite de tissu. Aucune interruption, aucune distinction tissulaire, ne permettraient de reconnaître la ligne où elles s'unissent, si la différence de nuance que nous remarquons ici venait à s'effacer; or cette différence paraît s'effacer, en effet, de telle sorte, que sur des souches plus avancées encore que celle-ci, et qui avaient un centimètre au moins de diamètre, je n'ai pu distinguer qu'une masse ligneuse unique, s'étendant, sans interruption et sans la moindre dissemblance de tissu, de la moelle au liber. En voyant le bois de ces vieilles tiges avec leurs vaisseaux nombreux et épars au milieu du prosenchyme, sans étui ni rayons médullaires, il semblait difficile d'y reconnaître la structure si souvent décrite dans le bois des végétaux dicotylés.

Jamais encore je n'ai trouvé de tige qui me parût plus âgée que celle dont je viens de faire mention; jamais non plus je n'en ai rencontré qui me présentât trois couches distinctes.

D'après ces faits, est-il convenable d'admettre que, chez la Clandestine, le bois se forme comme d'ordinaire par des couches dont chacune est le produit de la végétation d'une année, et faudra-t-il, par suite, regarder les souches les plus grosses que j'aie rencontrées comme n'ayant que deux années d'existence? Faudra-

t-il penser, au contraire, que chacune de ces couches ligneuses peut s'accroître pendant plus d'une année? ou bien encore que, les deux premières étant bien réellement annuelles, une fois leur fusion opérée en une masse unique, le bois qu'elles forment continue de grossir par une simple multiplication de ses vaisseaux et de ses cellules allongées? Ce sont autant de questions que je ne puis qu'énoncer, et auxquelles je n'essayerai pas de répondre. Je crois, d'ailleurs, en avoir assez vu pour pouvoir assurer que leur solution présenterait les plus grandes difficultés.

En examinant, au commencement du mois de juin 1842, des tiges déjà assez grosses de ma plante, j'avais observé entre la moelle centrale et la masse ligneuse une zone intermédiaire aux deux, et dont l'existence et la structure m'avaient paru difficiles à expliquer. Dans l'extrait imprimé dans les Annales des sciences naturelles, j'avais fait connaître ce fait, et j'avais exprimé les idées qu'il avait fait naître dans mon esprit. Toutefois, je n'avais exprimé ces idées que comme de simples conjectures, et avec toute la forme dubitative qui me paraissait convenable en pareil cas; aujourd'hui, après avoir pesé attentivement la valeur de cette observation presque isolée, après avoir, de plus, remarqué la différence de grandeur et de forme qui existait entre les cellules de cette couche intermédiaire et celles du corps ligneux, j'en suis venu à ne donner à peu près aucune importance au fait lui-même, et à croire que cette formation anormale ne provenait probablement que d'une altération de la partie extérieure de la moelle centrale. Cette manière de voir me semble plus rationnelle et plus positive que celle que j'avais conçue un instant.

Je viens de donner une idée des modifications que l'âge amène dans la zone ligneuse de la Clandestine; quelques mots suffiront pour faire connaître ce qui se passe pendant le même temps dans la zone corticale proprement dite. Pour celle-ci, la dénomination de liber, à laquelle j'ai eu recours, ne peut guère être employée que par analogie et comme étant usitée chez les autres plantes. Nous avons déjà vu, en effet, qu'il est impossible d'y reconnaître des

feuillets distincts; que c'est une masse continue et unique, s'étendant sans interruption de la périphérie du bois à la couche cellulaire ou médulle externe qui la revêt. Cette continuité qui existe chez elle dans l'état jeune s'y montre tout aussi bien dans un âge avancé, et, dans les souches les plus vieilles que j'aie rencontrées, je n'ai pu reconnaître aucune division en faisceaux isolés ni en couches, soit annuelles, soit de toute autre nature. La seule modification que l'âge y avait apportée consistait uniquement dans une augmentation d'épaisseur, augmentation qui avait eu lieu nécessairement par l'addition de nouvelles cellules libériennes qui s'étaient formées sur la ligne moyenne de végétation de la tige entière, et qui, en continuant les séries rayonnantes par leur extrémité interne, avaient repoussé en dehors tout le système cortical déjà existant; mais cet effet s'était produit d'une manière telle, qu'il était impossible d'y reconnaître aucun point d'arrêt: de là aussi cette couche corticale ou libérienne, quelque épaisse qu'elle fût, ne pouvait aider en rien à reconnaître les effets de la végétation par années chez la Clandestine. Enfin, j'ai déjà fait remarquer que l'adhérence qui avait existé d'abord entre le liber et le bois avait presque entièrement disparu chez les vieilles tiges, quoique les files de cellules de l'un et de l'autre eussent toujours conservé leurs premiers rapports de position.

CHAPITRE II.

DE LA RACINE.

Si l'étude de la tige de la Clandestine a exigé de longs détails, celle de la racine ne m'arrêtera pas longtemps; en effet, à part quelques traits particuliers, elle reproduit entièrement l'organisation que je viens de faire connaître. Je vais donc me borner à exposer les caractères qui lui sont propres, les figures qui accompagnent ce travail rendant toute explication inutile sur le reste.

La moelle manque dans la racine chez la Clandestine, comme cela est d'ailleurs assez ordinaire chez les autres plantes; de là, le corps ligneux en forme seul la partie centrale, et sa structure est absolument semblable ici à celle que nous venons de reconnaître plus haut dans la tige : ce sont toujours de gros vaisseaux épars au milieu de cellules prosenchymateuses, disposées côte à côte en séries rayonnantes (pl. III, fig. 21, 22); seulement, j'ai cru remarquer que généralement les vaisseaux les plus larges occupent ici le centre et forment comme l'axe de cette racine. Rien ne distingue sa couche libérienne de celle de la tige. En dehors du liber, l'enveloppe cellulaire acquiert une épaisseur qui semble être à peu près égale à celle qu'elle a dans la tige; mais, dans la racine, elle présente cette particularité que, vers l'extérieur, son tissu devient encore plus lâche et qu'il forme des lacunes irrégulières sous-épidermiques. Les cellules qui composent cette couche sont, comme dans la tige, remplies de gros grains de fécule qui leur enlèvent leur transparence. De même la couche épidermique est absolument semblable à celle de la tige, pour la forme et la grandeur de ses cellules; seulement, leur disposition diffère quelque peu, leurs séries étant ordinairement transversales.

J'ai montré plus haut que, dans la tige, les deux ou trois couches de cellules sous-jacentes à l'épiderme grossissent graduellement, et ressemblent, du reste, tout à fait à toutes les autres de l'enveloppe cellulaire. Ici nous trouvons sous l'épiderme une couche de cellules qui se distinguent de celles de l'épiderme par leur grandeur, et de celles de l'enveloppe cellulaire proprement dite par l'absence de ces gros grains de fécule si remarquables chez ces dernières. Ces cellules forment une couche continue; elles ne sont ni arrondies, ni lâches, comme celles de l'enveloppe cellulaire, mais leur contour est ordinairement hexagonal, et elles se juxtaposent par des faces planes. C'est au-dessous de cette couche que commencent les lacunes de l'enveloppe cellulaire.

La structure que je viens de décrire est celle des racines déjà bien développées; mais chez les petites radicelles on remarque quelques particularités qu'il est bon de noter. Ainsi les figures 23, 24, planche III, montrent l'organisation d'une de ces radicelles qui n'avait pas un millimètre de diamètre. Les deux coupes que reproduisent ces deux figures ont été faites à la suite l'une de l'autre, la dernière plus près de l'extrémité. On voit que leur axe ligneux est formé d'un petit nombre de gros vaisseaux inégaux et disposés sans ordre, dont un surtout se fait remarquer par ses fortes dimensions. Les cellules qui entourent ces vaisseaux, et qu'une coupe longitudinale fait reconnaître pour prosenchymateuses, ne se laissent pas encore distinguer nettement en ligneuses et libériennes; elles ne sont pas encore rangées en séries rayonnantes; de plus, leur coupe transversale est semblable à celle des cellules hexagonales ordinaires, et non à celles que nous avons observées dans la tige et dans la racine adulte de notre plante. Il est facile aussi de voir, en comparant l'une à l'autre ces deux coupes de la même racine, que le nombre des vaisseaux va en diminuant vers son extrémité, qui est uniquement celluleuse comme de coutume.

J'ai examiné d'un autre côté des racines très-grosses (de $0^m,005$, 0.006 de diamètre), et je n'y ai jamais encore reconnu de couches ligneuses distinctes.

Mais ce que les racines de ma plante présentent de plus remarquable consiste dans les suçoirs, par lesquels elle se fixe aux racines du peuplier d'Italie, du saule, de l'aune, etc. et par lesquels elle en retire les sucs qui servent à sa nutrition.

Les suçoirs se présentent sous la forme de petits corps charnus, portés sur les côtés ou par l'extrémité d'une petite racine, qui souvent ne dépasse pas ou n'atteint pas même un millimètre de diamètre (pl. II, fig. 12). Parfois cette racine semble s'être entièrement dilatée et être, en quelque sorte, passée tout entière dans ce corps; parfois aussi elle semble n'avoir pas été épuisée tout à fait par la formation du suçoir, au delà duquel elle se

prolonge en une petite pointe; enfin, dans d'autres cas, on la voit porter sur ses côtés un ou plusieurs de ces petits appareils, et se continuer au delà d'eux sans paraître avoir perdu de sa force ni de sa grosseur. Le plus souvent les suçoirs sont isolés; mais il en existe aussi de groupés, et j'en ai vu sur une radicelle assez forte trois fort volumineux qui se trouvaient immédiatement à la suite l'un de l'autre.

Ces petits appareils acquièrent ici des dimensions beaucoup plus fortes que chez le *Lathræa squamaria :* en effet, tous ceux que M. Bowman a observés ou figurés, et ils sont en grand nombre, n'ont guère qu'un millimètre dans leur sens le plus long, tandis que j'en ai trouvé fréquemment chez la Clandestine qui avaient deux et même trois millimètres de largeur : le terme moyen paraît être chez eux un peu inférieur à deux millimètres.

La forme de ces petits appareils revient assez bien à celle d'un hémisphère souvent dilaté sur les bords de sa section circulaire, par laquelle il s'applique sur les racines qui le nourrissent. L'adhérence qu'il contracte avec elles ne paraît pas être jamais forte, car tous ceux que j'ai vus se sont détachés sous une traction assez légère. Dans aucun cas, je n'ai pu les voir s'enfoncer dans la substance de la racine qui les nourrit.

Je dois dire ici que, mes recherches sur la Clandestine ayant eu un but anatomique bien plutôt que physiologique, je me suis plus occupé de la structure des suçoirs eux-mêmes que de leurs rapports avec la racine qu'ils attaquent : c'est là une différence importante entre mon travail et celui de M. Bowman sur le *Lathræa squamaria*. Toutefois, je crois pouvoir garantir l'exactitude des faits que j'énonce, lorsqu'ils expriment une dissemblance dans les résultats obtenus par moi sur ma plante, comparativement à ceux signalés par M. Bowman sur la sienne. Si l'occasion s'offre de nouveau pour moi, je tâcherai de compléter l'histoire que je présente ici, en y faisant entrer les considérations physiologiques dont je ne me suis occupé encore qu'accessoirement;

mais, pour le moment, je dois me borner à l'exposé des faits anatomiques qui me sont acquis.

L'arbre auquel j'ai trouvé les suçoirs fixés le plus communément est le peuplier d'Italie; mais ils s'attachent aussi au saule, à l'aune et au charme : j'en ai même quelquefois observé qui tenaient à des racines déjà fortes de la Clandestine elle-même.

La structure de ces organes ne peut être bien reconnue qu'à l'aide de plusieurs coupes faites en divers sens. Voici les traits généraux qu'elle m'a paru présenter.

La surface à peu près plane par laquelle se colle le suçoir ne paraît pas être absorbante dans toute son étendue, mais seulement dans sa portion moyenne; ses bords forment autour de celle-ci une sorte de bourrelet qui facilite nécessairement et augmente l'adhérence en interdisant l'accès de l'air extérieur[1]. Cette portion moyenne en elle-même est entièrement dépourvue d'épiderme; elle est formée de cellules allongées et très-étroites, disposées régulièrement l'une à côté de l'autre, leur longueur étant perpendiculaire à la surface sur laquelle elles s'appliquent. On peut aussi reconnaître, sur la figure (pl. II, fig. 14) qui représente ces cellules, que leur membrane est plus épaisse à la face adhérente du suçoir que partout ailleurs.

Sous cette première couche, il s'en trouve une deuxième formée de cellules un peu plus courtes et plus larges, dont le parallélisme est moins exact, et qui semblent tendre à devenir un peu obliques vers les bords de la surface; enfin, une troisième couche se montre encore, mais elle est composée de cellules qui sont plus courtes et plus larges, quoique l'on puisse néanmoins reconnaître que leur longueur est perpendiculaire à leur

[1] Je n'ai jamais reconnu sur la face adhérente l'existence de cette sorte de processus ou de cette tarière, si l'on veut, que M. Bowman a trouvée presque constamment chez sa plante, et grâce à laquelle, comme aussi sans doute en s'aidant de quelque autre action moins mécanique, elle pénètre à travers l'écorce et jusqu'au bois des racines; mais je dois dire aussi que M. Bowman a lui-même trouvé chez le *Lathræa squamaria* des suçoirs sans tarière, et qui reproduisaient absolument la forme de ceux que j'ai observés en grand nombre chez la Clandestine.

surface d'adhérence. Sous celle-ci, les utricules ne semblent plus former de couches régulières : les plus extérieures sont même obliques ou perpendiculaires, dans leur plus grande longueur, à celles dont je viens de parler; de plus, elles vont en grossissant rapidement à mesure que l'on pénètre dans l'intérieur du petit appareil, où elles forment bientôt un tissu lâche et à grandes cellules.

Les cellules que je viens de décrire, et qui doivent être l'organe absorbant du suçoir, quoique leur forme ne ressemble pas du tout à celle des cellules des spongioles, mais que cette forme reproduise bien plutôt celle du prosenchyme; ces cellules, dis-je, se distinguent de tout le reste du tissu de ces organes par leur teinte plus foncée et brunâtre.

Une coupe perpendiculaire d'un suçoir bien formé et latéral à une racine va m'aider à faire bien comprendre la disposition des tissus de ces appareils absorbants (pl. II, fig. 13). La base à laquelle se rattache le tout est une petite racine dont on peut aisément reconnaître le corps central. Dans celui-ci, les vaisseaux du bois conservent leur forme et leur disposition ordinaires; de plus, du côté opposé au suçoir, on trouve autour du corps ligneux la couche libérienne, l'enveloppe cellulaire et l'épiderme ordinaires, qui n'ont subi aucun dérangement; mais du côté du suçoir, la disposition, la nature de ces parties et de leurs tissus ont totalement changé.

Du faisceau vasculaire de la racine partent des vaisseaux moniliformes nombreux, à cellules grosses et courtes, disposées irrégulièrement l'une à la suite de l'autre, de telle sorte que l'ensemble du vaisseau en devient très-sinueux. Ces vaisseaux s'écartent et s'entortillent; leurs cellules se multiplient. Dans l'ensemble général, leur disposition revient assez à celle d'un plan à peu près circulaire et perpendiculaire à l'axe de la racine. Tout autour de ces vaisseaux se trouve du tissu cellulaire ordinaire, à petites mailles, qui va se rattacher aux cellules libériennes de la tige, mais qui n'en a pas gardé la forme et qui est

devenu simplement parenchymateux. Le corps entier, formé par ces vaisseaux sinueux et par le tissu cellulaire qui les entoure et les réunit en un seul tout, constitue ce que l'on pourrait nommer le *noyau* du suçoir. Sa forme, sur une coupe perpendiculaire à la longueur de la racine, revient assez à celle d'une ellipse, dans laquelle le corps ligneux de cette racine occuperait l'un des foyers.

Entre ce noyau et la surface absorbante du suçoir se trouve une masse considérable d'un tissu parenchymateux lâche, à grandes cellules parfaitement transparentes, dépourvues de grains de fécule. Celles-ci décroissent vers l'extérieur, et, comme je l'ai montré plus haut, elles vont se fondre, par une transition ménagée, dans les cellules marginales qui occupent le centre de la surface d'adhérence. Une fois introduit par l'action de cette dernière surface, le suc de la plante-mère doit trouver un passage très-facile à travers ce tissu et arriver sans peine au noyau, par suite au corps de la racine elle-même.

Tout autour du noyau et de la masse celluleuse moyenne dont je viens de parler, règne une sorte de cadre large, formé par une couche épaisse d'un tissu cellulaire qui fait suite à l'enveloppe cellulaire de la racine. Cette couche s'étend jusqu'à la surface d'absorption; ses cellules, grandes et lâches, décroissent vers l'extérieur; dans la portion voisine de la racine, elles contiennent de nombreux grains de fécule, et plus loin elles se distinguent des cellules de la masse centrale par la teinte sombre que prennent leurs parois sous le microscope, sans doute par suite de la présence de l'air dans leurs méats.

Les bords à peu près circulaires de la surface adhérente du suçoir sont formés par une sorte de bourrelet celluleux de couleur brunâtre, dont le tissu acquiert parfois une assez grande épaisseur; enfin, le tout est recouvert, jusqu'aux bords de la surface d'absorption, par une couche épidermique qui se continue avec celle de la racine elle-même, et qui présente le même aspect et la même organisation.

Les divers tissus que je viens de faire connaître sont parfaitement continus dans toute la masse du suçoir; leur quantité relative et leur configuration peuvent varier; mais je crois que leur disposition générale est constamment la même.

De l'exposé que je viens de faire, il me paraît résulter clairement que les deux principaux organes d'absorption, et par suite de nutrition, chez la Clandestine, consistent dans les cellules étroites et perpendiculaires à la face adhérente du suçoir, et dans les vaisseaux moniliformes sinueux et irréguliers de son noyau. J'ajouterai, en terminant, que ceux-ci sont uniquement le produit d'une végétation locale, d'une vraie multiplication, car la quantité de ces vaisseaux contenue dans un seul suçoir est souvent considérable; et cependant, dans une racine qui portait trois de ces appareils absorbants, l'un à la suite de l'autre, le nombre des vaisseaux du corps ligneux qui se montraient au delà de chacun d'eux n'avait subi qu'une diminution insensible ou du moins très-peu appréciable.

Si nous comparons maintenant l'organisation que je viens d'exposer à celle que M. Bowman a reconnue chez le *Lathræa squamaria*, nous remarquerons entre les deux quelques différences. Les plus importantes, selon moi, consistent dans l'absence de la tarière et dans la nature particulière du tissu à cellules étroites et allongées qui occupe le centre de la surface d'adhérence. Un autre point, bien digne aussi d'être remarqué, consiste en ce que, chez la Clandestine, les vaisseaux moniliformes n'arrivent pas jusqu'à la surface abondante, tandis que, chez le *Lathræa squamaria*, M. Bowman les a vus traverser toute l'épaisseur du suçoir, et envoyer même des rameaux jusque dans la tarière. A la vérité, l'habile observateur anglais a trouvé aussi d'autres suçoirs qui ne présentaient pas cette organisation, et qui se rapprochaient beaucoup plus de celle que j'ai fait connaître. Il me semble bien difficile de concevoir que, par l'effet du hasard, tous les suçoirs que j'ai examinés chez la Clandestine, et ils sont en grand nombre, présentassent une structure exceptionnelle; je crois bien plus naturel d'ad-

mettre que le plan d'organisation que j'ai exposé est bien le plan normal, et que les dissemblances qu'il montre chez la Clandestine, comparativement à ce que l'on voit chez le *Lathræa squamaria*, tiennent uniquement à la différence de ces deux espèces.

CHAPITRE III.

DES FEUILLES.

Les feuilles de la Clandestine constituent un organe remarquable par son organisation; leur structure, fort simple en apparence, présente cependant une complication dont il est facile de se convaincre, en s'aidant de l'emploi du microscope. Pour nous faire une idée suffisamment exacte de cet organe foliaire, étudions-le d'abord dans son état adulte, et suivons-le ensuite dans son développement, en tenant compte des modifications organogéniques qu'il subit.

Observées dans leur état de développement complet, les feuilles de la Clandestine (pl. III, fig. 25 et 26 A) ressemblent à des écailles épaisses, charnues et blanches. Leur configuration générale est réniforme; leur sommet est faiblement indiqué, et leur base se prolonge des deux côtés en deux oreillettes arrondies. Comme elles sont opposées, ces oreillettes, dans chaque paire, embrassent entièrement la tige; leur surface est absolument glabre, tant en dessus qu'en dessous. Leur face inférieure est convexe, irrégulièrement et assez faiblement bosselée; leur face supérieure est concave dans son ensemble, et elle présente dans son milieu une large dépression longitudinale qui sépare deux côtés convexes arrondis. Leur bord est en arête sur les parties qui avoisinent le sommet; il est arrondi sur les oreillettes. Leurs deux faces sont marquées de lignes rayonnantes, alternativement claires et foncées, qui indiquent des lacunes intérieures dont il sera question plus loin. Chaque ligne foncée répond à une de ces lacunes.

On peut distinguer dans chacune de ces feuilles deux portions

différentes; en effet, la faible dépression basilaire et médiane de la face supérieure correspond à une plus forte dépression triangulaire de la face inférieure, nettement limitée et bordée par la substance charnue. La portion comprise entre ces deux dépressions est mince, d'un tissu plein, plus serré que celui du reste de l'organe; elle sert à fixer la feuille sur sa tige, et les faisceaux vasculaires n'y subissent que la première et la plus simple subdivision.

Quoique, dans cette première portion de la feuille, le faisceau vasculaire primitif se divise ainsi une première fois, je crois pouvoir la regarder comme pétiolaire, à cause de sa position et de son organisation, si différentes de celle de la deuxième partie, que j'appellerai dès lors laminaire, et qui sera pour moi le limbe proprement dit.

Les dimensions les plus ordinaires de ces feuilles adultes sont de $0^m,013$ ou $0^m,014$ de largeur sur $0^m,01$ de longueur, et sur $0^m,003$ dans leur plus grande épaisseur. Elles sont opposées-croisées, assez distantes sur les tiges ou les branches un peu enfoncées, très-rapprochées et très-serrées l'une contre l'autre sur les branches à fleurs, et dont l'extrémité atteint la surface du sol. Sur celles-ci, elles affectent assez ordinairement une disposition telle, que celles du milieu dépassant en dimensions celles de la base et du sommet, l'ensemble du groupe en devient un peu fusiforme.

Si l'on coupe l'une d'elles horizontalement entre ses deux faces, on y reconnaît l'organisation suivante (pl. III, fig. 27). De la branche qui la porte se détache un seul vaisseau vasculaire qui, arrivé à la base de la portion pétiolaire, se divise en trois : les deux faisceaux latéraux provenant de cette division s'écartent sous un angle très-ouvert et se dirigent vers les côtés de la feuille; le médian se continue en ligne droite, et ce n'est qu'à l'extrémité de cette portion mince qu'il se ramifie en un petit nombre de faisceaux déliés. Chacun des deux faisceaux latéraux, arrivé aux bords de la partie pétiolaire de la feuille, se partage en deux

branches qui marchent en direction opposée; l'une monte vers le sommet, l'autre descend dans l'oreillette. Chacune de ces deux branches émet de son côté externe trois ou quatre rameaux qui atteignent le milieu de la largeur de la portion laminaire, et là se subdivisent en ramules déliés, qui à leur tour se disséminent et se perdent dans le tissu. On voit ainsi qu'au total chaque côté de ces organes contient ordinairement neuf ou dix faisceaux vasculaires analogues aux nervures des feuilles ordinaires.

Cette même coupe de la feuille nous montre que le tissu de son limbe est loin d'être plein, qu'il présente, au contraire, de nombreuses et grandes lacunes disposées dans un sens rayonnant, et dont le contour, généralement oblong, est aussi plus ou moins sinueux. Chacune de ces lacunes est placée entre deux des rameaux vasculaires que je viens d'indiquer : l'une d'elles répond au sommet de la feuille, et elle est par conséquent impaire; les autres sont disposées symétriquement sur les deux côtés, et leur longueur va croissant du sommet jusque vers l'oreillette; elle décroît ensuite dans l'intérieur de celle-ci.

Ces lacunes sont disposées comme des plans superposés et rayonnants, de sorte que, sur une coupe verticale perpendiculaire aux deux faces, elles forment des lignes parallèles.

Si l'on coupe ces mêmes feuilles en deux moitiés, dans le sens de leur longueur (pl. III, fig. 26 B), on voit que leur portion mince, que j'ai nommée pétiolaire, s'étend réellement plus loin qu'on ne le croirait en examinant à l'extérieur l'organe tout entier. La substance charnue qui l'entoure s'élargit sur ses bords et s'étend en un rebord qui se recourbe vers le haut; il en résulte une sorte de gouttière, ou de cavité à peu près demi-circulaire, qui communique librement avec l'atmosphère par une fente étroite.

Cette organisation générale se reproduit dans les feuilles du *Lathræa squamaria*, quoiqu'un peu modifiée sous quelques rapports : ainsi, les lacunes paraissent y être moins nombreuses, puisque M. Bowman dit qu'on y en trouve seulement de six à

douze, tandis que chez la Clandestine ce nombre s'élève ordinairement de dix-sept à dix-neuf; de plus, le même auteur dit avoir reconnu chez sa plante qu'une fente très-étroite fait communiquer les lacunes avec un espace analogue à la gouttière que je viens de signaler à la face inférieure des feuilles, et, par cet intermédiaire, avec l'air atmosphérique. Je n'ai pas vu de disposition semblable chez la Clandestine; les lacunes m'ont paru toujours fermées, entourées de tous les côtés par la substance même de la feuille, et, par suite, sans communication directe avec l'extérieur.

Aidons-nous maintenant du secours du microscope pour pénétrer plus profondément dans cette organisation singulière que je viens d'esquisser seulement à grands traits.

ARTICLE 1er.

ÉPIDERME ET STOMATES.

Les feuilles de la Clandestine présentent sur leurs deux faces un épiderme qu'il est facile de détacher, et dont on peut aisément reconnaître la structure. Il se compose d'une simple couche de cellules, dont la forme revient à celle d'un prisme très-court, à six pans plus ou moins inégaux; les deux bases de ce prisme sont généralement un peu convexes. Chacune de ces cellules a conservé son nucléus ou cytoblaste, même chez la feuille adulte (pl. IV, fig. 30, 31). Si l'on compare l'épiderme de la face supérieure à celui de la face inférieure, on n'y reconnaît aucune autre différence, si ce n'est que le contour des cellules est généralement sinueux chez celle-ci; du reste, les parois de ces cellules sont également minces, soit en dehors, soit en dedans; sur leurs côtés, elles se réunissent, comme d'ordinaire, à leurs voisines, sans laisser de méats à leurs angles de jonction.

Ces cellules épidermiques sont beaucoup plus petites que celles qui composent le tissu sous-jacent, et leur disposition me paraît être absolument sans relation avec celle du mésophylle.

Ce que l'épiderme de ces feuilles m'a présenté de plus frappant est l'existence des stomates. Jusqu'ici l'on a regardé toutes les plantes parasites sur des racines comme étant absolument dépourvues de ces petits appareils. Par exemple, on lit dans l'Organographie végétale de M. de Candolle, p. 84, que « toutes les plantes vasculaires vraiment parasites (sur racines sans doute), et qui ne sont pas de couleur verte, manquent de stomates, soit sur leur tige, soit même sur les rudiments avortés de leurs feuilles squamiformes : tels sont, continue le célèbre auteur, les Orobanches, les *Lathræa*, etc. » De même M. Rob. Brown, dans son mémoire sur le *Rafflesia* (*Transact. de la soc. Linn. de Lond.* vol. XIII, ann. 1828) dit (p. 210) : « qu'il a inutilement cherché sur cette plante les stomates, qui peut-être n'existent pas sur les feuilles imparfaitement développées des plantes parasites sur des racines[1]. » Enfin, l'assertion qui m'a le plus frappé à ce sujet est celle de M. Bowman, qui, dans son examen des feuilles du *Lathræa squamaria*, dit positivement « que la cuticule de ces feuilles est privée de pores sur ces deux surfaces » (*the cuticle of the leaves is destitute of pores on both its surfaces*). Est-ce une différence d'organisation, qui serait bien surprenante chez deux plantes si analogues par leur mode de végétation et par tout le reste de leur structure, ou bien les instruments dont se servait M. Bowman ne lui auraient-ils pas montré les stomates qui existeraient cependant? Je ne me permettrai de répondre ni à l'une ni à l'autre de ces questions. Ce que je ferai remarquer seulement, c'est que, chez la Clandestine, un examen, même superficiel, et un simple grossissement de 50 diamètres (pl. IV, fig. 41), suffisent parfaitement pour faire reconnaître et l'existence et même la forme des petits appareils dont il s'agit maintenant.

La distribution de ces stomates m'a paru être tout à fait irrégulière; ils se montrent sur les deux faces de la feuille, et je ne puis dire qu'ils soient plus fréquents sur l'une que sur l'autre.

[1] De même Meyen, dans sa Géographie botanique, indique l'absence des stomates comme constituant une loi chez les parasites sur racines ou vrais parasites.

Dans certaines portions de la surface, ils se montrent nombreux et rapprochés, au point de n'être séparés que par trois ou quatre cellules. Il paraît même que quelquefois ils se groupent et se touchent, car j'en ai une fois rencontré deux qui étaient absolument en contact. Ailleurs, au contraire, ils se montrent fort éloignés les uns des autres, et c'est ainsi que, sur un grand lambeau d'épiderme, je n'en ai vu aucun dans une longueur de $0^m,0025$.

Les rapports de position des stomates avec les cellules sont assez variables; souvent ils se trouvent placés au point de concours de plusieurs cellules épidermiques, qui s'étendent ensuite autour d'eux en rayonnant. Ailleurs, ils se montrent entre deux ou plusieurs de ces cellules situées les unes en avant, les autres en arrière d'eux (pl. IV, fig. 38); enfin, il en est qui semblent rejetés à l'un des angles d'une cellule de l'épiderme (pl. IV, fig. 39).

Quelle que soit leur situation, les stomates adultes présentent une structure identique et des plus simples. Deux cellules un peu plus que demi-circulaires, à contour extérieur régulièrement arrondi, se touchent, pour les former, par leur côté rectiligne. Au milieu de leur ligne d'union se montre la bouche propre, ou l'ostiole du stomate, de forme ovale, un peu allongée dans le sens de cette ligne. Ces deux cellules ne présentent à leur intérieur aucune granulation; leur transparence est parfaite, et elle permet de reconnaître avec la plus grande facilité le bord des cellules sous-jacentes. On voit par là, comme le montre la figure 39 (pl. IV), que les cellules qui les supportent ne sont pas en contact immédiat, et qu'ainsi elles laissent sous chacun d'eux un vide correspondant à l'aréole centrale.

Une coupe verticale de ces organes (pl. IV, fig. 40) achève de les faire connaître. On voit ainsi qu'à chaque point où se trouve un stomate, les cellules épidermiques qui l'entourent se relèvent en une sorte de mamelon terminé par ce petit appareil. Les cellules stomatiques elles-mêmes sont un peu moins épaisses

que celles de l'épiderme, et leur section verticale est arrondie ou triangulaire, à angles fortement émoussés.

Le plus souvent, au-dessous des stomates, le tissu sous-jacent est séparé de l'épiderme, de manière à former une chambre sous-épidermique, dont la longueur égale celle de trois ou quatre cellules du tissu lâche de la feuille (pl. IV, fig. 40); mais ailleurs cette séparation manque, et il ne reste plus alors que le faible vide formé par les bords soulevés des cellules marginales du stomate.

ARTICLE 2.

MÉSOPHYLLE.

Le mésophylle des feuilles de la Clandestine se compose, suivant l'ordinaire, d'une partie vasculaire et d'une partie cellulaire, dans laquelle sont creusées les lacunes. Fixons-nous sur chacune de ces deux parties.

§ 1er. Faisceaux vasculaires ou nervures.

Pour les faisceaux vasculaires, on peut se borner à les étudier uniquement dans la portion pétiolaire de la feuille, car ce sont de simples ramifications de ces premiers troncs qui vont ensuite se répandre dans le tissu charnu du limbe. Ces faisceaux vasculaires sont d'une structure compliquée.

Ils sont entourés d'une couche de cellules allongées ou prosenchymateuses, cylindriques ou prismatiques, par pression réciproque, réunies bout à bout en séries longitudinales. Les parois de ces cellules sont assez minces, transparentes; leurs bases superposées sont généralement horizontales, au moins dans celles qui entourent immédiatement les vaisseaux, car elles m'ont paru plus obliques chez les extérieures, qui sont aussi moins régulièrement cylindriques. Cette enveloppe prosenchymateuse accompagne les vaisseaux vasculaires dans leurs subdivisions, et elle

paraît ne les abandonner que vers leur extrémité, lorsque les vaisseaux se sont presque entièrement isolés les uns des autres, en se dispersant au milieu du tissu cellulaire.

Ces faisceaux comprennent diverses modifications des vaisseaux:

1° Des fausses trachées, dont la spiricule est régulière et les tours écartés. 2° Cette première modification de vaisseaux passe, par des nuances que l'observation directe permet de suivre, à une deuxième modification bien voisine, à celle des vaisseaux réticulés. On voit, en effet, des tubes chez lesquels la spiricule se bifurque, se ramifie sur plusieurs points, formant ainsi une première ébauche des réticulations. Ailleurs, les ramifications se montrent plus nombreuses, et deviennent de véritables branches anastomotiques qui couvrent d'un réseau à mailles plus ou moins nombreuses, plus ou moins serrées, la paroi interne du tube vasculaire, devenu par là un *vaisseau réticulé* nettement caractérisé. Je crois même pouvoir assurer qu'un même tube, examiné sur divers points de sa longueur, présente quelquefois ces diverses nuances l'une à la suite de l'autre, démontrant ainsi, de la manière la plus évidente, l'origine des réticulations. 3° Des vaisseaux ponctués. Les vaisseaux ponctués des organes foliaires étant entièrement analogues à ceux de la tige, et ne donnant lieu à aucune considération importante, je me borne à les indiquer ici.

§ 2. Tissu cellulaire.

Le tissu cellulaire des feuilles de la Clandestine se présente sous deux modifications importantes: l'une d'elles constitue les parois des lacunes; l'autre remplit tout l'espace qui se trouve, soit entre les lacunes elles-mêmes, soit entre elles et l'épiderme.

A. La première de ces variétés est formée de cellules d'assez faibles dimensions, assez serrées l'une contre l'autre, polyédriques (pl. IV, fig. 29 et 45); leurs parois sont jaunâtres, médiocrement transparentes; elles forment de trois à cinq ou six couches, et elles augmentent de dimensions à mesure qu'elles

s'éloignent des lacunes. Elles contiennent des granules, mais beaucoup plus petits que ceux que renferme le reste du tissu de la feuille. Ces granules grossissent eux-mêmes en s'éloignant de la lacune; ils sont évidemment tous de même nature, car ils bleuissent tous par l'iode.

Ce tissu à petites mailles me paraît être le siége principal de l'énergie vitale de la feuille; car, comme nous le verrons plus loin, ce n'est jamais qu'au milieu de lui que se forment les lacunes. Le reste du tissu cellulaire semble, sous le rapport organogénique, n'être qu'un moyen de remplissage, et il ne se forme qu'à mesure que les lames du premier s'écartent l'une de l'autre, laissant ainsi entre elles un espace que le second vient aussitôt remplir.

Ce même tissu, à petites utricules, est le plus souvent en rapport avec les vaisseaux : ainsi, d'abord, il forme une couche autour des faisceaux vasculaires, et alors ses grains de fécule se montrent avec les mêmes caractères que dans les parois des lacunes; de plus, lorsque les rameaux vasculaires se subdivisent dans l'intervalle des lacunes, leurs ramifications s'étendent surtout à travers ce tissu.

B. Tout le reste de la masse foliaire est formé par un tissu utriculaire lâche, à grandes cellules, contenant une quantité considérable de grains de fécule volumineux. Ce tissu se présente immédiatement sous la couche épidermique, et ses utricules constituent le plancher des chambres sous-stomatiques; de là il remplit tout l'espace qui existe entre les lames cellulaires qui circonscrivent les lacunes. Ses parois sont très-minces, parfaitement transparentes; ses cellules sont vaguement polyédriques, et leurs faces, plus souvent convexes que planes, laissent entre elles de larges méats. Leur forme et leur grandeur se voient sur la figure 30 (pl. IV), et la disposition relative des deux modifications tissulaires que je viens de décrire est représentée par la figure 28 (pl. III).

Dans la partie de la feuille que j'ai nommée pétiolaire, on ne

trouve aucune lacune, et, par suite, on n'observe qu'un tissu cellulaire uniforme, à grandes cellules, et contenant abondamment de gros grains de fécule; seulement, ce tissu étant plus serré ici que dans le reste de la feuille, les utricules en sont polyédriques; leur coupe est hexagonale, et leurs méats sont incomparablement plus étroits.

Selon M. Bowman, les feuilles du *Lathræa squamaria* ne présenteraient que la seconde modification de tissu cellulaire, celle à grandes utricules; ce tissu unique s'étendrait jusqu'aux lacunes dont il formerait la paroi immédiate; il serait même plus serré que chez la Clandestine. Le savant Anglais dit, en effet, que la feuille entière de sa plante « se compose de substance celluleuse, « principalement en compartiments hexagonaux, ressemblant à « nombre de cristaux dodécaédriques creux, étroitement unis « ensemble. »

§ 3. Fécule.

La fécule se présentant en grande abondance dans toutes les grandes cellules des feuilles, et y affectant, de plus, les mêmes formes et les mêmes dimensions que dans tout le tissu cellulaire à larges mailles des autres parties de la plante, je jetterai ici un coup d'œil sur elle, et les considérations que je présenterai maintenant se rapporteront également à celle des autres organes.

La fécule (pl. IV, fig. 49) se présente dans les feuilles de la Clandestine sous des dimensions très-diverses, depuis celles des petits granules contenus dans le tissu cellulaire serré des parois des lacunes jusqu'aux grains volumineux qui remplissent à peu près les cellules du tissu lâche. Dans celles-ci même les dimensions des grains varient assez; mais rarement elles dépassent une longueur de $0^{mm},083$. Leur conformation la plus ordinaire est celle d'un ovoïde, parfois assez allongé, dont une extrémité est notablement renflée (*a*, fig. 49); ailleurs, elle revient à un ellipsoïde irrégulier, à peu près également aminci vers ses deux bouts (*e*, fig. 49). Quelquefois ses grains ont une section trian-

gulaire ou quadrilatère, à angles plus ou moins émoussés (*b*, *c*, fig. 49); enfin, quelques-uns ont une forme oblongue beaucoup moins arrêtée, et qui ne revient à celle d'aucun solide géométrique (*d*, fig. 49).

Quelles que soient ses formes, la fécule de la Clandestine ne m'a montré qu'un seul hile, assez fortement excavé et toujours situé sur la partie la plus renflée du grain : ainsi, sur les grains ovoïdes, qui sont les plus nombreux, il se trouve à l'extrémité renflée, etc. Il est entouré d'un rebord, et tout autour de lui s'étend sur toute la surface du grain une série de stries concentriques souvent sinueuses et inégalement marquées. Vers l'extrémité opposée au hile, ces stries ne sont plus que de légères lignes à peine indiquées.

Je ne puis m'empêcher de présenter ici quelques observations sur la manière dont M. Bowman a considéré les grains que renferme le tissu foliaire du *Lathræa squamaria,* grains que leur position, leur forme même, et leurs dimensions reproduites par les figures et les descriptions de l'auteur, ne me permettent de considérer que comme absolument analogues à ceux dont il est question maintenant, et, par suite, comme de nature amylacée. En les voyant conserver leur forme et leur grandeur sous des lames de mica, le savant Anglais avait d'abord pensé que c'étaient des vésicules distendues par de l'air. Plus tard, en expérimentant sur eux de diverses manières et à l'aide de réactifs, tels que l'alcool, l'acide sulfurique, le prussiate de potasse et l'acétate de plomb, il admit que c'étaient des vésicules remplies d'une sorte de liquide sucré, incapable de cristallisation, et destiné à servir à la nutrition de la plante. L'action de l'iode aurait, je crois, suffi pour faire reconnaître dans ces petits corps des grains de fécule.

J'ajouterai qu'il est un passage qui achève de rendre inexplicable pour moi cette partie du mémoire, si remarquable d'ailleurs, du savant Anglais : c'est celui où il est dit que, pour avoir ces petits corps isolés par l'effet de la macération de la feuille dans

l'eau, il faut d'abord enlever soigneusement la fécule avec un pinceau, et qu'ils se trouvent ensuite au fond de l'eau comme une masse de particules impalpables de verre pilé. Que serait-ce donc que cette fécule distincte des prétendues vésicules? J'avoue que je ne le conçois nullement.

§ 4. Lacunes.

J'ai déjà dit que les feuilles de la Clandestine sont creusées de nombreuses et grandes lacunes, et j'ai indiqué la disposition en plans rayonnants sous laquelle elles se présentent. Un examen plus attentif de ces cavités y fait aisément reconnaître des particularités fort remarquables.

Leurs parois sont entièrement recouvertes de papilles d'une organisation compliquée. Ces papilles sont tellement nombreuses que généralement elles se touchent, et si elles avaient une action quelconque sur l'air des lacunes, elles pourraient faire considérer ces cavités comme des sortes de poches respiratoires. C'est là, en effet, le rôle que leur assigne M. Bowman chez le *Lathræa squamaria*. Partant de l'absence des stomates chez sa plante, il admet que les lacunes et leurs nombreuses papilles sont le moyen auquel la nature a eu recours pour leur permettre d'exercer sur l'air l'action nécessaire à l'existence du végétal tout entier. Il pense que l'on ne peut méconnaître dans ces papilles glandulaires de vrais absorbants cuticulaires. « Ces feuilles, ajoute-t-il, destinées « à agir, non-seulement dans l'obscurité, mais encore enterrées, « ont reçu de la nature une disposition particulière. Si la cuticule « avait été pourvue de stomates (*air-valves*), le sol les aurait con- « tinuellement bouchés et aurait empêché leur action. Les organes « absorbants sont donc éloignés par une précaution aussi belle que « sage, et placés dans les chambres enroulées, creusées pour eux « dans l'intérieur des feuilles, où ils peuvent remplir sûrement et « en cachette l'emploi qui leur est assigné. »

Le principe de cette manière de voir, l'absence des stomates,

ne se retrouvant pas chez la Clandestine, je ne chercherai pas à faire l'application à cette plante du raisonnement tout entier; d'ailleurs, les fonctions respiratoires peuvent très-bien être exercées chez elle par le tissu très-lâche, à grosses cellules, qui forme la plus forte portion de la masse de la feuille.

Chacune des papilles dont il s'agit se compose d'un pédicule et d'une tête (pl. IV, fig. 45 et 46). Le pédicule est court et cylindrique; il s'élève, en général, perpendiculairement au centre d'une cellule qui sert de base à tout ce petit appareil. La tête est un renflement à deux, trois ou quatre lobes arrondis; chacun de ces lobes est une cellule distincte, à parois transparentes, un peu épaisses; les cloisons de séparation vont se réunir au centre, en un axe commun, lorsque la tête est à trois ou quatre cellules; lorsqu'elle n'est qu'à deux cellules, la cloison est transversale dans le sens le plus étroit, et la tête, dans son ensemble, ressemble à deux petites sphères qui se seraient soudées et fondues à moitié l'une dans l'autre.

La transparence de ces petits appareils est parfaite, et néanmoins je n'ai découvert aucune granulation dans leur intérieur.

Ce n'est pas seulement dans les lacunes des feuilles que se montrent ces papilles; elles se retrouvent encore dans cette cavité en communication avec l'atmosphère, que j'ai dit avoir pour plancher un rebord de la portion charnue de la feuille, et là elles présentent absolument la même forme : or, si dans les lacunes elles sont un produit du tissu cellulaire à petites mailles qui en forme les parois, et je montrerai plus loin que telle est leur origine, ici elles doivent provenir des cellules de l'épiderme qui tapisse les deux côtés de cette cavité; si même on observe avec soin des feuilles encore jeunes, longues, par exemple, de $0^{m},0015$, on trouve çà et là, sur leur portion pétiolaire, quelques papilles analogues aux précédentes, seulement un peu modifiées (pl. IV, fig. 47). Celles-ci ont un pédicule plus long, plus grêle et articulé, formé de deux cellules placées bout à bout; leur tête a la forme lobée ordinaire, mais elle est moins régulière, moins

transparente, et elle paraît remplie d'une matière mucilagineuse.

Sur la face supérieure d'une feuille très-jeune, longue seulement de $0^m,001$, j'ai observé une de ces papilles qui différait des précédentes, parce que son pédicule présentait au-dessous de la tête un article plus large que les autres.

Les papilles que je viens de décrire ne sont pas les seules que portent les parois des lacunes. Entre elles, mais à des intervalles beaucoup plus grands, se montrent des productions d'une structure plus simple; celles-ci consistent en une sorte de bouclier ovale, ne se détachant des parois de la lacune que de la hauteur de sa convexité, fixé par conséquent dans toute sa largeur, transparent et incolore, sans contenu particulier (pl. IV, fig. 48). Une ou deux lignes s'étendent dans le sens du grand axe de l'ellipse et produisent absolument l'effet de fentes qui feraient communiquer ces singuliers organes avec l'air des lacunes.

Les deux espèces de papilles que je viens de décrire existent déjà dans les lacunes des feuilles très-jeunes. Si l'on voulait faire un rapprochement entre elles et les stomates, il me semble que l'on pourrait trouver une certaine ressemblance entre ces appareils de l'épiderme extérieur et les papilles en bouclier, que leur forme pourrait assez bien faire considérer comme des ébauches de stomates intérieurs.

Il résulte, je crois, de l'exposé qui précède que ces feuilles de la Clandestine, que l'on a jusqu'ici regardées comme des organes rudimentaires, comme de simples écailles, présentent une structure fort remarquable, autant et même plus compliquée que celle de la plupart des feuilles aériennes; qu'elles ont, sur un épiderme bien distinct, des stomates bien conformés; que leur mésophylle a une organisation vasculaire et cellulaire très-complexe; enfin que, de plus que les feuilles ordinaires, elles ont une série nombreuse de poches, de cavités pourvues d'appareils particuliers et bien dignes d'attention.

Pour achever l'étude de ces singuliers organes foliaires, sui-

vons-les dans le développement de leurs parties constitutives, et aussi dans le mode de formation de leurs stomates.

ARTICLE 3.

DÉVELOPPEMENT DE LA FEUILLE DANS SON ENSEMBLE.

Peu de temps après sa première apparition, la feuille de la Clandestine se présente sous la forme d'une très-petite écaille orbiculaire, concave en dessus, convexe en dessous, et par conséquent en écuelle : elle est alors mince ; ses bords sont tranchants. Lorsque sa longueur a atteint un demi-millimètre, son milieu s'est un peu épaissi, et sa structure intérieure est celle que reproduit la figure 32, planche IV; alors, entre les deux lames d'un épiderme formé de cellules carrées sur leur coupe transversale et à parois assez épaisses, s'étend une masse de tissu cellulaire qui offre les deux modifications indiquées plus haut chez l'organe adulte. Le tissu, plus serré, jaunâtre, à petites granulations, occupe le milieu de la feuille, et il est déjà en quantité assez considérable pour rendre convexe, vers le centre, la face supérieure de celle-ci. Dans ce tissu, se sont creusées deux lacunes à contour ovale, placées symétriquement à peu de distance de la ligne médiane. Les parois épaisses de ces deux lacunes se touchent sans laisser de vide au milieu de la feuille ; il ne reste donc pas d'autre espace pour le tissu plus lâche à cellules, plus tard si riches en fécule, que celui qui s'étend de cette masse médiane aux bords de la feuille.

Il faut observer ici que les dimensions des utricules de ces deux tissus diffèrent encore assez peu entre elles ; mais leur aspect sous le microscope les fait aisément distinguer, car la présence de méats développés, et sans doute en majeure partie remplis d'air, donne au tissu lâche une teinte plus sombre.

Faisons aussi remarquer, en passant, la différence qui existe entre la forme des cellules épidermiques à cet âge et celle que

nous leur avons reconnue à l'état adulte; nous devrons, je crois, en conclure que, à dater de cet instant, elles vont subir dans leur longueur et dans leur largeur un tiraillement qui changera tout à fait leur forme, et que leur changement de configuration, qui en sera la suite, leur permettra de recouvrir plus tard, sans se multiplier beaucoup, une surface très-considérable. Disons aussi que, dans cet état encore très-jeune, les cellules de l'épiderme contiennent des granules qui disparaîtront plus tard.

Les lacunes de cette jeune feuille n'ont pas encore de papilles; à peine les cellules de leurs parois commencent-elles à s'élever légèrement en mamelons arrondis.

A partir de ce premier état, nous remarquons dans le développement extérieur de la feuille deux époques distinctes : d'abord, son élongation surpasse sa dilatation en largeur; de là sa forme générale devient ovale; son sommet est assez prononcé; mais, dès que sa longueur a égalé trois ou quatre millimètres, son élargissement l'emporte sur son allongement, et c'est ainsi que bientôt l'ensemble de l'organe prend cette configuration réniforme qui est si remarquable chez lui à l'état adulte, et qui est telle que, dans ce dernier état, sa largeur est double de sa longueur.

Intérieurement comment s'opère l'accroissement de ces feuilles? Les lacunes et leur multiplication y jouent le principal rôle; en effet, en dehors des deux que nous avons déjà reconnues, se montre bientôt une petite masse arrondie de ce tissu cellulaire, serré et jaunâtre, que nous pourrions presque nommer générateur. Dès que cette masse a un peu grossi, elle se disloque à son centre, et par là elle forme une petite cavité, qui n'est autre chose qu'une lacune naissante. Celle-ci s'étend bientôt, se régularise, et dès lors une coupe de la jeune feuille présente l'aspect dont la figure 42 (pl. IV) donne une idée exacte, quoique faite sur une feuille plus âgée, mais vers son extrémité.

L'inégalité de ces lacunes est encore marquée pendant quelque temps, et même chez la feuille longue d'un millimètre et demi,

les premières formées sont encore de beaucoup les plus longues; mais plus tard cette différence s'efface, et nous savons que, chez l'organe adulte, l'ordre de grandeur est absolument inverse.

La reproduction des mêmes phénomènes amène la multiplication des lacunes par paires symétriques au côté extérieur de celles qui existaient déjà, et de là résulte l'extension totale de la feuille. Dans celles d'un millimètre et demi de longueur, la coupe transversale montre déjà six lacunes. Inutile de dire que la subdivision des faisceaux vasculaires accompagne la multiplication du tissu des parties cellulaires, et que de là résulte la structure que j'ai décrite plus haut.

A mesure qu'une lacune s'est formée, elle s'individualise; ses parois s'isolent, et un petit espace reste entre elle et ses voisines. Cet espace est aussitôt occupé par du tissu cellulaire lâche et à gros grains de fécule, car ce tissu se multiplie et s'étend aussitôt qu'il y a un nouvel intervalle à remplir.

Une difficulté se présente ici. La feuille adulte nous a offert un nombre impair de lacunes, et par suite une lacune terminale impaire; cependant, les coupes transversales des feuilles très-jeunes ne m'ont jamais montré qu'une, deux, trois, etc. paires; de plus, le mode d'accroissement de l'organe m'a toujours paru s'effectuer par paires symétriques. Voici, je crois, comment ces deux particularités s'expliquent et se concilient. Chez la feuille d'un millimètre et demi de longueur, on voit que les deux lacunes terminales ne se touchent pas comme les latérales; or, l'espace intermédiaire qui les sépare n'est autre chose que la place que devra occuper la lacune terminale, dont la formation aura lieu d'une manière analogue à celle qui vient d'être exposée.

Dès l'instant où les lacunes existent, leur contour s'élargit, s'étend en tous sens; bientôt il devient irrégulier; il se creuse de sinuosités plus ou moins profondes, et, bien avant même que la feuille soit entièrement développée, celles de ces cavités qui se sont formées les premières se présentent sous l'aspect qu'indique la figure 28 (pl. III).

Pour achever de nous fixer sur ce qui concerne les lacunes, examinons la formation de leurs papilles pédiculées. Nous venons de voir que, lorsque la dislocation du tissu cellulaire jaunâtre a donné naissance à une petite cavité, les cellules qui viennent de se séparer sont très-légèrement proéminentes (pl. IV, fig. 32). Quelques-unes parmi elles se bombent bientôt plus fortement, et en peu de temps elles s'élèvent toutes en mamelons arrondis et inégaux (pl. IV, fig. 43). Peu après, ceux de ces mamelons qui ont atteint la plus grande hauteur perdent la forme régulièrement arrondie de leur extrémité; ils s'allongent, se renflent, de manière à devenir lobés extérieurement (pl. IV, fig. 44); en même temps, des cloisons verticales se sont formées dans leur intérieur, et par là la tête de la papille s'est trouvée déjà complète.

Ces diverses transformations des cellules en mamelons et des mamelons en papilles lobées s'opèrent avec beaucoup de rapidité: aussi les lacunes des feuilles encore fort jeunes sont-elles tapissées d'une très-grande quantité de papilles déjà parfaites, pour la plupart, dans leur organisation.

ARTICLE 4.

DÉVELOPPEMENT ET FORMATION DES STOMATES.

Pour s'éclairer entièrement sur le mode de formation et de développement des stomates chez la Clandestine, il suffit de choisir une feuille jeune, longue de deux ou trois millimètres. A cet âge, l'épiderme présente les stomates dans tous les états possibles, depuis la plus simple ébauche jusqu'à la forme la plus achevée; souvent même deux de ces petits organes, absolument voisins, se trouvent aux deux extrémités de la série de leurs évolutions, l'un étant très-jeune et l'autre déjà très-bien formé : c'est ce que montre, par exemple, la figure 35[1] (pl. IV).

[1] Quoique l'histoire de ce développement ne présente aucun fait nouveau pour la science,

Considérés dans un état extrêmement jeune, les stomates de notre plante se montrent comme une petite cellule bien arrêtée dans son contour et quadrilatère, ou plus particulièrement en losange (pl. IV, fig. 33). Cette petite cellule contient une matière mucilagineuse sans doute, et qui produit à l'extérieur l'effet de grains assez volumineux disposés sans règle. Bientôt ses angles s'émoussent, et sa forme générale devient celle d'un petit rectangle dont les angles auraient été arrondis (pl. IV, fig. 34). Pendant que cette première modification de forme s'opère, on voit sur le milieu des longs côtés du petit rectangle se creuser deux légers sinus opposés, et en même temps le contenu de la cellule, au lieu de rester réparti uniformément dans tout son intérieur, commence à se partager en deux portions distinctes, dont la séparation correspond aux deux sinus latéraux (pl. IV, fig. 35). Presque aussitôt que cette division s'est opérée dans la masse mucilagineuse, on voit une légère ligne se dessiner entre les deux sinus et s'étendre de l'un à l'autre (pl. IV, fig. 36) : c'est là la première indication du partage de la cellule en deux moitiés, dont chacune deviendra l'une des deux utricules demi-circulaires dont la réunion constituera le stomate.

Dès cet instant, les traits de cette ébauche s'arrêtent avec une netteté toujours croissante : d'abord, les parties séparées par la ligne médiane s'accroissent, s'arrondissent, et après peu de temps, chacune d'elles, devenue plus que demi-circulaire, s'applique contre sa voisine par sa troncature rectiligne; le contenu, d'apparence grenue, forme ainsi deux groupes bien distincts. Bientôt cette ligne médiane se fait reconnaître comme n'étant que le point de soudure de deux cloisons qui commencent à se séparer l'une de l'autre dans le milieu de leur longueur, formant ainsi une très-petite aréole allongée (pl. IV, fig. 37). Que manque-t-il dès lors au développement du stomate? le simple agrandissement de cette aréole centrale nouvellement produite, qui devient par

je crois cependant devoir l'esquisser rapidement, ne fût-ce que pour ajouter une observation de plus à celles que l'on possède déjà.

là ovale le plus souvent, circulaire quelquefois, au moins chez les jeunes feuilles (pl. IV, fig. 38); la régularisation parfaite du contour extérieur, qui jusque-là avait présenté quelques légères sinuosités; enfin, la résorption de ce contenu d'apparence grenue qui accompagnait le petit appareil pendant tout le temps de son développement, et qui troublait sa transparence. Cette résorption s'opère peu à peu, lorsque le stomate est arrivé à son état à peu près définitif, et elle est complète avant même que la feuille soit tout à fait adulte.

Ces considérations termineront ce que j'avais à dire sur les feuilles de la Clandestine, et elles achèveront d'éclairer suffisamment, j'ose l'espérer, l'histoire de cet organe singulier.

DEUXIÈME PARTIE.

DES ORGANES DE LA REPRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA FLEUR.

Pour me faire une idée bien nette et complète de la fleur de la Clandestine, je l'ai suivie, non-seulement dans son développement général, mais encore dans celui de chacune de ses parties isolément. L'ordre que j'ai mis dans mes recherches est aussi celui que je vais adopter pour en exposer les résultats; et d'abord je jetterai un coup d'œil sur l'apparition successive des divers verticilles qui la composent. Peut-être trouverai-je dans cet examen le moyen de présenter quelques observations utiles relativement à certains points admis aujourd'hui par quelques auteurs comme principes fondamentaux d'organogénie.

ARTICLE 1er.

NAISSANCE ET APPARITION SUCCESSIVE DES VERTICILLES FLORAUX.

Comme toutes les fleurs que j'ai eu occasion d'étudier jusqu'à ce jour, celle de la Clandestine se montre à sa naissance sous la forme d'un très-petit globule un peu déprimé, celluleux, demi-transparent, homogène dans toute son étendue (pl. V, fig. 50). Ses dimensions sont très-faibles alors, car dans l'état où le représente la figure 50, il n'a encore que $0^{mm},13$ dans sa plus grande largeur.

Mais bientôt sa circonférence s'agrandit, par suite de l'apparition d'une sorte de bourrelet périphérique, relevé de quatre légers mamelons arrondis : ce bourrelet est la première ébauche du calice, et ces mamelons sont celle de ses quatre lobes (pl. V, fig. 51). Même dans cet état extrêmement jeune, dès cette naissance, puis-je dire, aucune séparation basilaire n'existe entre les quatre mamelons. Au lieu de se présenter comme autant de corps distincts que pourra plus tard réunir une soudure, ils se montrent comme légèrement saillants au-dessus d'une masse commune, d'un cercle commun sur lequel ils s'élèvent, et duquel ils se dégagent en autant de petits festons. C'est ce qu'indiquent, je crois, suffisamment les deux figures comprises sous le numéro 51 (pl. V), dont l'une représente toute la jeune fleur vue par-dessus, tandis que l'autre la montre de profil.

Ce bourrelet calicinal entoure la base d'un globule central entièrement homogène et uni à sa surface, qui n'est autre chose que l'extrémité de l'axe.

Le calice dégagé, ses quatre parties, ainsi soudées par leur base, s'allongent bientôt de manière à élever leur extrémité libre, et elles s'appliquent sur la masse centrale qu'elles vont recouvrir; alors elles sont égales entre elles, très-épaisses, arrondies à leur bord, et chacune d'elles a la forme d'un arc de cercle moindre

qu'une demi-circonférence (pl. V, fig. 52); enfin, le développement s'opère avec une telle rapidité dans toute cette jeune fleur, que bientôt son calice est entièrement fermé et qu'il abrite, sous une enveloppe complète, le mamelon central. Le bouton entier (pl. V, fig. 53 A) n'a pas encore un demi-millimètre dans sa plus grande largeur.

Tant que le calice était ouvert, le globule central de la jeune fleur n'a subi aucune modification; mais si nous l'examinons dès que le calice s'est fermé, et que pour cela nous enlevions entièrement celui-ci, nous verrons ce globule tel que le montre la figure 53 B, planche V. Dans ce nouvel état, sa circonférence s'est dilatée et s'est relevée en bourrelet périphérique pentagonal; chacun des angles de ce pentagone est occupé par un mamelon arrondi, très-peu saillant, et à peine dégagé de la base commune; mais, même dans cet état si jeune, il est facile de reconnaître de légères inégalités: le mamelon inférieur est, en effet, évidemment plus large et plus saillant que les quatre autres; le sinus supérieur est aussi un peu plus marqué que les quatre inférieurs.

Il est aisé de reconnaître dans ces cinq mamelons naissants les cinq parties de la jeune corolle, d'où l'on voit que ce bouton si peu avancé possède déjà deux de ses verticilles; la fleur a ses deux enveloppes; mais rien encore, sur la masse centrale, n'indique la naissance des organes sexuels.

Je crois devoir placer ici une observation importante. M. Schleiden a émis, au sujet du premier état des verticilles floraux, une opinion qui me paraît contraire aux résultats que donne l'observation directe. Dans l'un de ses mémoires, en date de 1837 (*Einige Blicke auf die Entwickelungsgeschichte des vegetabilischen Organismus bei den Phanerogamen.* Archiv de Wiegm , vol. V, p. 289-320), le célèbre observateur allemand dit : « Je ferai « seulement remarquer que, chez tous les calices et toutes les « corolles dits d'une seule pièce, les parties diverses, plus tard « soudées, sont toujours, sans exception, séparées à leur nais- « sance, et qu'elles persistent dans leur état d'indépendance et de

« liberté assez longtemps pour rendre entièrement superflu tout « raisonnement sur le nombre des pièces, lorsque c'est un sujet « de recherches que de le démontrer avec évidence. » Cette manière de voir se trouve reproduite dans les mémoires postérieurs du même auteur. Elle a été adoptée, sur l'autorité de M. Schleiden, par M. Aug. de Saint-Hilaire, dans sa Morphologie. (Voy. par exemple, *Morph.* p. 391).

Déjà en 1835, et par suite avant le mémoire allemand dont je viens de traduire un passage, MM. Guillard avaient déduit de leurs recherches un principe tout opposé à celui de M. Schleiden. Ainsi je lis dans leurs Aphorismes 14 et 15 : « Le détache- « ment (du calice) s'opère par un sillon horizontal tracé sur le « flanc de la sphère (centrale, extrémité de l'axe), et dont la pro- « fondeur, dirigée dans le sens vertical, s'accroît successivement « (prop. 14). La zone détachée se festonne au sommet pour la dis- « tinction de chaque sépale (prop. 15). » Plus loin se trouvent des propositions analogues relatives, par exemple, aux carpelles, comme celle-ci : « Les carpels sont donc unis dès leur origine « (prop. 37). »

Dès 1840 et 1841, je m'étais moi-même aperçu, par l'observation de plantes appartenant à divers familles (Labiées, Dipsacées, Nyctaginées, etc.), que la théorie de M. Schleiden n'était pas conforme aux faits que je voyais, et j'avais consigné le résultat de mes recherches dans ma thèse botanique, en date de décembre 1841. En décembre 1842, parut dans les Annales des sciences naturelles une note de M. Naudin, relative au développement des organes appendiculaires; et cet observateur vint me confirmer encore dans ma conviction par ses assertions positives, telles que celle-ci : « Cette soudure (celle des éléments des « calices et des corolles d'une seule pièce) est congéniale, c'est- « à-dire que ces verticilles naissent tout d'une pièce, etc. (*l. c.* « p. 362). »

Enfin, mon examen de la Clandestine, fait avec grand soin en 1842 et 1843, a achevé de lever pour moi jusqu'à l'ombre d'un

doute, et je pense que les figures qui accompagnent ce mémoire suffiront pour faire passer ma conviction dans l'esprit de MM. les membres de l'Académie qui auraient admis jusqu'ici les idées de M. Schleiden.

J'affirme donc, avec MM. Guillard et Naudin, que les parties que l'on trouve soudées chez la fleur adulte l'ont été généralement à leur base, dès leur naissance, au moins chez les espèces sur lesquelles ont porté mes observations.

L'apparition de la corolle est bientôt suivie de celle des étamines. Intérieurement au bourrelet corollin, le mamelon central, ou plus proprement, si l'on veut, l'axe floral raccourci, se bosselle autour de la base et forme quatre nouveaux mamelons arrondis (pl. V, fig. 54). Ceux-ci ressemblent à une calotte sphérique, et entre eux s'élève encore un globule, presque de même dimension qu'eux, qui, plus tard, va s'organiser lui-même en pistil.

La situation des quatre jeunes anthères, par rapport à la corolle, est tout à fait analogue à celle des lobes calicinaux; chacune d'elles est aussi opposée à l'un de ceux-ci. J'ai cherché à reconnaître s'il n'existerait pas, dans cet état si peu avancé du bouton floral, un rudiment de la cinquième étamine, qu'appellerait du côté de l'axe la symétrie de la fleur; mais je n'ai pu en découvrir le plus petit indice. J'ai même vu que son avortement complet est déterminé par des causes profondes; car, comme je le montrerai ailleurs, dans la division des faisceaux vasculaires du pédoncule et dans leur distribution aux divers verticilles floraux, j'ai reconnu qu'il n'existe aucun rameau se dirigeant vers le point que devrait occuper cette cinquième étamine.

Chez cette très-jeune fleur, on observe déjà un développement plus considérable dans les parties opposées à l'axe de l'inflorescence. Ainsi, déjà les deux divisions calicinales inférieures sont un peu plus longues que les supérieures; les trois mamelons qui représentent la lèvre inférieure de la corolle sont plus larges et plus écartés que les deux qui constituent la lèvre supérieure;

enfin, les mamelons staminaux de la paire inférieure sont un peu plus gros que ceux de la paire supérieure.

L'alternance de l'androcée avec la corolle ne peut être qu'irrégulière, à cause de la différence de nombre. Aussi la paire inférieure d'anthères alterne régulièrement avec les trois lobes corollins (ou pétales) inférieurs, tandis que la supérieure ne répond pas exactement aux sinus corollins devant lesquels elle devrait être placée, mais qu'elle se trouve rejetée presque vis-à-vis des deux parties de la lèvre supérieure.

L'accroissement de ces jeunes anthères est, dès le moment où je viens de les considérer, plus rapide que celui de la corolle; lorsque le bouton entier n'a encore qu'un demi-millimètre dans sa plus grande largeur, elles dépassent déjà fortement la corolle, dont les lobes sont peu saillants, et elles se montrent (pl. V, fig. 55) sous la forme de quatre petits corps arrondis en-dessus, un peu comprimés, tendant à se courber en dedans; elles sont légèrement dépassées elles-mêmes par le mamelon pistillaire ou l'extrémité de l'axe.

Nous venons d'assister à la naissance de trois des verticilles principaux de la fleur; le quatrième ne tardera pas à dessiner ses formes. Déjà, dans l'état de la figure 55 (pl. V), l'extrémité supérieure du mamelon central se montre un peu émoussée ; il semble même qu'elle soit un peu déprimée. Peu après, les bords de ce léger aplatissement terminal se développent en un repli circulaire, pendant que son centre, restant en arrière, se trouve ainsi devenu le fond d'une petite cavité ouverte en dessus. C'est là la première forme de l'organe femelle. Mais ce repli n'est pas longtemps uniformément continu; à mesure qu'il s'élève, en donnant plus de profondeur à la cavité centrale qu'il circonscrit, son développement se prononce surtout en dessus et en dessous, et par là il donne naissance à deux lèvres, l'une supérieure, l'autre inférieure, celle-ci un peu plus allongée. Ces deux lèvres sont la première ébauche du stigmate (pl. V, fig. 64); la cavité dont elles entourent l'orifice n'est autre chose que la cavité ovarienne,

à la base de laquelle commencent déjà à se montrer les deux placentaires (pl. V, fig. 65). Les parties principales du pistil sont donc représentées pour la plupart.

Outre ces quatre verticilles principaux, la fleur de la Clandestine possède encore un disque qu'il est impossible de passer sous silence. Dès l'instant où le mamelon central commence à se façonner en pistil, sa base se montre légèrement renflée en un bourrelet continu, inférieur au niveau du fond de la cavité ovarienne. Bientôt ce bourrelet devient sinueux à son bord, et il offre cinq mamelons qui entourent presque régulièrement l'ovaire. Mais à mesure que celui-ci se forme et grossit, il rejette le bourrelet discoïde vers la partie inférieure de la fleur, tandis qu'un autre bourrelet beaucoup moins prononcé, embrassant la partie supérieure de sa base, rattache l'une à l'autre les deux extrémités de l'organe discoïde inférieur.

L'un des résultats des observations que je viens d'exposer est que les divers verticilles, dans la fleur de la Clandestine, se dégagent de l'axe ou se montrent suivant l'ordre qu'on pouvait prévoir d'après leur nature d'organes appendiculaires. Ils vont, en effet, de l'extérieur à l'intérieur, ou plus exactement du bas vers le haut. Le calice se présente le premier; après lui paraît la corolle; au troisième rang, les étamines; au quatrième, le disque; au cinquième et dernier s'organise le pistil, dans lequel se termine l'axe.

ARTICLE 2.

DÉVELOPPEMENT DE CHAQUE VERTICILLE FLORAL EN PARTICULIER, QUANT À SA FORME EXTÉRIEURE.

Après avoir étudié les premières phases du développement de notre fleur, je vais maintenant considérer en particulier chacun des verticilles que j'ai montrés se dégageant de l'axe, afin de signaler les modifications qu'il subit dans sa forme extérieure jusqu'à son état adulte. Je ferai ensuite connaître sa structure ana-

tomique dans ce dernier état. Il ne me restera plus qu'à suivre l'organogénie tissulaire de ceux d'entre eux qui me semblent offrir un intérêt réel sous ce rapport. Aussi me bornerai-je, sous ce dernier point de vue, à l'étude des organes sexuels, qui fournissent matière à un grand nombre de questions aussi délicates qu'importantes.

§ 1^er^. Calice.

J'ai déjà suivi le calice depuis sa naissance jusqu'au moment où le rapprochement de ses quatre divisions en a fait une enveloppe fermée. Suivant la forme des parties plus intérieures du bouton, qui ne s'étendent guère encore que dans le sens horizontal, sa largeur dépasse beaucoup sa longueur. Ses quatre sinus descendent jusque vers le milieu de sa hauteur. Déjà les bords de ses lobes s'épaississent de manière à former un bourrelet marginal, qui suit tout leur contour. Mais bientôt, la masse centrale s'allongeant, il s'allonge lui-même; son développement se faisant principalement par sa base, comme chez tout organe appendiculaire, ses lobes diminuent de hauteur relativement à l'ensemble, et cet effet se continue de telle sorte que, lorsqu'il s'ouvre pour laisser sortir la corolle, son tube ou la portion soudée de ses quatre éléments constitutifs forme plus des deux tiers de sa longueur totale.

Dès l'instant où le calice s'est fermé, sa forme générale est très-ventrue; bientôt elle devient ovoïde, et alors le bourrelet marginal des lobes est très-prononcé; enfin, il devient de plus en plus élancé, de moins en moins ventru; et lorsqu'il s'est ouvert pour laisser passer la corolle, il offre à peu près la forme d'un cône renversé, de laquelle il ne s'écartera plus quelque peu qu'en se renflant plus tard légèrement vers sa base pour suivre les progrès du développement ovarien (pl. V, fig. 58).

J'ai déjà signalé le commencement d'irrégularité qui se montre dans le calice au moment où il se ferme, ses deux lobes inférieurs étant plus grands que les supérieurs; cette inégalité se

prononce bien davantage en peu de temps, et bientôt elle lui donne l'aspect que reproduit la figure 61 (pl. V).

§ 2. Corolle.

Nous n'avons encore vu la corolle que dans l'état le plus jeune, sous la forme d'un repli périphérique pentagonal, dont chaque angle, relevé en mamelon arrondi, indique l'un des cinq pétales soudés ainsi dès leur origine. Nous avons vu aussi que les deux angles supérieurs semblent plus rapprochés l'un de l'autre, permettant de reconnaître dès cette époque une lèvre supérieure et une lèvre inférieure. Après ces premiers temps, cette enveloppe florale se développe plus lentement que les jeunes anthères: aussi ne peut-elle être considérée alors comme un organe protecteur. D'abord chacun de ces cinq mamelons d'origine s'allonge et s'étend en un lobe distinct, et leur base commune ou la partie soudée participant à cet accroissement général, la corolle entière se présente bientôt sous l'aspect d'une coupe à cinq festons sur ses bords, embrassant la base des quatre anthères.

L'accroissement et l'allongement relatifs des cinq éléments corollins présentent deux périodes distinctes. Dans la première, les trois d'entre eux qui forment la lèvre inférieure sont le siége du plus rapide développement: aussi dépassent-ils bientôt très-notablement les deux supérieurs. Lorsqu'à peine les anthères montrent leur sillon médian longitudinal, que le pistil va se fermer, la corolle est telle que la représente la figure 62 (pl. V). La lèvre supérieure a ses deux lobes peu allongés, droits, en triangle émoussé au sommet, atteignant seulement le haut des deux petites étamines; l'inférieure, au contraire, dépasse beaucoup les quatre étamines; ses deux lobes latéraux, arrondis à leur bord supérieur, se sont creusés en cuiller à concavité intérieure et se sont infléchis l'un vers l'autre; son lobe inférieur et médian a subi le plus fort accroissement: il s'est fortement creusé en voûte, et en même temps, se recourbant vers le haut de la fleur, il l'a

couverte presque en entier comme d'un couvercle. Mais, à cette époque, la corolle laisse encore en dessus une ouverture par laquelle on distingue les organes sexuels.

Il n'y a plus qu'un pas à faire pour que cette corolle constitue une enveloppe complète et protectrice (pl. V, fig. 63). Dans ce nouvel état, on peut remarquer d'abord que le tube a eu la plus grande part dans l'accroissement qui a rempli le vide précédemment existant; c'est aussi sur lui que va s'opérer désormais le développement le plus rapide. De plus, on distingue maintenant l'estivation définitive des parties de la corolle. L'incurvation du lobe inférieur et son élongation considérable l'ont placé sous les deux lobes latéraux et lui ont fait recouvrir la lèvre supérieure, qui, par là, se trouve tout à fait intérieure, tandis que les lobes latéraux sont entièrement extérieurs. Cette estivation est donc telle à cette époque, que la lèvre supérieure a ses deux lobes placés l'un à côté de l'autre sur une même ligne et recouverts par le lobe médian inférieur très-grand; celui-ci l'est à son tour par les deux lobes latéraux, qui s'appliquent sur lui.

Ici commence maintenant une seconde époque pendant laquelle l'allongement du tube de la corolle et celui de sa lèvre supérieure apportent des modifications à l'arrangement que nous venons de voir. Obéissant à l'élongation considérable du style qui s'applique contre sa ligne médiane en suivant toute sa concavité, la lèvre supérieure laisse ses deux lobes à peu près dans le même état de développement, tandis que l'intervalle qui les sépare commence à s'élargir, à les écarter l'un de l'autre et à se relever lui-même en voûte. De plus, suivant toujours cette élongation considérable et rapide du style, cette voûte, et par suite la lèvre supérieure elle-même, qui, d'abord, était restée en arrière, deviennent maintenant le siége de l'accroissement le plus énergique. Déjà, dans l'état que reproduit la figure 56 (pl. V), lorsque la corolle est encore entièrement cachée sous le calice qui la dépasse, on voit la lèvre supérieure se dégager de l'abri que lui formait jusqu'alors la lèvre inférieure, se redresser et laisser ainsi,

au sommet de la fleur, un espace vide et ouvert où se montre une portion du style. Alors encore sa longueur n'excède guère celle de la lèvre inférieure; mais, dès cet instant, elle va la dépasser de plus en plus. Chez la fleur, à moitié longueur à peu près (pl. V, fig. 58), elle la laisse de beaucoup au-dessous d'elle; et la différence de leur niveau est même proportionnellement plus grande que chez la fleur adulte et entièrement épanouie (pl. V, fig. 60).

En comparant entre elles les figures précédentes, il est facile de voir que les deux lobes supérieurs deviennent de moins en moins apparents relativement à la lèvre supérieure tout entière; leur intervalle, auquel répond le style, s'élargissant de plus en plus, ils finissent par ne plus former que deux sortes de festons peu saillants et infléchis l'un vers l'autre. Un long espace s'étend entre eux et la lèvre inférieure; et, au total, ils paraissent presque nuls chez la fleur épanouie. La portion de la corolle qui s'étend de l'un à l'autre a suivi, à son bord, l'élongation du style, et elle y a formé un avancement, une sorte de dent bien marquée.

Quant à la lèvre inférieure, elle ne présente guère plus de particularités remarquables depuis l'instant où nous l'avons vue se fermer; elle se colore d'une teinte purpurine qui se fonce de plus en plus, jusqu'à devenir très-intense. En même temps ses lobes se plissent d'abord, puis ils se plient, se crispent, s'enroulent; et, chez la fleur épanouie, les deux latéraux se montrent enroulés à leur bord externe, tandis que le médian est ployé en gouttière serrée.

§ 3. Étamines et androcée.

J'ai fait connaître plus haut la naissance des étamines. J'ai montré que l'anthère de chacune d'elles se présente, en premier lieu, sous la forme d'un petit mamelon arrondi. Le mamelon s'élève d'abord, et bientôt après il s'aplatit de dedans en dehors; il tend aussi à se courber en dedans, et à s'appliquer ainsi sur le pistil. La corolle est seulement encore sous la forme d'une coupe très-large à cinq festons marginaux, le pistil n'a pas encore fermé

son ovaire, que déjà chaque anthère se marque d'un sillon médian longitudinal, et commence ainsi à annoncer sa prochaine division en deux loges distinctes. Cette anthère compose encore toute l'étamine, et elle tient au fond de la fleur par une base très-large. D'abord, chacune de ses moitiés, qui viennent d'être séparées par le sillon médian, est arrondie dans tout son pourtour; mais peu après elle s'aplatit sur les côtés en contact avec ses voisines, après quoi elle se creuse, sur ces mêmes faces, d'une légère dépression longitudinale, premier indice du sillon qui désignera plus tard à l'extérieur la séparation de chaque loge en deux logettes. En même temps, le sillon médian antérieur de l'anthère totale s'est prononcé beaucoup plus fortement. Celui qui existait d'abord à la face dorsale de l'organe mâle, légèrement tracé vers le haut, a cessé de se montrer vers le bas à mesure que l'allongement avait lieu; bien mieux, il se trouve maintenant remplacé vers le bas de l'anthère par une saillie longitudinale formée par le connectif des loges, ou, si l'on veut, plus exactement, par la partie supérieure du filet.

Ces modifications dans la forme extérieure de la jeune anthère correspondent aux changements qui s'opèrent, dans un fort court espace de temps, à son intérieur. En effet, dès que les deux sillons latéraux se dessinent, le tissu de cet organe se présente nettement divisé en deux loges, subdivisées elles-mêmes en deux logettes, dont chacune contient, ainsi que je le montrerai plus tard, une masse pollinique distincte. Les sillons latéraux se creusent de plus en plus, et il arrive un moment où l'anthère tout entière se montre sous l'apparence d'un corps unique composé de quatre petits cylindres réunis parallèlement. Mais la structure intérieure ne subit pas moins de changements nouveaux. En effet, vis-à-vis de chaque sillon latéral, la cloison qui séparait les deux subdivisions d'une même loge se disjoint des parois extérieures de l'anthère, et par là celle-ci se trouve être réellement bi-loculaire. Plus tard, au moment de l'anthèse, la déhiscence s'opère par deux fentes longitudinales, dont chacune

répond à la ligne selon laquelle s'est faite cette séparation des cloisons d'avec les parois.

Toutes ces transformations dans l'organisation intérieure des anthères s'opèrent de très-bonne heure; avant même que le bouton de fleur ait atteint une longueur de $0^m,003$, les quatre logettes sont parfaitement distinctes. Alors cependant l'anthère n'est pas encore isolée ni tout à fait dégagée de son point de naissance; elle est sessile, son filet régnant seulement le long de son dos en une saillie arrondie. Ce n'est que lorsque le bouton entier a près d'un centimètre de longueur que le filament commence à s'isoler et à détacher ainsi l'anthère du tube de la corolle. Comme le développement est plus énergique et plus rapide chez la paire inférieure, c'est aussi celle qui se montre la première pourvue d'un petit filet distinct. Si, par exemple, nous examinons l'androcée à peu près à ce moment (pl. V, fig. 57 B), nous y verrons les anthères de la paire inférieure plus longues et plus distinctement pédiculées, tandis que celles de la paire supérieure se montreront plus courtes et encore sessiles. Nous reconnaîtrons de plus que le point d'exsertion de la première paire est inférieur à celui de la dernière.

De bonne heure déjà, certaines cellules des parois de l'anthère avaient commencé de se renfler en mamelons, que peu de temps a suffi pour convertir en poils. Dans l'état où se trouve maintenant la fleur, ces poils ont acquis une longueur très-notable; ils forment au bas des loges une sorte de barbe; à leur sommet, quoique beaucoup plus courts, ils suffisent pour faire adhérer entre elles les quatre anthères, et l'adhérence qui résulte de leur enchevêtrement persiste pendant tout le reste de l'existence de la fleur.

Les étamines sont maintenant complètes; aucune transformation notable ne s'effectue dès lors dans leur extérieur. Leur filet s'allonge graduellement; d'abord assez large et un peu comprimé vers le haut, il devient ensuite plus grêle et arrondi vers le bas. La position et la grandeur relative des anthères se conservent tou-

jours invariablement; de là l'inégalité de longueur de leurs filets, qui les rend si nettement didynames, ne peut guère provenir que de leur portion inférieure, et en particulier de la différence de niveau de leurs points d'exsertion. En effet, si l'on examine une fleur presque adulte et dans laquelle l'anthèse commence à se faire (pl. V, fig. 59), on voit la paire inférieure sortir du tube de la corolle en un point beaucoup plus bas que la supérieure. La cause en est, il me semble, facile à comprendre, puisque j'ai déjà montré que dès l'instant où la corolle s'ouvre à son extrémité, et par suite dans la seconde période de son existence, son développement se fait avec beaucoup plus de vigueur dans sa lèvre supérieure que dans l'inférieure.

§ 4. Pistil.

L'organe femelle est, comme je l'ai montré plus haut, le dernier à s'organiser et à arrêter ses formes. Dès l'instant où le mamelon médian, extrémité de l'axe, qui le représentait, s'est relevé sur ses bords en un bourrelet circulaire, circonscrivant une cavité centrale, on a pu distinguer dans le contour de ce bourrelet une légère inégalité. Peu après, cette inégalité s'est nettement prononcée en deux petites lèvres, dont l'une supérieure, l'autre inférieure, celle-ci un peu plus longue (pl. V, fig. 64). Ces deux lèvres étaient parfaitement continues, de telle sorte que, même à cette époque de l'existence du pistil, il n'était nullement possible d'y reconnaître deux carpophylles isolés. A cette époque aussi, la cavité intérieure était à peu près conique. Bientôt, l'accroissement de ce jeune organe continuant, on le voit se renfler vers sa base en un ovaire bien dessiné, et se rétrécir vers son sommet (pl. V, fig. 66) en une petite ouverture à deux lèvres. Alors se trouvent déjà indiquées deux des parties du pistil complet : l'ovaire et le stigmate.

On peut voir, dès cet instant, la différence qu'il y a dans l'ordre du développement entre le pistil et les autres verticilles

floraux. Chez ceux-ci, nous avons pu voir toujours l'accroissement se faire par la base, de telle sorte que leur sommet était constamment la partie la plus âgée. C'est ainsi que nous avons vu la longueur relative du limbe du calice et de la corolle décroître progressivement par rapport au tube, pendant toute la durée de la vie de ces organes. Ici, au contraire, nous trouvons déjà l'ovaire et le stigmate formés ou indiqués; mais le style qui doit être intermédiaire entre eux se formera postérieurement, et l'ovaire restera toujours néanmoins la portion inférieure du pistil. C'est donc au-dessus de l'ovaire que va s'opérer maintenant le plus grand accroissement en longueur. En effet, à partir de l'état que je viens d'indiquer, les deux lèvres du jeune stigmate, achevant de se rapprocher, se soudent à leurs bords de manière à ne plus laisser entre elles qu'une petite ouverture transversale, une sorte de bouche entourée d'un rebord continu; l'ovaire, se renflant encore davantage, devient un corps à peu près globuleux, distinct, et à son extrémité supérieure se forme peu à peu le cylindre stylaire, qui élève de plus en plus le stigmate.

Dès sa première apparition, le style se courbe vers le bas de la fleur, et cette courbure devient de plus en plus prononcée, jusqu'à ce qu'elle reporte le stigmate dans une position tout à fait renversée (pl. V, fig. 68 et fig. 57 B), et qu'elle le cache dans la concavité du lobe moyen inférieur de la corolle. Plus tard, cette courbure diminuera quelque peu (pl. V, fig. 59), sans que pour cela le stigmate cesse d'être pendant.

Dans les premiers temps, l'extrémité supérieure et renflée du style débordait le stigmate; mais, à mesure que la fleur approche de son état adulte, celui-ci acquiert un volume plus considérable, et il finit par déborder lui-même le style, en prenant la forme d'une petite tête. La cause de ce changement (pl. VII, fig. 108) doit surtout, je crois, être vue dans la formation de grosses papilles en forme de bouteille qui revêtent, chez la fleur adulte, toute la surface stigmatique.

A toutes les époques, le style de la Clandestine est parfaite-

ment glabre; et son stigmate lui-même ne présente à sa surface aucune autre production que les papilles dont il vient d'être question.

A l'état adulte, le stigmate constitue une petite tête assez irrégulière (pl. VII, fig. 108). Vu de face, il se montre pourvu d'une petite ouverture horizontale, en forme de bouche, qui n'est que l'orifice supérieur du canal stylaire, et qui achève d'établir une communication directe entre la cavité ovarienne et l'atmosphère. Le stigmate, en dessus et en dessous de cette ouverture, forme deux lèvres, dont l'inférieure est la plus longue. Cette ouverture stigmatique se rétrécit en un entonnoir, dont le fond est presque bouché par le rapprochement des parois environnantes. A partir du fond de cet entonnoir, le canal stylaire se dilate quelque peu, et il conserve ensuite à peu près le même diamètre dans toute son étendue, jusqu'au haut de l'ovaire.

Si nous examinons maintenant ce qui se passe dans l'intérieur de l'ovaire en particulier, nous verrons que, dès l'instant où ses bords se relèvent en un godet tout ouvert et à deux lèvres, sa paroi interne présente vers sa base un léger renflement (pl. V, fig. 65), une sorte de côte saillante et arrondie, qui se dirige, en mourant, vers la commissure des deux lèvres. C'est la première ébauche des placentaires. A mesure que l'ovaire s'allonge, les placentaires suivent son développement, et ils prennent ainsi, dans leur portion inférieure, la forme d'un demi-cylindre collé à la paroi ovarienne. Bientôt après, ils se renflent brusquement au sommet de cette portion arrondie, et ils doublent de largeur sur ce point : d'où il résulte que, l'ovaire venant de se fermer en une sorte d'enveloppe pyriforme, chacun d'eux présente la forme que reproduit la figure 66 C, pl. V. Le point où s'est fait cet élargissement brusque se manifeste alors par deux mamelons arrondis. Les mamelons se prononcent bientôt davantage (pl. V, fig. 67), et déjà, lorsque le style n'a pas encore plus de longueur que l'ovaire lui-même, on peut très-bien reconnaître en eux les jeunes ovules. Au-dessus de ce point, les placentaires

s'amincissent graduellement, et, pénétrant dans le canal stylaire, ils s'y perdent et se fondent dans le tissu du style. La saillie qu'ils forment dans la cavité ovarienne est, du reste, assez forte pour les mettre en contact l'un avec l'autre, même chez l'ovaire très-jeune, comme le montre la coupe transversale représentée par la figure 66 (pl. V).

La forme extérieure de l'ovaire est renflée de manière uniforme au moment où sa cavité vient de se limiter nettement; peu après il s'arrondit, soit du côté de l'axe, soit à sa face opposée, de façon à prendre dans ce sens un contour absolument circulaire sur un plan vertical, et il le conserve jusqu'à la fleuraison parfaite, même quelque temps après la fécondation. En même temps, il se comprime fortement de gauche à droite, de manière à être bientôt très-aplati dans ce sens. D'abord son tissu est parfaitement continu dans tout son pourtour; mais, à mesure qu'approche le moment de la fécondation, il se creuse à ses bords supérieur et inférieur d'un sillon extérieur indiquant les deux sutures que doit présenter le fruit, et le tissu de ses parois se dispose lui-même, à l'intérieur, de manière à faciliter plus tard la séparation des valves de la capsule sur ces points.

§ 5. Disque.

Parmi les caractères du genre *Clandestina* Tourn. tels qu'ils se trouvent tracés dans le *Genera* de M. Endlicher (*Gen. plantar.* pag. 727), je lis le suivant : « Ovarium glandula hypogyna desti- « tutum. » A moins que je ne me rende compte de ce passage d'une manière bien inexacte, il me semble qu'il y a là une erreur typographique ou autre. En effet, je ne puis m'empêcher de voir dans la fleur de la plante dont il s'agit ici une *volumineuse glande hypogyne*, un véritable disque, même assez développé. Je ne sais même si l'on ne pourrait pas admettre que ce disque est double et composé de deux verticilles, dont l'un peu altéré, l'autre, au contraire, tout à fait rudimentaire. Quelques mots suffiront pour

exposer ce que l'on remarque relativement à ces organes discoïdes.

Dans la première jeunesse du pistil, il est facile d'y voir, au-dessous du niveau de la cavité ovarienne, un renflement circulaire qui forme comme la base élargie de l'organe entier. Ce renflement est uniforme et continu dans tout son pourtour (pl. V, fig. 64, 65). Un peu plus tard, le pistil, devenu pyriforme, présente le même bourrelet basilaire; mais déjà celui-ci est devenu sinueux à son bord, et l'on y reconnaît aisément cinq festons distincts et alors régulièrement disposés tout autour de l'ovaire. Bientôt ce dernier, s'aplatissant sur les côtés, gagnant en longueur d'avant en arrière, et se reportant davantage vers le haut de la fleur, son bourrelet basilaire cesse de l'embrasser également sur toute sa circonférence; au contraire, il se porte et se développe plus fortement vers le bas de la fleur : de là résulte chez lui une inégalité très-marquée déjà sous le pistil encore fort jeune (pl. V, fig. 67), et peu après, le changement est tel qu'on trouve sur ce point, vers le bas de la fleur, un organe de consistance glanduleuse, horizontal, à cinq festons sur son bord libre, et n'occupant que la demi-circonférence inférieure de l'ovaire (pl. V, fig. 68); vers le haut, au contraire, est un simple bourrelet peu élevé et entier à son bord, embrassant la demi-circonférence supérieure de l'organe femelle. En examinant avec soin ce petit corps glanduleux, je vois, au point de réunion des deux demi-circonférences (pl. V, fig. 70), une petite saillie qui s'élève quelque peu sur les parois de l'ovaire, et qui s'y fond en quelque sorte par son amincissement progressif. De plus, il me semble voir aussi que le bourrelet supérieur est à un niveau un peu plus haut que le petit corps inférieur à cinq festons.

D'après cela, ce petit appareil, d'aspect glanduleux, devant être considéré comme un disque, ne pourrait-on pas trouver en lui l'indication des deux verticilles admis par divers auteurs comme entrant dans l'organisation de la fleur? Le verticille inférieur, plus développé, ne serait autre chose que la grosse glande hypo-

gyne que l'accroissement de l'ovaire a rejetée vers le bas de la fleur; le verticille supérieur rudimentaire devrait alors être cherché dans le mince bourrelet qui embrasse la demi-circonférence supérieure de la base de l'ovaire. Je propose cette manière de voir comme une simple idée que je soumets à l'examen des botanistes dont l'opinion fait loi dans la science.

A partir de l'état où je l'ai laissé, le disque devient de plus en plus inégal dans ses deux moitiés. Tandis que l'inférieure s'accroît assez fortement, la supérieure reste à peu près stationnaire, et je ne m'occuperai plus d'elle. La première, après s'être étendue d'abord horizontalement, se relève ensuite en se creusant; et, sous l'ovaire adulte, elle se montre dans l'état et sous la forme que représentent les figures 71 et 72 (pl. V). C'est alors un corps vert, épais, fortement creusé en dessus, émoussé et arrondi sur ses bords latéraux, à cinq festons sur son bord supérieur, parmi lesquels le médian est un peu plus court que les autres, présentant enfin à sa face externe quatre sillons, dont chacun va se rendre à l'un de ses sinus marginaux. Je montrerai plus tard que dans sa structure entrent cinq faisceaux vasculaires distincts.

Je ferai remarquer en passant, et en terminant ce paragraphe, comment, chez notre fleur, les nombres quatre et cinq se montrent alternativement dans les verticilles floraux. Après un calice à quatre lobes, vient une corolle à cinq divisions; celle-ci est suivie de quatre étamines, en dedans desquelles paraît un disque à cinq nervures.

ARTICLE 3.

ANATOMIE ET ORGANOGÉNIE TISSULAIRES DES PARTIES DE LA FLEUR.

Pour rendre plus complète l'étude anatomique des parties de la fleur chez la Clandestine, je ne me suis pas borné à la faire sur les organes adultes; mais lorsque j'ai remarqué dans le cours du développement de leur tissu des modifications un peu importantes, j'ai suivi avec soin cette organogénie, que je nommerai

tissulaire. Je vais maintenant exposer le résultat de ces observations.

PREMIÈRE SECTION.

DES ENVELOPPES FLORALES.

Pour les enveloppes florales, je n'ai pas reconnu de changements importants dans leur organisation tissulaire, pendant le cours de leur développement. Uniquement cellulaires à leur naissance, elles deviennent bientôt cellulaires et vasculaires, et dès lors leur histoire anatomique m'a paru ne pas présenter autre chose qu'une simple multiplication, qu'un simple accroissement des tissus existants. Je me bornerai donc ici à un exposé, rapide même, de la structure de ces enveloppes chez la fleur épanouie.

§ 1er. Calice.

La structure du calice est fort simple. Chacune de ses deux faces présente une couche de cellules épidermiques; et entre ces deux faces règne une masse celluleuse traversée, dans le sens de sa longueur, par des faisceaux fibro-vasculaires ou des nervures.

Les cellules de l'épiderme se montrent avec les mêmes caractères sur les deux faces. Considérées dans l'intervalle des nervures, elles se présentent sous la forme de prismes courts, à cinq ou six pans irréguliers, dont une base s'appuie sur le parenchyme interne, dont l'autre forme la surface extérieure. Cette dernière base est généralement un peu convexe. Examiné par le dehors, le contour de ces cellules forme un pentagone ou plus habituellement un hexagone plus ou moins irrégulier, à faces souvent courbes, généralement un peu allongé.

Les parois de ces cellules sont transparentes, peu épaisses, les latérales entièrement et intimement soudées à leurs voisines (pl. V, fig. 77). Elles sont toutes incolores, et la coloration rougeâtre ou purpurine qu'elles présentent en certains points réside

uniquement dans le liquide coloré qu'elles contiennent. Leur transparence laisse voir dans chacune d'elles un nucléus ou cytoblaste, mais avec lui aucun contenu granuleux. Sur les nervures, elles deviennent plus étroites et plus allongées; elles se montrent aussi assez régulièrement alignées en séries longitudinales.

Les cellules épidermiques diffèrent par leur forme et par leurs dimensions de celles du parenchyme sous-jacent; la figure 77 (pl. V) indique suffisamment cette différence.

Chez des boutons très-jeunes, les cellules de l'épiderme sont beaucoup moins larges proportionnellement; de plus, çà et là, certaines d'entre elles se développent en papilles lobées et pédiculées analogues à celles que j'ai déjà montrées sur l'épiderme des jeunes feuilles, et ne différant de celles des lacunes foliaires que par la longueur de leur pédicule articulé. Je n'ai plus retrouvé ces papilles chez des boutons un peu avancés. Il est facile de voir, en comparant entre elles les figures 74, 75 et 76 (pl. V), qu'elles sont le produit d'une végétation qui se fait par la base, et qui finit par donner une série de trois ou quatre cellules superposées.

La partie du tissu calicinal interposée entre ces deux lames épidermiques comprend plusieurs nervures et des variations diverses de tissu cellulaire. Chacun des quatre sépales soudés pour former le calice entier possède une forte nervure médiane, indiquée extérieurement par une forte saillie longitudinale, et près de ses bords, ou à côté de la ligne de soudure des deux sépales voisins, deux autres nervures moins prononcées, qu'indique aussi au dehors une légère saillie longitudinale. Le calice entier comprend donc en tout douze nervures, dont quatre principales ou médianes et huit secondaires ou marginales.

Toutes ces nervures se composent de même de vaisseaux entremêlés et entourés de cellules prosenchymateuses. Les vaisseaux sont des fausses trachées; ils se trouvent situés près de la face interne du calice. Le prosenchyme qui les entoure se compose de cellules étroites, cylindriques, superposées en séries longitudi-

nales et parallèles; les plus étroites sont les plus voisines des vaisseaux. A mesure qu'elles s'en éloignent, leur diamètre devient plus considérable, et elles finissent par passer au vrai parenchyme, qui forme la masse principale du calice (pl. VI, fig. 79). Une coupe transversale passant par une de ces nervures montre qu'elles sont plus voisines de la face interne que de l'externe de cette enveloppe florale.

Le tissu parenchymateux qui constitue la plus grande portion du calice, et qui entoure les nervures, est formé de cellules lâches, à parois minces et transparentes; leur intérieur renferme une assez grande quantité de grains de fécule. Sur une coupe verticale, ces utricules se montrent environ trois fois plus longues que larges, et celles qui se trouvent à peu près à moitié distance entre deux nervures et entre les deux lames épidermiques sont irrégulièrement tortues (pl. VI, fig. 78) : de là de nombreuses lacunes qui rendent le tissu du calice comme spongieux sur ces points.

Le parenchyme lâche existe seul dans l'intervalle des nervures, et là le calice possède beaucoup moins d'épaisseur.

J'ai inutilement cherché des stomates sur de grands lambeaux d'épiderme que j'avais pu arracher sans la moindre difficulté. Ils m'ont paru manquer ici entièrement.

§ 2. Corolle.

Quant à son organisation générale, la corolle offre les mêmes caractères que le calice; néanmoins, certaines de ses parties présentent des particularités que je dois faire connaître.

L'épiderme qui couvre cette enveloppe florale est une membrane très-déliée, formée de cellules aplaties en table, à parois peu épaisses, transparentes et parfaitement incolores, dans lesquelles se montre nettement un nucléus. Toute la coloration de cette lame provient uniquement d'un suc cellulaire de couleur vive purpurine ou violacée. Du reste, toute la couleur de la co-

rolle réside uniquement dans son épiderme ; le reste de son tissu est parfaitement incolore. Dans cet épiderme lui-même, la coloration est fort irrégulière; et au milieu même de cellules très-colorées, il s'en trouve d'isolées ou de groupées en plus ou moins grand nombre, qui sont dépourvues de toute couleur.

Le contour des cellules épidermiques de la corolle est généralement plus irrégulier que dans l'épiderme du calice; il varie aussi sur divers points et, par exemple, il s'allonge, comme de coutume, dans les portions qui répondent aux nervures.

Le tissu de la corolle intermédiaire aux deux lames de l'épiderme comprend, comme dans tout organe appendiculaire, des vaisseaux et des cellules. Les vaisseaux, d'abord réunis en nervures et alors entourés de cellules allongées, se séparent bientôt et finissent par s'isoler au milieu du parenchyme corollin. C'est ainsi que l'on peut aisément suivre leur terminaison en fausses trachées isolées ou par petits faisceaux (pl. VI, fig. 81) ; on voit alors qu'ils viennent finir en pointe fine à une petite distance du bord des lobes corollins.

Le parenchyme de la corolle est lâche, très-délicat, à parois minces, incolores, contenant de petites granulations. Il est, sur certains points, réduit à deux couches de cellules. Dans certains points aussi, le contour des cellules sous-jacentes à l'épiderme est sinueux et irrégulier, de sorte que, l'épiderme enlevé, on trouve sous lui une sorte de réseau.

A l'intérieur et vers sa base, la corolle porte des poils à la hauteur où les filets deviennent libres; ces poils sont simples, articulés, à parois minces; leurs articulations sont un peu renflées.

DEUXIÈME SECTION.

DES ORGANES SEXUELS.

§ 3. Étamines et androcée.

L'étamine et le pistil sont certainement les parties les plus intéressantes à étudier dans la fleur, et leur examen exige de

l'attention, à cause de la multitude et de l'importance des questions auxquelles il donne naissance. Aussi, pour faire connaître aussi bien que cela me sera possible l'histoire de l'organe mâle chez la Clandestine, après quelques mots relatifs à l'organisation du filet adulte, j'exposerai avec détails les résultats de mes recherches sur l'anthère. Ces recherches ont été longues et multipliées. J'ai toujours revu et dessiné plusieurs fois le même objet, et si je n'ai pu trouver la solution de toutes les difficultés, je ne dois sans doute en accuser que mon peu d'habileté, et peut-être aussi un peu la difficulté que présente ce genre de recherches par suite de l'extrême petitesse des objets, surtout du peu de consistance de certaines parties, et de leur faible transparence dans des tranches très-minces[1].

A. *Filet.* Le filet de l'étamine adulte est absolument organisé comme la nervure médiane d'un sépale ou d'un pétale. Il se réduit à un faisceau fibreux et vasculaire entouré de parenchyme: le tout est revêtu d'un étui épidermique. Cet épiderme est analogue à celui des enveloppes florales dans la portion qui répond à leurs nervures; ses cellules sont étroites (pl. VI, fig. 91), très-allongées, disposées avec assez de régularité en séries longitudinales, juxtaposées et parallèles.

B. *Anthère et pollen.* J'ai fait voir plus haut que l'anthère naissante se dégage de l'axe sous la forme d'un mamelon d'abord arrondi, bientôt un peu comprimé de dehors en dedans. Si, à cette époque de son développement, nous la coupons transversalement, elle se présentera à nos yeux sous la forme d'un corps entièrement celluleux, où rien n'indique encore le faisceau vasculaire qui va bientôt s'y montrer (pl. VI, fig. 82). Alors le contour de cet organe, si jeune encore, est arrondi extérieurement; intérieurement il se continue, après un étranglement, avec celui

[1] « Pour les observations sur le développement de l'anthère et du pollen qu'elle contient, « dit Meyen (*Neues System der Pflanzen-Physiologie*, t. III, p. 118), toutes les fleurs ne sont « pas également avantageuses; mais les seules convenables sont celles dans lesquelles les di- « verses parties florales ont de la consistance, etc. » Or, la Clandestine se trouve précisément dans une catégorie très-peu favorable sous ce rapport.

du mamelon central pistillaire. Son style cellulaire forme tout le long de son bord une rangée de cellules un peu convexes en dehors, régulièrement appliquées par leurs côtés contre leurs voisines, et qui constituent une couche d'épiderme. Son tissu intérieur est composé de cellules à coupe hexagonale, à parois un peu épaisses, plus larges dans les parties médiane et dorsale de la coupe, plus serrées et plus étroites à ses deux extrémités et dans sa portion interne. C'est que le développement s'opère principalement en ces derniers points.

Par suite de cet accroissement latéral et interne, la jeune anthère s'isole bientôt entièrement du mamelon pistillaire, et dès lors elle n'est plus fixée que par sa base. En même temps, ses deux côtés se sont accrus considérablement, tandis que sa portion centrale est restée stationnaire; de là, chez le bouton de $0^m,001$ de longueur, elle s'offre, sur une coupe transversale, telle que la montre la figure 83 (pl. VI). Elle se divise alors nettement en deux moitiés latérales et symétriques, qui ne sont absolument que les futures loges. Entre ces deux moitiés, se trouve, dans la longueur de sa face interne, un sillon assez profond: c'est celui qui désormais indiquera à l'extérieur la ligne de séparation des deux loges; à la face externe, cette ligne médiane présente une saillie arrondie, premier indice du filet. Sur cette même ligne médiane, mais intérieurement, se montre déjà le faisceau vasculaire; mais, à cet âge si jeune, il est plus voisin de la face interne que de l'externe, tandis que l'inverse ne tardera pas à se montrer pour se prononcer ensuite de plus en plus.

Sur une bonne coupe, les parois des cellules de cette anthère se distinguent par une assez grande épaisseur. De plus, si l'on examine en particulier chacune de ses deux moitiés symétriques ou des deux loges, on voit son tissu plus large au milieu, plus serré et moins régulièrement disposé vers les deux extrémités. C'est à cette différence de tissu qu'on peut reconnaître, sans peine, de chaque côté, et à ces mêmes extrémités, deux foyers de formation où l'accroissement s'opère avec force : de là ces points

vont bientôt dépasser la portion moyenne; celle-ci formera dès lors une dépression, tandis que les deux extrémités en saillie se feront reconnaître pour deux logettes appartenant à une même loge.

A cet instant, le contour de l'anthère se montre plus sinueux que précédemment. Le sillon interne, déjà profond, sépare entièrement les deux loges, et la saillie dorsale qui lui est opposée est large et très-prononcée. Quant à chaque loge en particulier, elle offre deux avancements arrondis, séparés par une dépression assez marquée. La coupe de l'anthère, dans son entier, montre donc quatre avancements, et sur l'organe entier, chacun de ces avancements est une saillie longitudinale qui correspond à une logette. Dans chaque loge, les saillies des deux logettes sont un peu inégales, la plus interne étant la plus petite des deux. Ce nouvel état est déjà atteint chez les boutons de fleur longs au plus de 0,002.

Si nous examinons maintenant chacune de ces quatre logettes sur une coupe transversale (pl. VI, fig. 84), nous verrons que la grosseur des cellules qui la forment décroît de sa base vers son extrémité, où se trouve encore le foyer de formation et de développement. Avec un peu d'attention, nous pourrons y distinguer une couche externe épidermique dont les cellules n'ont rien de particulier, et sous elle deux autres couches de cellules qui suivent la première dans tout son contour. Sous ces trois séries marginales, nous reconnaîtrons plusieurs rangées de cellules larges, transparentes, régulièrement alignées : ces rangées se dirigent en convergeant et en se rétrécissant vers l'extrémité, qu'elles n'atteignent pas. De la ligne où elles s'arrêtent, jusqu'à la plus interne des deux couches sous-épidermiques, il reste un petit espace qu'occupent des utricules moins transparentes, moins régulièrement disposées, et qui paraissent être en train de se former et de s'organiser. C'est là la jeune masse pollinique, constituée par les utricules-mères naissantes.

Très-peu de temps après, lorsque le bouton de fleur n'a guère

qu'un peu plus de $0^m,002$ de longueur, la logette ayant acquis plus de saillie, la dépression qui la distinguait à l'extérieur de sa voisine est devenue plus profonde, et elle se montre sur l'anthère tout entière comme un sillon de séparation bien marqué. Intérieurement, les trois séries de cellules marginales n'offrent presque plus cette diminution que nous avons vue en elles, de la base vers le point le plus avancé de la logette; de plus, l'espace qui s'étend entre elles et la masse cellulaire centrale est maintenant devenu courbe, et les utricules-mères qui l'occupent forment dès lors un ensemble courbé en arc.

Arrivée à cet état, l'anthère offre, à peu de choses près, la forme générale et l'organisation qu'elle doit conserver longtemps. La seule modification qu'elle subisse encore jusqu'à l'époque où les grains de pollen commencent à se dégager de leur enveloppe et à s'isoler consiste dans un accroissement général, et en particulier dans le développement considérable de la masse pollinique. En effet, à mesure que la masse cellulaire centrale s'allonge, que les trois séries marginales s'étendent et s'élargissent, la masse pollinique suit ce développement, et remplissant toujours l'espace laissé entre ces deux formations cellulaires, elle prend la forme d'un ruban assez large, courbé en fer à cheval parallèlement à tout le contour extérieur de la logette.

Cette forme générale de l'anthère est déjà arrêtée chez le bouton de $0^m,0025$ à $0^m,003$ de longueur. Cet organe comprend dès lors quatre logettes disposées en deux paires latérales, rattachées l'une à l'autre par la masse médiane cellulaire et vasculaire qui constitue le connectif. Chaque paire latérale forme une loge; les deux loges sont séparées, à la face interne de l'anthère, par un sillon longitudinal très-profond, et deux sillons latéraux, moins fortement creusés, marquent sur chaque loge la séparation des deux logettes.

A son intérieur, l'anthère entière est formée d'une portion moyenne à grandes cellules, au centre de laquelle se trouve le faisceau vasculaire, sur les côtés et sur le devant de laquelle sont

placées les quatre logettes. D'elle partent des séries d'utricules larges, transparentes, contenant des granules qui grossiront plus tard et se feront reconnaître pour de la fécule. Ces séries se rapprochent en convergeant vers chaque logette, et elles vont y former un grand avancement arrondi que j'ai nommé plus haut masse celluleuse centrale (pl. VI, fig. 85). Tout autour de cette masse centrale des logettes, s'étend la masse pollinique, distinguée par la couleur jaunâtre et par la faible transparence de ses utricules; enfin, en dehors de celle-ci, règnent les trois séries de cellules qui constituent les parois de l'anthère.

Dans tout ce qui précède, je ne fais aucune mention de cette sorte d'enveloppe que MM. Ad. Brongniart et de Mirbel ont reconnue chez le Cobæa, la Courge, etc. autour des utricules polliniques, et que ce dernier savant a désignée sous le nom de *tégument utriculaire;* c'est que j'ai eu beau la chercher sur un grand nombre de sections, je n'ai rien trouvé qui me la représentât. J'ai toujours vu les utricules polliniques entourant immédiatement la masse centrale, recouvertes aussi immédiatement par les trois couches de cellules valvaires. Il faut donc ou que ce tégument n'existe pas chez la Clandestine, ou que sa ténuité soit bien grande, pour qu'il ait échappé à toutes mes recherches.

J'ai indiqué sur les parois des anthères avancées ou adultes ces poils dont l'enchevêtrement les fait adhérer l'une à l'autre au sommet, et qui forment à leur base une sorte de bordure pileuse. On peut voir ces poils naître et s'allonger chez le bouton fort jeune et long d'environ $0^m,0025$ (pl. VI, fig. 87). On reconnaît alors que certaines d'entre les cellules de l'épiderme s'élèvent en mamelons, que ces mamelons deviennent de plus en plus saillants, et que bientôt ils donnent des poils d'abord unicellulés, plus tard articulés. La figure 87 réunit les divers degrés de cette formation.

Je viens de montrer l'organisation de l'anthère qui a complété ses formes, et j'ai dit que la disposition de ses parties ne subit plus de modifications importantes depuis l'instant où la masse

pollinique s'est courbée en fer à cheval jusqu'à celui où les grains de pollen commencent à se dégager de leurs utricules-mères. Pour terminer cette première partie de l'histoire de l'organe mâle, il me reste à jeter un coup d'œil sur le développement du pollen.

Or, voici quelle m'a semblé être la marche de ce développement : le contenu granuleux des utricules polliniques se trouve, peu après leur formation, partagé en quatre fragments. Chacun de ces fragments s'arrondit et forme un grain de pollen, et les quatre grains qui en résultent, disposés, comme d'ordinaire, en un petit tétraèdre, sont séparés par des cloisons qui les isolent entièrement. On voit que c'est ici la marche ordinaire et la plus simple.

Je me suis proposé de reconnaître quand et comment s'opérait cette séparation du contenu de l'utricule; comment, en d'autres termes, et d'où naissaient les cloisons que l'on reconnaît si aisément chez l'utricule-mère adulte. J'avoue que je n'y ai pas réussi, et je crois que, sous ce rapport, les anthères de la Clandestine présentent beaucoup de difficultés. Le peu de consistance, la médiocre transparence des utricules polliniques très-jeunes, ne m'ont pas permis de faire des coupes suffisamment nettes, ni de reconnaître suffisamment l'organisation que montraient ces coupes. De plus, je n'ai pu isoler ces utricules dans leur première jeunesse, ni mécaniquement, ni au moyen d'agents chimiques. Chez les plus jeunes que j'aie pu isoler, les jeunes grains de pollen étaient déjà formés. Cependant, quelques-unes appartenaient à des boutons de $0^{m},002$ seulement de longueur. Ce qui me console presque de mon peu de succès sous ce rapport, c'est de voir un observateur de l'habileté de Meyen échouer aussi pour les mêmes recherches, sur une plante que lui-même propose comme l'une des plus avantageuses pour ce genre d'observations (la Courge).

Les plus jeunes utricules polliniques que j'ai observées présentaient, sur leur côté visible, presque toujours trois petits

grains de pollen, le quatrième étant situé par derrière; mais parfois aussi les quatre grains semblaient être sur le même plan, ou du moins ils se montraient à la fois sur la même face. Dans tous les cas, ces grains étaient comme agglomérés au centre de l'utricule, dont les parois paraissaient ainsi d'une grande épaisseur. Dans cet état, les dimensions de l'utricule sont encore très-faibles; celles que représente la figure 92 (pl. VII) n'auraient eu que $0^{mm},016$. Le grain de pollen lui-même montre à son intérieur un petit cercle qui n'a guère que le tiers du diamètre total.

Chez les boutons longs de $0^{m},003$ ou $0^{m},0035$, je n'ai pas remarqué de changement bien notable. Seulement, l'utricule-mère elle-même (pl. VII, fig. 93, 94) a un peu grossi, et ses grains de pollen paraissent moins serrés à son centre; on trouve entre eux la place des cloisons qui ne semblaient pas pouvoir exister en entier dans l'état précédent.

A partir de cet instant, le développement des utricules polliniques marche avec une telle rapidité, que déjà, chez les boutons de $0^{m},004$ ou $0^{m},005$ de longueur, leur forme est parfaitement arrêtée, leurs cloisons minces, solides, bien marquées et complètes (pl. VII, fig. 95, 96). La substance de ces utricules a toujours un aspect presque gélatineux; sa transparence est moindre que celle des cellules voisines. Les utricules elles-mêmes n'ont pas des formes invariables ni toujours les mêmes; au contraire, elles se moulent sur leurs voisines, et de là les variations qu'indiquent en elles les figures ci-jointes. Néanmoins, ce qui ne paraît pas varier chez elles, c'est le nombre de leurs grains de pollen, toujours par quatre, bien séparés par des cloisons, et occupant les quatre sommets d'un petit tétraèdre.

Dans cet état, et à l'âge où est maintenant l'anthère, les utricules polliniques n'adhèrent presque plus l'une à l'autre; de telle sorte que, si l'on fait une coupe transversale, il arrive toujours que plusieurs se détachent et viennent nager dans le liquide qui baigne la tranche sur le porte-objet. Il arrive même assez souvent, dans ce cas, que quelques grains de pollen s'échappent de

leur loge; on peut alors les observer intacts, et ils se montrent tels que les représentent les figures 95 et 96 (pl. VII), à deux âges un peu différents.

En comparant ces derniers grains avec ceux des boutons plus jeunes, on voit que, tandis que ceux-ci étaient formés d'un simple petit globule dans lequel paraissait être contenu un globule beaucoup plus petit, ce qui indiquait une grande épaisseur dans leur membrane, les premiers se montrent sous la forme d'un globule régulier à double membrane : l'extérieure est plus épaisse; elle paraît légèrement et finement granuleuse à sa surface. A l'aspect sous lequel elle s'offre quelquefois, on dirait que le grain est polyédrique; car sa surface semble être partagée en plusieurs faces polygonales, résultant nécessairement de la pression réciproque.

Dans l'état où je viens de montrer l'anthère en dernier lieu, chez les boutons longs d'environ $0^m,005$, on peut dire que les utricules-mères forment encore une masse pollinique, quelque faible que soit leur adhérence réciproque. Ces utricules sont, du reste, parfaites dans leur conformation, et, arrivées à ce point, elles marquent la fin de la première partie de l'histoire du pollen et de l'anthère.

La deuxième partie de cette histoire présente encore quelques faits importants. D'abord, quant au pollen lui-même, ses utricules-mères commencent par s'isoler tout à fait; en même temps, leurs parois se ramollissent, se fondent en quelque sorte, et elles sont résorbées peu après. Ces phénomènes s'opèrent si vite, que, chez des boutons de $0^m,006$ seulement, j'ai trouvé les grains de pollen parfaitement libres; le seul vestige qui restât encore des utricules-mères consistait en une matière jaunâtre, comme gommeuse, qui se montrait entre certains grains. La résorption se complète en fort peu de temps, et dès lors le pollen est entièrement libre et sans ordre dans les quatre cavités de l'organe mâle.

Pour celui-ci, il subit lui-même quelques modifications. La

première consiste dans la fusion des deux logettes d'un même côté en une cavité ou une loge unique. Voici le mécanisme de cette fusion : les deux poches en fer à cheval, d'un même côté, sont séparées par un avancement celluleux, qui va se rattacher à la face interne des parois de l'anthère (pl. VI, fig. 86). D'abord, la continuité est parfaite entre les deux, et le sillon latéral extérieur indique la ligne d'adhérence de ces deux parties; mais, dès que le bouton a acquis près de $0^{m},015$ de longueur totale, on voit à l'extérieur le sillon s'élargir et s'évaser; à l'intérieur, l'avancement celluleux se rétrécir à son extrémité externe, et peu après se détacher sur ce point. Par là, les deux cavités voisines n'en forment plus qu'une seule, dans laquelle les grains de pollen sont simplement contenus, sans qu'il existe la moindre adhérence, soit entre eux, soit avec les parois de la loge commune. La partie des valves de l'anthère le long de laquelle s'est faite la séparation est maintenant une bande plus mince, plus transparente, le long de laquelle se fera plus tard la déhiscence. Elle est bordée des deux côtés par des cellules fibreuses, en ruban assez large, et dont la spire est déjà bien formée à cet âge où le bouton est encore peu avancé, où la corolle commence à peine de s'ouvrir au sommet, où le filet des étamines se dégage seulement. Ces cellules fibreuses sont ovoïdes, un peu allongées; leur fibre est spirale, parfois rameuse. Sur les bords de la future ligne de déhiscence, elles sont exactement juxtaposées et se font distinguer par la régularité de leur forme. A partir de cette ligne, elles garnissent une zone assez étroite, qui n'occupe pas plus de 1/5 ou 1/6 du contour total de la logette, et elles vont se terminer et passer à des cellules à contour sinueux et irrégulier qui leur font suite.

La disposition de ces cellules fibreuses le long de la ligne de déhiscence, et là seulement, me semble un bon argument en faveur du rôle que leur attribuent, pour l'ouverture des loges, plusieurs physiologistes, et entre autres M. Purkinje, dans son grand travail sur ce tissu remarquable des anthères.

Ce n'est pas la seule modification que subissent les valves de l'anthère. Nous avons vu jusqu'ici qu'elles étaient composées de trois couches de cellules recouvrant et enveloppant immédiatement les utricules polliniques. Après que celles-ci ont laissé libre leur pollen, la membrane des valves perd de son épaisseur, et enfin, si nous l'examinons après la sortie du pollen, nous la trouvons considérablement amincie. Dans sa portion moyenne, qui est aussi la plus étendue, elle n'a conservé qu'une seule assise de cellules un peu aplaties (pl. VI, fig. 88); le long de la bande de déhiscence, elle possède une couche de cellules fibreuses couverte seulement en dehors d'une assise de cellules aplaties et qui paraissent à moitié oblitérées (pl. VI, fig. 89); enfin, au côté opposé de la logette, on y retrouve, sur une faible largeur, deux des couches de cellules valvaires primitives.

J'ai montré le pollen arrivé à l'état de globules à deux membranes et à surface d'aspect granuleux. Il approche alors beaucoup de son état parfait : ainsi, chez les boutons d'environ $0^m,007$ de longueur (pl. VII, fig. 97), les trois sillons de sa surface sont parfaitement marqués; sa membrane externe a un aspect décidément granuleux; cependant, ses dimensions ne sont encore que moitié de celles du grain adulte : aussi ne lui manque-t-il plus à subir qu'un simple grossissement, et ce grossissement est presque complet lorsque le bouton n'a encore que $0^m,015$ de longueur.

Entièrement développés, les grains du pollen de la Clandestine, examinés à sec (pl. VII, fig. 98), sont ovoïdes, marqués de trois sillons longitudinaux; leur membrane externe est assez épaisse, peu transparente, d'aspect granuleux; l'interne est mince, comme d'ordinaire extensible et transparente.

J'ai cherché à reconnaître la nature des granulations apparentes de cette membrane : leurs dimensions sont si faibles, qu'il faudrait, pour les bien examiner, un grossissement fort considérable. Je n'ai employé que celui de 590 diamètres, ceux qui dépassent ce chiffre donnant généralement peu de netteté. Il m'a semblé par là que ces

granulations sont formées comme l'indiquent Fritzsche Meyen (*Pflanzen-Physiologie*, 3e vol.) et M. Dujardin (*Manuel du Micrographe*, collect. Roret), c'est-à-dire que ce ne sont pas des cellules distinctes, mais des sortes de lignes saillantes, circonscrivant de petites aréoles semblables à des points enfoncés.

Pour observer la membrane interne, il suffit de mettre le pollen sous l'eau. En général, on voit bientôt se former sur un point de la surface du grain un mamelon produit par le gonflement de la membrane interne, qui dépasse ainsi l'externe; après quoi, le grain continuant à se gonfler, le mamelon se crève, et la fovilla est projetée en deux ou trois jets. Je l'ai vue alors se répandre dans l'eau. Dans d'autres cas, j'ai vu l'eau produire sur ces grains un effet différent; elle a distendu la membrane interne dans toute son étendue, de manière à rompre l'externe le long des trois sillons: de là ces sillons sont devenus de larges bandes irrégulières, sur lesquelles il s'est fait parfois des déchirures; ailleurs, le gonflement de la membrane interne a déterminé la rupture de l'un des trois sillons, après quoi cette membrane interne a fait saillie (pl. VII, fig. 99) par la fente en une grosse vésicule transparente, qui même a pu se séparer entièrement: la membrane externe, dans ce dernier cas, est restée ouverte et s'est montrée alors transparente. Je n'ai observé ce dernier effet que sur des grains qui avaient fait dans l'eau un séjour de trois ou quatre heures sans faire explosion, et dont sans doute le gonflement s'était opéré peu à peu et très-lentement. La conséquence qui se déduirait naturellement, il me semble, du dernier fait serait que la membrane interne n'adhère que faiblement ou pas du tout à l'externe, puisqu'elle a pu sortir de celle-ci en entier, ou presque en entier, sous forme de vésicule.

Quant à la sortie du boyau pollinique sur le stigmate, je l'ai reconnue également chez la Clandestine, et j'ai vu ce boyau s'insinuer entre les papilles stygmatiques; mais je n'ai pas cherché à le suivre plus loin. Ce sujet a été étudié trop souvent, et par des observateurs trop habiles, pour que j'eusse pu espérer d'ajouter.

sous ce rapport, le moindre fait à ceux qui sont acquis aujourd'hui à la science.

Pour terminer ce que je crois pouvoir appeler l'histoire des étamines de la Clandestine, j'ajouterai quelques mots sur les longs poils que ces organes présentent à leur extrémité inférieure. J'ai déjà signalé la naissance de ces poils chez de très-jeunes boutons de fleur. Dans l'état adulte, ils se montrent articulés; leurs articles sont presque cylindriques, à parois minces, un peu inégales à leur surface, ou même présentant de petites aspérités coniques; mais ce que je trouve de plus remarquable sous ce rapport, c'est qu'à l'extrémité inférieure de chaque logette se montre une sorte de grosse soie formée par la soudure d'un faisceau de ces poils tout entier. Cette soie (pl. VI, fig. 90) est conique, obtuse et inégale au sommet, et sur toute sa surface on reconnaît aisément les traces de la soudure des poils du pinceau primitif.

§ 4. Du disque.

Le disque de la fleur adulte est, avons-nous vu, une sorte d'écaille concave en dessus, épaisse, dont le bord supérieur porte cinq petits festons arrondis. Si l'on examine cette écaille sur une coupe transversale, on reconnaît qu'elle est formée d'un tissu cellulaire à mailles petites et serrées, traversé dans sa longueur par cinq petits faisceaux vasculaires, analogues, quant à leur forme et à leur composition, à ceux des enveloppes florales. Chacun d'eux répond à l'un des cinq festons marginaux. Leur existence peut aider puissamment pour l'explication de la nature de cette écaille hypogyne.

§ 5. Du pistil.

Les traits les plus importants de l'histoire organogénique du pistil entier sont ceux que j'ai exposés plus haut, en montrant comment se développe et s'arrête peu à peu la forme de l'ovaire, du style, du stigmate, et même du placentaire. Dès qu'il est

arrivé à l'état où je l'ai conduit, tout l'intérêt se concentre dans celle de ses parties dont je n'ai pu encore indiquer que la naissance, sous la forme d'un simple mamelon celluleux, dans l'ovule qui, dès sa première apparition, devient le siége des phénomènes les plus remarquables. Je crois donc qu'il sera suffisant d'étudier anatomiquement le pistil lui-même dans l'état adulte, et en laissant pour le moment de côté l'ovule, qui devra être le sujet d'un paragraphe distinct.

A. *De l'ovaire.* L'ovaire de la fleur adulte est fortement comprimé sur ses côtés; de là sa section transversale ressemble à une losange dont les faces seraient un peu convexes, dont les angles seraient émoussés et même creusés d'un petit enfoncement. Ses bords, supérieur et inférieur, répondent aux sutures à venir; ses deux faces internes portent, chacune dans son milieu, le placentaire, qu'indique extérieurement une dépression longitudinale.

Sur cette même coupe transversale, les parois de l'ovaire se montrent formées de deux couches celluleuses, l'une interne, l'autre externe, séparées par une rangée de faisceaux vasculaires assez distants. Ses deux faces sont revêtues d'une couche de cellules épidermiques, à section presque carrée; celles de la couche externe sont incolores ou à peu près; au contraire, celles de la couche interne sont d'une couleur purpurine qu'elles doivent au suc coloré qu'elles renferment. Cette teinte, très-prononcée dans le voisinage des placentaires, va en s'affaiblissant vers les sutures, et elle disparaît à une certaine distance d'elles. La lame épidermique interne est interrompue à la naissance des placentaires, qui, surtout dans un état plus jeune, font l'effet d'une sorte de hernie qui serait produite par la substance des parois ovariennes.

Les deux couches parenchymateuses qui constituent la presque totalité des parois de l'ovaire diffèrent assez peu l'une de l'autre: l'interne est un peu plus épaisse, et par là les vaisseaux sont un peu plus rapprochés de la face externe. Cette faible différence d'épaisseur s'efface peu après la fécondation, et dans le fruit

elle se montre dans un sens tout à fait inverse. Les cellules de ces deux couches sont hexagonales et assez régulières sur leur coupe; leur grosseur augmente des faces vers le milieu de l'épaisseur totale : elles contiennent toutes des grains amylacés, qui plus tard rempliront presque entièrement leur cavité.

Ces deux couches de parenchyme règnent sur tout le pourtour de l'ovaire; mais, arrivées près des lignes médianes des deux carpelles ou des sutures, elles ne se réunissent pas. Elles sont séparées en ce point l'une de l'autre par plusieurs séries linéaires de cellules qui s'étendent en divergeant de l'intérieur vers l'extérieur. La forme allongée et la disposition sériale de ces cellules les fait aisément distinguer; elles déterminent là une interruption entre les deux côtés de l'ovaire, et elles doivent jouer le plus grand rôle lors de la séparation de ces côtés en valves du fruit aux deux sutures.

Les placentaires se montrent sous l'aspect de simples excroissances celluleuses traversées chacune, dans le sens de sa longueur, par deux faisceaux vasculaires ou nervures marginales.

La disposition des faisceaux vasculaires dans l'ovaire est assez remarquable; à sa base, on n'en trouve que deux volumineux. Dès ce point, les parties qui composaient ces deux masses s'écartent, se disséminent sur toute la circonférence. Dans l'épaisseur des parois, ces vaisseaux m'ont semblé être tous des fausses trachées à spire plus ou moins entière, plus ou moins décomposée en anneaux, etc. Vers les deux sutures, ils sont groupés en assez grand nombre; dans tout le reste des parois ovariennes, ils sont presque isolés ou par très-petits faisceaux.

Indépendamment des tubes vasculaires qui entrent dans la composition des parois de l'ovaire, il en existe encore quatre faisceaux qui suivent par deux la longueur de chaque placentaire, et s'y terminent à la hauteur des ovules.

Les faisceaux des parois qui avaient suivi une direction divergente jusque vers le milieu de la hauteur de l'ovaire, ou jusqu'à sa portion la plus renflée, convergent l'un vers l'autre au-dessus

de ce point jusqu'à la base du style; ils se rapprochent en même temps des sutures, et enfin, arrivés au sommet de l'ovaire, ils se réunissent en deux groupes, l'un supérieur, l'autre inférieur, qui pénètrent dans le style, le suivent dans toute sa longueur et se terminent dans le stigmate.

B. *Du style.* Le style de la Clandestine présente tous les traits généraux de la structure de ceux des autres fleurs. Ce n'est autre chose qu'un long tube de très-petite ouverture, à parois extrêmement épaisses. La cavité qui le suit dans toute sa longueur continue celle de l'ovaire, et, à son extrémité supérieure, elle va s'ouvrir au fond de l'entonnoir stigmatique : elle établit donc une communication directe entre l'ovaire et l'atmosphère.

La paroi du tube ou la substance solide du style est formée d'un tissu cellulaire lâche, dont les cellules sont presque arrondies sur leur coupe transversale, et laissent entre elles à leurs angles des méats très-visibles. Ces cellules sont fort larges dans la plus grande portion de l'organe; dans le style adulte (pl. VII, fig. 100), on voit des aréoles notablement plus petites leur succéder à l'intérieur presque brusquement. Dans le style jeune, au contraire (pl. VI, fig. 101), le décroissement est progressif et continu de l'extérieur à l'intérieur. Ces cellules contiennent des grains de fécule, nombreux chez toutes, assez gros chez les grandes. L'épiderme qui les enveloppe toutes se fait remarquer par l'épaississement de sa paroi externe. Les aréoles qui forment la paroi immédiate du tube sont très-petites, et leur tissu est plus transparent que celui de tout le reste de l'organe. Je dirai bientôt à quelle formation particulière elles me semblent appartenir. Enfin, sur deux points diamétralement opposés de la coupe, l'un supérieur, l'autre inférieur, se trouvent les deux faisceaux vasculaires qui continuent ceux des parois de l'ovaire. Ces deux faisceaux sont voisins du canal stylaire, et ils sont placés plus intérieurement que le tissu à larges mailles.

Sur une coupe longitudinale (pl. VII, fig. 102), on reconnaît que les grandes cellules sont parenchymateuses, environ trois

fois plus longues que larges, régulièrement superposées en séries rectilignes; que celles de l'épiderme sont un peu plus courtes; que les petites aréoles de la section transversale appartiennent, pour la plupart, à des cellules allongées qui entourent en majeure partie les deux faisceaux vasculaires; enfin, que les parois immédiates du canal stylaire sont revêtues de ces tubes grêles et très-délicats dont M. Rob. Brown a le premier reconnu l'existence, qu'il a nommés *tubes muqueux*, et sur lesquels la physiologie végétale de Meyen renferme assez de détails.

On voit aussi, sur cette coupe, la nature des faisceaux vasculaires (pl. VII, fig. 103), composés uniquement, selon que j'ai cru le reconnaître, de fausses trachées, qui se décomposent vers l'extérieur en vaisseaux spiro-annulaires, le tout entouré de cellules allongées.

Quant aux tubes muqueux, étudiés chez la fleur bien épanouie, ils se montrent sous la forme de petits tubes étroits, allongés, posés bout à bout, de manière à acquérir une longueur considérable. Ils se trouvent simplement juxtaposés, et s'il existe entre eux une adhérence quelconque, elle est si faible, que le scalpel très-bien affilé dont je me servais pour mes coupes les séparait toujours. Leurs articles sont très-longs proportionnellement à leur largeur (pl. VII, fig 105), cylindriques, fort transparents; leurs parois sont minces, unies; ils contiennent de petits granules épars. Ce qu'ils m'ont paru présenter de plus remarquable consiste dans leur terminaison supérieure et inférieure. La première, ou leur origine (pl. VII, fig. 104), se trouve dans le tissu même du stigmate, dont elle forme les couches profondes; elle s'y montre sous l'apparence de cellules étroites, allongées, fusiformes, un peu obtuses et légèrement arrondies à leur bout supérieur. Ces sortes de cellules sont écartées et rayonnantes dans le stigmate; elles se dirigent ensuite vers le canal stylaire, que leur continuation doit revêtir.

Quant à la terminaison inférieure, j'ai pu la reconnaître chez quelques-uns, et j'ai vu qu'elle a lieu (pl. VII, fig. 105) par le

moyen d'un article très-grêle, très-long, terminé en une pointe fine et allongée. C'est, sans doute, cet article terminal qui, s'accroissant ensuite et se divisant par des cloisons transversales, donne lieu à l'allongement des tubes muqueux du haut vers le bas.

C. *Du stigmate.* J'ai déjà décrit la configuration extérieure du stigmate de notre plante; il ne me reste donc qu'à faire connaître sa structure.

Toute la surface extérieure de cet organe est revêtue de papilles volumineuses qui la rendent comme veloutée. Ces papilles ont la forme de bouteilles à large panse et à goulot court. Leurs parois sont minces et transparentes; elles ne possèdent aucun contenu granuleux. Elles sont placées l'une à côté de l'autre en nombre immense, et leur juxtaposition les rend prismatiques (pl. VII, fig. 107) à leur partie inférieure. Elles revêtent toute la surface convexe du stigmate; elles descendent même dans l'espèce d'entonnoir que présente le centre de cet organe. Du côté extérieur, arrivées au bord du renflement stigmatique, elles décroissent peu à peu, et finissent par n'être plus que de simples mamelons, qui se montrent même sur les premières cellules de l'épiderme du style.

Le tissu interne du stigmate est très-lâche : il se compose d'abord d'une ou deux assises de cellules courtes, arrondies ou légèrement oblongues; au-dessous, leur forme s'allonge; de plus, elles prennent une disposition rayonnante vers l'orifice du canal stylaire; l'extrémité de ces utricules profondément situées constitue une sorte de mamelon; enfin, elles passent aux cellules fusiformes que je viens de désigner comme l'origine des tubes muqueux. La figure 106 (pl. VII) reproduit cette organisation dans son ensemble; la figure 109 (pl. VII) indique la forme de plusieurs de ces cellules isolées et prises à diverses profondeurs. Il est facile de reconnaître, chez quelques-unes, le commencement du tube muqueux.

C'est au milieu de ce tissu à cellules allongées, et un peu au-

dessus du sommet du style, que les deux faisceaux vasculaires viennent se terminer. J'ai cru reconnaître que chacun d'eux s'élargit un peu à sa terminaison, mais qu'il n'envoie autour de lui aucune branche dans le tissu du stigmate lui-même.

D. *De l'ovule.* A sa première apparition, l'ovule n'est qu'un simple mamelon arrondi et s'élevant sur les côtés du placentaire. Ce mamelon est celluleux; les aréoles que présente sa surface sont petites et serrées, et son axe longitudinal est dans une direction à peu près horizontale. C'est sous ce premier état qu'il est représenté dans la figure 66 C (pl. V). Bientôt il s'allonge et se prononce davantage, et par là il constitue un petit corps assez saillant et arrondi, dont l'axe n'est plus une ligne droite, mais bien un petit arc à concavité supérieure. Cette légère courbure du jeune ovule se prononce de plus en plus à mesure qu'il s'allonge, et en peu de temps sa forme générale est devenue celle d'un cône recourbé (pl. VIII, fig. 116), dont le sommet se trouve relevé verticalement, et qui se fixe au placentaire par une base très-large. Selon les idées admises aujourd'hui généralement dans la science, l'ovule, dans cet état très-jeune et rudimentaire, ne se compose encore que du nucelle, partie essentielle et fondamentale, qui préexiste à toutes les autres. Aucun repli ne se montre autour de lui pour indiquer une enveloppe ovulaire quelconque, même naissante, et par suite ce nucelle est encore entièrement nu dans toute sa longueur. Les boutons de fleur dans lesquels l'ovule apparaît sous ce dernier état sont encore très-jeunes et longs seulement d'environ deux millimètres et demi.

Mais peu de temps suffit pour amener dans ce jeune organe des formations et des modifications importantes. Si nous examinons, par exemple, la figure 117 (pl. VIII), nous y observerons une configuration toute différente. Dans le nouvel état reproduit par cette figure, le nucelle n'est plus nu; il a maintenant une enveloppe qui s'étend sur lui, et dont l'ouverture exostome ou, plus vaguement, micropyle, ne laisse saillir au dehors que l'extrémité du cône nucellaire. Ce revêtement de la partie inférieure du nu-

celle a déjà acquis une grande épaisseur, de sorte que l'ovule, dans son ensemble, a maintenant la forme d'un corps ovoïde courbé vers le haut de l'ovaire, dont l'extrémité, comme tronquée, est surmontée par le bout fortement proéminent du cône nucellaire, et dont la base, déjà rétrécie, commence à le distinguer nettement du placentaire.

Toute la suite du développement ovulaire jusqu'au moment de la fécondation m'ayant paru ne différer en rien de ce qu'on sait déjà, et reproduisant la série de phénomènes qu'on observe dans la généralité des ovules anatropes, je ne crois pas devoir entrer à cet égard dans des détails qui n'ajouteraient rien d'intéressant aux faits déjà acquis à la science. Je me bornerai donc à renvoyer aux figures 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, de la planche VIII et à leur explication.

Au moment de l'épanouissement de la fleur, l'ovule a terminé à peu près son changement de position, de telle sorte que son anatropie est complète, et que son exostome est devenu très-voisin du funicule; de plus, la partie supérieure de son tégument s'est allongée, s'est épaissie fortement, et par là le sommet du nucelle a fini par être très-enfoncé. Chez la fleur adulte, une coupe longitudinale (pl. VIII, fig. 121) montre que ce nucelle s'est peu accru proportionnellement aux autres parties; il a conservé sa forme conique, mais il s'est un peu renflé vers son milieu; il s'élève de la chalaze, qu'une tache plus foncée fait reconnaître, et vers laquelle on voit se diriger les vaisseaux du funicule parallèlement au raphé. Enfin, de son extrémité part un canal micropylaire long, étroit et creusé dans les bords, considérablement épaissis, du tégument ovulaire.

ARTICLE 4.

DIVISION DES VAISSEAUX DU PÉDONCULE ET LEUR PASSAGE DE CELUI-CI À LA FLEUR.

J'ai pensé qu'il pouvait y avoir de l'intérêt à examiner quelles sont les modifications successives que le pédoncule subit dans sa

structure, pour donner naissance aux diverses parties de la fleur. Pour me fixer sur ce point, j'ai fait une série de coupes transversales, à partir d'une distance assez grande de la base de la fleur, jusque dans la fleur elle-même, et je vais exposer ici rapidement le résultat de ces observations.

A plus d'un centimètre au-dessous de la fleur, la zone ligneuse du pédoncule perd sa forme arrondie; elle s'allonge en un ovale qui, lui-même, indique une tendance à se transformer en rectangle. Une moelle abondante occupe le centre de ce pédoncule, et ses cellules, très-larges au milieu, décroissent progressivement vers les bords; en un mot, la moelle est à son état normal. La couche ligneuse est décomposée en faisceaux vasculaires distincts, irréguliers, entourés de prosenchyme, et plus en dehors se montrent, sous leur état ordinaire, la zone libérienne, l'enveloppe cellulaire et l'épiderme.

Plus haut, à $0^m,004$ seulement sous la fleur, la zone fibro-vasculaire a pris la forme d'un rectangle, les autres parties et la moelle en particulier restant encore sans altération bien appréciable. Mais, à $0^m,0025$ au-dessous de la fleur, les changements sont devenus beaucoup plus sensibles. Les quatre angles du rectangle vasculaire sont fortement saillants, et il est facile de voir qu'ils ne tarderont pas à s'isoler; de plus, les cellules médullaires sont devenues beaucoup plus petites et plus serrées.

A près d'un millimètre au-dessus de cette coupe, nous voyons le rectangle vasculaire entièrement déformé. Ses angles se sont à peu près isolés, et ils forment déjà les quatre faisceaux destinés au calice; ses faces sont sinueuses et leur inégalité est importante à constater. Celle qui répond au côté inférieur de la fleur est plus large et très-peu sinueuse; les deux latérales sont courtes et à concavité simple; la supérieure présente entre deux enfoncements profonds un avancement considérable. On voit, du reste, ici que, puisque chacun des quatre angles donne un faisceau calicinal, le nombre quaternaire se trouve, pour cette

enveloppe florale, même dans la profondeur du pédoncule, et que l'avortement qui a supprimé la cinquième partie, que fait admettre la théorie, a eu des causes profondes dans l'organisation.

Jusqu'ici on a pu reconnaître une moelle au centre de la zone vasculaire, quoique modifiée par le rétrécissement de ses utricules; mais au-dessus de ce point, nous ne trouvons plus rien que l'on puisse appeler de ce nom. Nous pouvons bien encore distinguer à leur transparence quelques cellules médullaires entremêlées aux vaisseaux; mais elles ne forment plus une masse unique, et de plus elles sont très-petites.

En continuant cet examen, j'ai vu s'isoler d'abord entièrement les quatre faisceaux calicinaux, tandis que les cinq destinés à la corolle restaient encore rattachés au centre, mais bien indiqués.

Sur ces cinq faisceaux corollins, les deux supérieurs étaient fournis par l'avancement que j'ai indiqué à la face supérieure du rectangle vasculaire. Plus intérieurement que ces faisceaux calicinaux et corollins, se montrait une masse centrale à petites cellules, traversée par quatre paquets de vaisseaux dirigés obliquement vers la fleur.

A la coupe supérieure, les cinq faisceaux corollins étaient entièrement séparés, et les deux supérieurs, qui se faisaient auparavant remarquer par leur grosseur et par leur rapprochement, s'étaient ici écartés l'un de l'autre. Mais c'était seulement à une coupe plus haute que s'isolaient les quatre faisceaux destinés aux étamines. Après la séparation de ceux-ci, le centre des coupes n'était plus occupé que par une masse unique dans laquelle les vaisseaux restants étaient divisés en trois faisceaux superposés en ligne droite du bas vers le haut de la fleur. Parmi eux, l'inférieur se distinguait par la direction oblique de ses vaisseaux : c'était celui qui fournissait au disque ses cinq nervures. Les deux supérieurs appartenaient chacun à l'un des carpelles ovariens, et leur situation indiquait à merveille celle de ces deux carpelles, et par suite la nature des placentaires.

Après ce court exposé[1], une coupe verticale du pédoncule achèvera de nous fixer sur cette division de la zone fibro-vasculaire en faisceaux isolés; mais surtout elle nous montrera la diminution progressive des cellules médullaires, ou, plus exactement, la disparition progressive de la moelle.

En résumé, on voit ici que l'isolement des faisceaux destinés aux diverses parties de la fleur se fait absolument dans l'ordre suivant lequel nous avons vu précédemment paraître l'un après l'autre les verticilles qu'elles forment. De plus, nous voyons aussi que, là où l'une des parties de ces verticilles a disparu par avortement, son avortement a eu une cause intime et profonde, puisqu'aucun vaisseau ne s'est isolé pour indiquer même la place qu'aurait dû occuper l'organe manquant.

CHAPITRE II.

DU FRUIT.

La fécondation a eu lieu; la corolle, les étamines, se flétrissent; le calice et l'ovaire continuent leur accroissement. A mesure que celui-ci grossit pour devenir fruit, le calice s'élargit en continuant de l'envelopper et de l'abriter, et il persiste à remplir ce rôle protecteur jusqu'après que les semences ont été projetées, et que les deux valves de la capsule se sont enroulées.

Pendant cette nouvelle époque de la vie végétale, l'intérêt se concentre sur l'ovule fécondé qu'une série de phénomènes va transformer en graine. Je me suis occupé de suivre la marche de ce développement important; mais le peu de durée de la végétation extérieure de la Clandestine, surtout les pluies fréquentes qui, cette année (1843), ont accompagné les mois d'avril et de mai, et qui ont bouleversé à diverses reprises les rives des ruis-

[1] Pour lequel je ne reproduis pas ici les dessins des coupes transversales que je viens de décrire, afin de ne pas trop multiplier les figures déjà nombreuses qui accompagnent ce travail.

seaux où je puisais la matière de mes observations, ces causes et d'autres encore, tout aussi indépendantes de ma volonté, ne m'ont pas permis de terminer mes recherches. Aussi prendrai-je le parti d'en supprimer l'exposé, et de me borner à la description du fruit et de la graine adultes. J'ai moins de regrets de laisser cette lacune au cadre que je m'étais tracé, lorsque je songe que, jusqu'à l'épanouissement de la fleur, l'ovule n'a pas paru s'écarter de la marche ordinaire, et que probablement il ne s'en écarte pas davantage après sa fécondation. Il est donc à présumer que son étude n'ajouterait rien à ce que nous ont appris sur ce sujet, envisagé en général, les belles observations de MM. de Mirbel, Schleiden, Decaisne, Meyen, etc.

ARTICLE 1^er^.

DU PÉRICARPE.

Le fruit de la Clandestine est une capsule à parois épaisses et charnues, colorée d'une teinte purpurine, marquée à sa surface de lignes sinueuses, très-renflée, rétrécie vers sa base, presque tronquée et élargie à son extrémité supérieure, que terminent deux avancements ou oreillettes arrondies, un peu inégales, séparées par la base persistante du style (pl. VIII, fig. 110). Sa longueur moyenne est de $0^m,013$, et sa plus grande largeur de $0^m,011$. Ses deux sutures sont l'une supérieure, l'autre inférieure, et elles le partagent en deux valves latérales; elles sont très-fortement creusées vers sa base. Il faudrait bien se garder de voir dans chacune des deux valves un carpelle distinct; car ce que j'ai montré jusqu'à présent a suffi, je crois, pour apprendre qu'au contraire la nervure médiane des carpelles répond primitivement aux sutures, et j'ai signalé la formation de ces séries de cellules qui interrompaient le tissu de l'ovaire, et qui finissent par rompre dans le fruit l'adhérence des deux moitiés latérales ou des deux valves. J'ai montré aussi que, dans la distribution des faisceaux vasculaires du pédoncule, les deux qui appartien-

nent à l'ovaire sont l'un supérieur, l'autre inférieur. Ainsi, nul doute ne me paraît possible à ce sujet : chaque valve du fruit est donc formée par deux moitiés de carpelles différents.

Ce qui distingue le plus essentiellement ce péricarpe, c'est la propriété que possèdent ses valves de s'enrouler en cornet. Ce mouvement s'opère spontanément chez elles, à la maturité, avec une force telle, qu'elles lancent les graines à plusieurs pieds de distance (pl. VIII, fig. 111). Cette tendance à l'enroulement n'appartient pas seulement au fruit mûr; elle se manifeste déjà peu de temps après que l'ovaire fécondé a commencé de grossir; seulement, elle est faible alors, et elle n'a d'autre effet que de rendre plus concaves les valves que l'on a séparées artificiellement. Je crois que la structure anatomique de cette partie et l'observation de son mode de développement rendent facilement compte de ces faits. Après l'incurvation de ses valves, le fruit se présente sous l'aspect qu'indique la figure 113 (pl. VIII).

La face interne de chaque valve porte un placentaire sur sa ligne médiane (pl. VIII, fig. 111), et celui-ci, que sa situation et même sa forme font reconnaître comme formé par les bords rentrants des carpelles, se présente sous l'aspect d'une faible saillie longitudinale, étroite d'abord, s'élargissant ensuite à son bord libre qui porte les ovules.

J'ai déjà montré quatre ovules dans l'ovaire; il y a donc aussi quatre semences, lorsqu'aucun ovule n'avorte. Dans ce cas, les semences remplissent entièrement la cavité du péricarpe, en se pressant l'une contre l'autre (pl. VIII, fig. 112). Mais ce cas est assez rare; plus souvent, il y a avortement de quelque ovule, de sorte que le fruit ne présente ordinairement que deux ou trois graines.

M. Endlicher, dans son *Genera*, assigne à ce fruit quatre ou cinq graines. Jamais encore je n'ai trouvé ni cinq ovules dans la fleur, ni cinq graines dans la capsule. J'avoue même que je ne conçois pas comment pourrait exister un cinquième ovule dans la fleur, si ce n'était par une multiplication accidentelle.

Si l'on fait une coupe transversale du péricarpe de la Clandestine, et qu'on l'examine au microscope, on y reconnaît, au premier coup d'œil, deux couches bien distinctes : l'une, externe, peu consistante, gorgée de suc, deux ou trois fois plus épaisse que l'autre, qui est interne, plus résistante et presque coriace. Il est aisé de voir là une pannexterne et une panninterne, suivant M. de Mirbel, ou, suivant la nomenclature plus usuelle de Richard, un sarcocarpe ou mésocarpe dans la couche externe, un endocarpe dans l'interne, l'épiderme général formant l'épicarpe qui enveloppe le tout.

L'organisation de ces deux couches est très-remarquable; l'externe est formée de cellules à parois épaisses et molles (pl. VIII, fig. 114), allongées de dedans en dehors, et disposées dans un sens rayonnant. Assez généralement, l'extrémité externe de ces cellules est plus large que l'interne; elles sont très-grandes dans la portion moyenne du péricarpe; elles décroissent ensuite fortement vers la ligne de jonction des deux couches. Vers l'extérieur, elles se raccourcissent et s'arrondissent, en conservant leur plus grande largeur, d'où l'épiderme et les deux couches sous-jacentes sont ordinairement formées de cellules assez irrégulières et vaguement arrondies.

La zone interne est d'un tissu beaucoup plus serré. Ses cellules sont petites, elliptiques sur leur coupe, et leur plus long diamètre est parallèle à la face interne du fruit; elles se dirigent donc perpendiculairement aux premières. Leurs parois sont solides et très-épaisses.

Ces deux sortes de cellules contiennent une grande quantité de grains de fécule; mais ceux de la zone mésocarpienne sont généralement plus nombreux et plus gros.

C'est à la ligne de jonction de ces deux couches que se trouvent les faisceaux vasculaires, isolés les uns des autres, comme nous l'avons déjà vu, lorsqu'il s'est agi de la structure de l'ovaire. Ils se font remarquer sur la coupe transversale comme des taches plus foncées. Les cellules qui se trouvent à la jonction des deux

zones sont plus petites que leurs voisines dans l'intervalle de deux faisceaux.

Enfin, la couche épidermique ne présente aucune particularité remarquable; ses cellules sont à peu près carrées sur leur section transversale.

L'épaisseur relative des deux zones cellulaires du péricarpe a été primitivement en sens inverse de ce qu'elle est maintenant. Dans l'ovaire de la fleur épanouie, l'interne était la plus épaisse: mais bientôt le développement plus rapide de la zone externe lui a donné la prédominance; or, comme c'est en elle que réside la force d'incurvation des valves, on conçoit pourquoi cette force va en croissant jusqu'à la maturité du fruit.

Le mécanisme de cette incurvation me paraît assez facile à concevoir: en effet, d'après l'organisation de la couche mésocarpienne, la turgescence de ses cellules me semble devoir produire dans l'ensemble l'effet d'un ressort agissant vers l'intérieur, car, chaque cellule s'interposant entre ses voisines à la manière d'un coin, son gonflement rejettera celles-ci vers les côtés, et la répétition de cette action sur toute la circonférence du fruit devra faire produire aux deux valves l'effort de deux ressorts agissant l'un vers l'autre, et tendant l'un et l'autre à se courber en dedans. Tant que les deux sutures résisteront à cette force de ressort, les valves resteront dans le même état; mais la résistance cessant, et cela sans doute par la séparation des séries cellulaires rectilignes que j'ai indiquées aux deux sutures, l'enroulement aura lieu à l'instant même et avec cette force qu'on lui connaît.

Si ma manière de voir est fondée, toute cause qui augmentera la turgescence des cellules mésocarpiennes hâtera le moment de l'explosion du fruit, et réciproquement, toute cause qui diminuera cette turgescence retardera ou empêchera même son ouverture. Pour reconnaître si ces idées étaient fondées, j'ai fait quelques expériences qui ont parfaitement répondu à ce que j'en attendais. Voici ces expériences et leurs résultats:

1° Dans un flacon très-humide, j'ai placé trois capsules de

Clandestine très-voisines de leur maturité; le flacon a été fermé d'un bouchon que traversait un thermomètre, et je l'ai placé sur une plaque de fer chaude. Cette chaleur humide a tellement aidé à la force de ressort des valves, qu'après cinq minutes qu'il a fallu au thermomètre pour arriver de 12°C à 35°C, deux des capsules s'étaient déjà enroulées.

2° J'ai fait sécher ce flacon avec beaucoup de soin, après quoi j'y ai placé deux capsules tellement voisines de leur maturité, qu'une troisième toute pareille a fait explosion au moment même où je la plaçais avec les autres. J'ai élevé ensuite la température intérieure de telle sorte, que pendant deux heures qu'a duré l'expérience elle s'est maintenue en moyenne à 45° C. Le maximum a été un seul instant de 56° C. Pendant tout ce temps, les capsules ne se sont pas ouvertes. A la fin de l'expérience, elles étaient un peu ridées et leur surface avait noirci; néanmoins, quoique dans cet état les valves n'eussent pas la force de vaincre la résistance des sutures, elles avaient conservé assez de tendance à l'incurvation pour s'enrouler avec assez d'énergie dès que j'ai pressé la capsule entre les doigts.

La chaleur sèche, en dégonflant les cellules, a donc empêché l'explosion, que favorisait, au contraire, la chaleur humide.

3° J'ai mis dans du sirop de sucre un fruit entier prêt à lancer ses graines, avec un autre tout ouvert et avec des tranches minces de valves déjà enroulées. J'ai laissé le tout dans ce liquide pendant vingt heures; après ce temps, le fruit entier n'avait pas fait explosion, et j'ai dû le presser fortement entre les doigts pour déterminer l'enroulement de ses valves. Les valves, déjà roulées, avaient perdu la rigidité qui leur est ordinaire dans cet état, et par laquelle elles se rompent plutôt que de s'ouvrir; j'ai pu dès lors les étaler et les aplanir sans difficulté; enfin, parmi les tranches, deux s'étaient ouvertes d'elles-mêmes, et les autres avaient aussi perdu leur rigidité.

Il me semble donc prouvé, par ces trois expériences, que l'enroulement des valves de la Clandestine provient de la disposition

et de la turgescence des cellules de la couche péricarpienne externe. Je m'explique très-bien par là comment la chaleur humide, qui favorise cette turgescence, a hâté l'explosion des capsules; comment, au contraire, la chaleur sèche, en déterminant l'évaporation du suc cellulaire, le sirop de sucre, en produisant une endosmose déplétive, ont retardé ou empêché l'ouverture du fruit et l'enroulement de ses valves.

ARTICLE II.

DE LA GRAINE.

La graine de la Clandestine a environ 5 ou 6 millimètres, dans sa plus grande longueur, sur 4 millimètres d'épaisseur; elle est ovoïde, irrégulière, arrondie sur les côtés en contact avec le péricarpe, polyédrique ou à facettes sur ceux qui touchent les graines voisines (pl. VIII, fig. 122). A l'une de ses extrémités, immédiatement à côté de son hile, se trouve une sorte d'appendice en crochet saillant. Elle est fixée à son placenta par un funicule très-court, qui se rompt au moment de l'enroulement des valves de la capsule.

Tant que les ovules étaient à l'aise dans l'ovaire, ils étaient placés l'un à côté de l'autre et à la même hauteur; mais, dès que cet ovaire devient fruit, la grosseur qu'acquièrent les graines les dérange de leur position normale et les oblige à se placer, l'une dessus, l'autre dessous. Elles finissent même par être toutes les quatre, quand toutes se sont développées, placées sur un même plan vertical (pl. VIII, fig. 112).

Si l'on coupe l'une de ces graines, on voit qu'elle est remplie presque en entier par un albumen blanc, consistant et presque corné, dans l'épaisseur duquel un petit point, peu éloigné du bord, fait reconnaître l'embryon. Son spermoderme est très-mince, brunâtre à l'extérieur.

L'albumen ne semble pourtant pas occuper tout l'espace limité

par le spermoderme, car une ligne courbe et bien marquée, qui règne transversalement à la base de l'appendice en crochet, indique que ce dernier est indépendant de la substance albumineuse. Nous allons voir si l'examen anatomique confirme cette présomption.

Étudions maintenant sous le microscope les diverses parties que je viens de nommer.

Le spermoderme est très-mince, ai-je dit, chez la graine adulte. Une coupe montre qu'il est formé, sur la plus grande partie de la graine, de cinq ou six couches de cellules (pl. VIII, fig. 126). La couche extérieure ou épidermique se compose de cellules allongées sur leur coupe, aplaties de dehors en dedans, à paroi externe quelque peu épaissie. Sous cette couche, s'en trouve une deuxième formée de cellules plus petites, à parois transparentes et simples; enfin, sous les deux couches précédentes, il en existe trois dont les cellules ovoïdes sont remarquables par les spires et les réticulations de leurs parois. La figure 128, planche VIII, donne une idée suffisante de la disposition, de la forme et de la réticulation de ces dernières cellules. On voit que tantôt leur spire est régulière, à tours parallèles, simples; que plus souvent ses divers tours se rattachent l'un à l'autre par des branches anastomotiques; enfin, que ces branches de jonction sont quelquefois tellement nombreuses, qu'il en résulte un véritable réseau à mailles, tantôt allongées, tantôt carrées. Ces lignes, si variables quant à leur disposition, sont identiques quant à leur nature : ce sont toujours, comme dans tous les cas analogues, des saillies qui se sont formées sur la face interne de la membrane cellulaire primitive. Une coupe des parois montre la hauteur de ces saillies.

Il y a continuité parfaite de tissu entre ces diverses assises de cellules, d'où il devient assez difficile d'y déterminer des tuniques séminales distinctes. Verrons-nous, en effet, un testa dans les couches externes sans spiricule et une endoplèvre dans les couches internes de cellules spirales? Ce serait, je crois, le meilleur moyen pour rattacher l'organisation de cette enveloppe séminale à celle

que présentent la plupart des semences, si l'on n'aimait mieux admettre un tégument unique.

Sous les couches de cellules fibreuses règne une lame assez épaisse, qui semble d'abord n'être formée que par leurs parois internes épaissies; mais un examen attentif ne tarde pas à y faire découvrir de petits vides irréguliers, qui indiqueraient que c'est là ce qui reste d'une ou de plusieurs assises celluleuses oblitérées. En effet, le même spermoderme, examiné sur la graine d'un fruit au tiers de sa grosseur, se présente avec l'organisation que reproduit la figure 127, planche VIII. Sous les trois couches de cellules qui vont devenir fibreuses, et chez lesquelles les spires commencent seulement à se former, il en existe deux aussi transparentes que les deux externes et plus que leurs voisines : ce sont ces couches qui vont s'oblitérer, et qui formeront plus tard la lame épaisse dont il vient d'être question.

Le spermoderme se détache aisément, et laisse ainsi à nu l'amande ou le nucléus de la graine; or, dans celui-ci, l'albumen attire d'abord l'attention par son volume considérable.

C'est un corps celluleux dont les cellules, très-grandes dans le centre et dans la plus grande partie de la masse, vont en décroissant de tous les côtés vers l'extérieur (pl. VIII, fig. 126). En un point un peu éloigné du hile, et à une certaine distance du bord, l'albumen est creusé d'une cavité occupée et remplie par l'embryon. Cette cavité n'a pas de tégument autre que les cellules albumineuses, très-petites et très-serrées dans toute sa périphérie (pl. VIII, fig. 125). Ce même tissu serré se montre aussi entre la cavité embryonifère et le spermoderme.

Les cellules de l'albumen sont très-remarquables par les fortes et nombreuses ponctuations qu'elles présentent. Ces ponctuations sont tellement profondes et nombreuses, que les parois des cellules en paraissent, sur leur coupe, entièrement sinueuses (pl. VIII, fig. 130). Sur la paroi intermédiaire à deux cellules adjacentes, les ponctuations sont opposées comme de coutume, d'où il ne reste entre les deux cavités contiguës que la membrane cellulaire

primitive, qui joue là le rôle d'un mince diaphragme. Ces ponctuations diminuent de profondeur à mesure que les cellules se rapetissent en approchant de l'extérieur, et, enfin, la couche immédiatement sous-jacente au spermoderme n'en a qu'à son côté interne, et celles-ci même très-peu marquées.

Vues de face, ces ponctuations se montrent comme un simple point arrondi ou un peu allongé, entouré d'une ligne ombrée, due sans doute à l'évasement en entonnoir des parois de l'enfoncement.

On peut suivre la formation de ces ponctuations par dépôt de matière sur la membrane cellulaire primitive : ainsi, en examinant le tissu de ce même albumen chez la graine au tiers à peu près de son développement, on voit (pl. VIII, fig. 131 A) ses parois marquées de points nombreux, irréguliers : ces points sont plus grands que chez la graine adulte, non-seulement dans le sens relatif, mais encore d'une manière absolue. A cette époque, la paroi intermédiaire à deux cellules contiguës se montre sur une coupe comme un fil simplement noueux, à nodosités arrondies et peu saillantes (*ibid.* B). L'enfoncement lui-même est beaucoup plus large qu'il ne le sera plus tard, lorsque des dépôts successifs se seront ajoutés sur son pourtour, le convertissant ainsi à la fin en une sorte de petit canal cylindrique, évasé à son extrémité.

J'ai dit que les cellules de l'albumen éprouvent un décroissement considérable vers l'extérieur; ceci a lieu même vers la base de l'appendice en crochet : de là discontinuité de tissu entre cet appendice et la masse albumineuse. La séparation des deux est nettement indiquée, même à l'œil nu, par une ligne courbe, qui semble continuer le contour arrondi de la graine, et au-dessus de laquelle s'élève l'appendice. Cette ligne est formée uniquement par le tissu serré qui termine l'albumen. Quant à l'appendice lui-même, il se compose, sous une enveloppe continue au reste du spermoderme et de même organisation que celui-ci, dont elle n'est qu'une production, d'un tissu cellulaire lâche, peu serré,

et dont les cellules ovoïdes ont leurs parois minces, transparentes, et marquées d'une réticulation légère et comme naissante (pl. VIII, fig. 129). L'appendice lui-même est situé tout à fait au bord du hile, mais du côté opposé au point qu'occupe l'embryon.

L'embryon est contenu, ai-je dit, dans une cavité circonscrite par l'albumen; cette cavité est ovoïde, et tout juste assez grande pour contenir ce petit corps. Celui-ci tout entier est ovoïde; son extrémité radiculaire, qui se dirige directement vers le dehors de la graine, est formée par un petit mamelon arrondi (pl. VIII, fig. 124). Sa portion moyenne est fortement renflée en un globule qui se termine, du côté intérieur, par les deux cotylédons. Ceux-ci sont deux prolongements, deux sortes d'expansions très-épaisses, larges, opposées, à bords arrondis, un peu inégales en longueur, convexes à leur face externe, un peu concaves vers leur base, sur leur face en regard. Cette concavité intérieure laisse un petit vide entre les deux cotylédons au sommet du renflement moyen, et dans ce vide se montre un petit mamelon, première ébauche de la gemmule. Une coupe longitudinale, passant par le milieu de l'épaisseur de l'embryon, montre la forme et la hauteur de ce petit mamelon (pl. VIII, fig. 125).

Quant à sa structure anatomique, l'embryon est encore composé tout entier de tissu cellulaire, et celui-ci est formé de petites cellules rangées en couches concentriques, qui, sur une coupe transversale, se montrent sous l'aspect de nombreux cercles emboîtés.

Ici se terminent mes observations sur la Clandestine. Entreprises avec le seul désir d'être utile à la science, poursuivies avec ardeur pendant plusieurs mois, m'auront-elles permis d'atteindre le but que je m'étais proposé? Pourrai-je me flatter que mes efforts n'auront pas été tout à fait infructueux? Je n'ose encore l'espérer; mais si le travail consciencieux, sinon bien fait, que j'ai l'honneur de soumettre en ce moment au jugement de l'Aca-

démie ne lui paraît pas entièrement dépourvu d'intérêt, je serai certain d'avoir réussi, et je regarderai comme bien employé le long espace de temps pendant lequel il m'a occupé. Dans tous les cas, l'approbation si flatteuse de ce corps savant, si je suis assez heureux pour l'obtenir, sera à mes yeux la plus douce récompense de mes travaux passés et le plus puissant encouragement pour mes recherches à venir.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

N. B. Dans toutes les figures relatives à l'organisation de la tige et de la racine, les mêmes lettres ont la même signification.

m.c. Médule centrale ou moelle.
c.l. Couche ligneuse; *c' l'* deuxième couche ligneuse.
c.c. Couche corticale ou libérienne.
e.c. Enveloppe cellulaire.
ép. Épiderme.
v. Vaisseaux.

Fig. 1. Cette figure reproduit la coupe transversale d'une tige âgée, dont le diamètre total était de $0^{m},007$. Les deux couches ligneuses se distinguent par leur teinte plus foncée sous le microscope, ou par plus d'opacité à l'extérieur. Les vaisseaux sont ici épars au milieu du prosenchyme. Le liber, ou l'écorce proprement dite, a acquis une grande épaisseur, mais sans se subdiviser en feuillets.

Fig. 2. Coupe transversale d'une tige dont la couche ligneuse est unique et non entièrement développée encore. Les vaisseaux vont en grossissant vers l'extérieur.

Fig. 3. Coupe verticale d'une tige à une couche ligneuse bien développée.

Fig. 4. Coupe transversale d'une tige entière. Cette figure est destinée à montrer l'épaisseur relative des diverses couches qui entrent dans la composition d'une tige à une seule couche ligneuse.

Fig. 5. Épiderme d'une jeune tige vu par sa face externe et fortement grossi. La plupart des cellules montrent leur nucléus ou cytoblaste.

Fig. 6. Coupe longitudinale de l'épiderme de la tige et des trois ou

quatre couches sous-jacentes chez une tige bien formée. Les grains de fécule vont en grossissant vers l'intérieur.

Fig. 7. Le même épiderme vu par sa face externe et sous le même grossissement. Sous lui se voit le contour des cellules sous-jacentes.

Fig. 8. Un stomate sur l'épiderme de l'extrémité d'une jeune tige.

Fig. 9. Cellules du prosenchyme ligneux sur une coupe longitudinale passant par l'axe, fortement grossies.

Fig. 11. Coupe transversale de la couche libérienne, assez grossie pour montrer clairement la modification de forme des cellules vers l'extérieur.

PLANCHES II ET III.

Fig. 10. Face interne de la paroi d'un vaisseau ponctué, pour montrer la nature de ses ponctuations : *aa*, côtes principales; *bb*, côtes secondaires qui subdivisent les grandes ponctuations.

Fig. 12. Trois suçoirs de grandeur naturelle. A et B sont encore attachés à une racine; C a été détaché.

Fig. 13. Coupe verticale d'un suçoir, comprenant aussi la section transversale de la radicelle sur laquelle il s'est produit : *a*, corps ligneux de la racine; *b*, masse de vaisseaux moniliformes irrégulièrement sinueux; *c*, ligne qui limite le noyau; *d*, tissu cellulaire médian parfaitement transparent; *e*, tissu cellulaire à grandes cellules, à parois sombres sous le microscope, passant au précédent à la jonction des deux; *f*, portion adhérente occupée par les cellules allongées, étroites; *g*, bourrelet cellulaire de la surface absorbante destiné à faciliter son adhérence.

Fig. 14. Coupe du suçoir dans la portion *f* de la figure précédente; *aa*, surface adhérente. On suit ici le passage des cellules étroites et perpendiculaires sur la surface d'adhérence (*aa*) au tissu cellulaire médian, désigné par *d*, figure 13.

Fig. 15, 16, 17, 18, 19 et 20. Figures, sous le même grossissement, de plusieurs coupes transversales faites sur une même tige jeune, à partir de son extrémité, sans faisceaux vasculaires apparents (fig. 15), jusqu'au point où toutes les couches

sont bien distinctes et bien organisées (fig. 20). On peut remarquer sur la dernière (fig. 20) la distribution encore nettement rayonnante des vaisseaux.

Fig. 21. Coupe transversale d'une racine de 2-3 millimètres de diamètre : *aa*, lacunes de l'enveloppe cellulaire; *bb*, couche cellulaire sous-épidermique, sans fécule. Le contour de la zone ligneuse est ici fort irrégulier.

Fig. 22. Coupe longitudinale de la même racine. Trois vaisseaux ponctués montrent leur face interne.

Fig. 23, 24. Coupes transversales d'une radicelle de moins d'un millimètre de diamètre, et qui se terminait par un suçoir. La figure 24 est prise plus près de l'extrémité de la racine. On peut remarquer la différence du nombre des vaisseaux dans les deux : il va en diminuant vers le bout de la radicelle; de plus, les cellules allongées qui entourent ces vaisseaux ne se laissent pas encore distinguer en ligneuses et libériennes. L'enveloppe cellulaire qui les entourait était déjà disloquée en lacunes rayonnantes.

Fig. 25. Une paire de feuilles de grandeur naturelle, fixées encore à la tige qu'elles embrassent, vues par-dessous : *a*, la forte dépression triangulaire inférieure ou la portion pétiolaire.

Fig. 26. A. Feuille entière vue par-dessus; *a*, faible dépression médiane supérieure. B, coupe de la même, de la base au sommet; *a*, portion médiane et mince ou pétiolaire; *b*, gouttière périphérique recouverte par le rebord, *c*.

Fig. 27. Coupe en largeur d'une feuille et de la tige qui la porte, montrant la distribution de ses faisceaux ou nervures et la disposition de ses lacunes, *aaa*.

Fig. 28. Coupe transversale d'une feuille de $0^{m},004$ de largeur seulement, montrant la disposition relative du tissu cellulaire jaunâtre et plus serré, qui forme la paroi des lacunes, et celle du tissu lâche, qui remplit le reste de la feuille. Ici, la feuille étant jeune, les lames du tissu serré sont rapprochées ou se touchent même; elles s'écarteront plus tard.

PLANCHE IV.

Fig. 29. Coupe très-grossie d'une portion de paroi d'une lacune (sans ses papilles) avec un rameau vasculaire, *vvv*, situé vers la jonction des deux modifications du tissu cellulaire.

Fig. 30. Coupe verticale de l'épiderme d'une feuille avec le tissu cellulaire lâche sous-jacent.

Fig. 31. Épiderme d'une feuille vu par dehors. Toutes les cellules montrent leur nucléus.

Fig. 32. Coupe transversale de la moitié d'une feuille très-jeune, et longue seulement d'un demi-millimètre : elle n'a que deux lacunes en tout.

Fig. 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39. Ces figures montrent tous les degrés du développement des stomates des feuilles, depuis leur naissance jusqu'à leur état adulte. La figure 35 prouve que, sur les feuilles jeunes, les divers états de ces organes se trouvent souvent l'un à côté de l'autre.

Fig. 40. Coupe verticale d'un stomate adulte, avec sa chambre sous-épidermique.

Fig. 41. Fragment d'épiderme sur lequel les stomates étaient assez multipliés. Cette figure est destinée à prouver qu'un faible grossissement suffit pour reconnaître et pour observer ces organes.

Fig. 42. Coupe transversale d'une feuille jeune montrant deux paires de lacunes, celles de la paire externe très-jeunes.

Fig. 43. Naissance d'une lacune par dislocation et séparation du tissu générateur, dont les cellules commencent à se renfler en mamelons.

Fig. 44. Les mamelons sont plus avancés, et plusieurs d'entre eux forment des papilles déjà très-reconnaissables.

Fig. 45, 46. Papilles adultes des lacunes, avec la coupe du tissu qui les porte.

Fig. 47. Papille qui se trouvait sur l'épiderme de la face supérieure d'une feuille de $0^{m},0015$ de longueur.

Fig. 48. Papilles en bouclier des parois des lacunes ; la papille lobée (*a*)

a été conservée à côté pour montrer le rapport de grandeur des deux espèces.

Fig. 49. Grains de fécule du tissu lâche d'une feuille adulte montrant leurs variations de forme.

PLANCHE V.

N. B. Pour toutes les figures relatives à la configuration de la fleur ou de ses parties, les mêmes lettres désignent les mêmes objets.

c. Calice.
cr. Corolle.
ét. Étamines.
ps. Pistil entier.
or. Ovaire.
ov. Ovule.
st. Style.
sg. Stigmate.
pl. Placentaire.
ds. Disque.

Fig. 50. Bouton tout entier naissant à l'état de globule homogène déprimé.

Fig. 51. Bouton chez lequel le calice s'est déjà formé en bourrelet continu à quatre festons. A, vu à peu près par-dessus; B, de profil.

Fig. 52. Bouton un peu plus avancé, dans lequel le calice s'applique déjà sur la masse centrale : A, le bouton entier; B, coupe du même passant un peu au delà de l'axe.

Fig. 53. Bouton dans lequel le calice forme déjà une enveloppe fermée : A, le bouton entier, court et large; B, masse centrale recouverte par lui et retirée de son intérieur, vue par-dessus. Son pourtour s'est élargi en un bourrelet continu à cinq légers festons. Ce bourrelet est la corolle naissante.

Fig. 54. Masse florale un peu plus avancée. La corolle a cinq mamelons ou lobes naissants bien marqués. Les quatre étamines sont à l'état de petites éminences homogènes, unies, arrondies. Le pistil est encore un simple mamelon homogène, hémisphérique.

Fig. 55. A, bouton entier un peu plus avancé : le calice s'est accru en hauteur d'une manière très-notable; B, toutes les parties sous-jacentes au calice. Elles sont toutes bien plus distinctes que précédemment; le pistil commence à s'émousser et même à se creuser un peu au sommet.

Fig. 56. Bouton entier dont la corolle approche du niveau du bord du calice. Celui-ci a été fendu et étalé pour laisser voir la corolle ouverte au sommet.

Fig. 57. A, corolle entière d'un bouton un peu plus âgé; la lèvre supérieure s'allonge déjà rapidement: elle a dépassé fortement la lèvre inférieure; B, la corolle a été enlevée jusqu'à l'insertion des étamines, et elle laisse voir ainsi les organes sexuels; *ab*, côté supérieur de la fleur.

Fig. 58. Fleur déjà avancée; la lèvre supérieure dépasse considérablement l'inférieure, qui, elle-même, se trouve au niveau du bord du calice.

Fig. 59. Androcée et style d'une fleur à peu près du même âge. Je n'ai conservé le tube de la corolle que jusqu'aux points où se dégagent les deux paires d'étamines, pour montrer leur différence de longueur. *ab*, côté supérieur de la fleur.

Fig. 60. Fleur entièrement épanouie. L'élongation du tube de la corolle a été très-rapide dans les derniers temps. *a*, lobes de la lèvre supérieure très-peu apparents maintenant et très-écartés, soit l'un de l'autre, soit de la lèvre inférieure.

Fig. 61. Calice entier d'un bouton très-jeune, pour montrer l'inégalité de ses lobes, dont deux, tels que (*a*), dépassent notablement les deux autres.

Fig. 62, 63. Corolles jeunes et à deux âges différents, pour montrer l'estivation de leurs lobes dans la première période de leur développement. Elles sont vues du côté supérieur de la fleur.

Fig. 64. Pistil très-jeune : A, tout entier; B, coupé longitudinalement.

Fig. 65. Pistil un peu plus avancé, coupé longitudinalement, pour montrer la saillie interne formée par un placentaire naissant.

Fig. 66. A, pistil entier plus âgé, formant une cavité ovoïde qui s'ouvre au sommet en une bouche transversale à deux lèvres iné-

gales; *ab*, côté supérieur de la fleur; B, coupe transversale passant par le milieu de l'ovaire, pour montrer la saillie des placentaires; *c*, coupe longitudinale, pour montrer un placentaire tout entier. Le disque est ici un bourrelet basilaire à cinq légers festons.

Fig. 67. Coupe longitudinale d'un pistil plus avancé, dans lequel les ovules sont à l'état de mamelons bien dégagés. Le disque est déjà beaucoup plus saillant vers le bas de la fleur.

Fig. 68. Pistil entier plus avancé. Une ligne ponctuée indique la cavité ovarienne et le canal stylaire. Le disque horizontal a deux moitiés bien séparées, dont l'inférieure est à cinq festons bien marqués sur son bord.

Fig. 69. Coupe longitudinale de l'ovaire du précédent, pour montrer l'état de ses ovules à nucelle très-saillant au delà du micropyle.

Fig. 70. Base de l'ovaire d'un bouton de $0^m,0025$ de longueur, pour montrer la forme de son disque et sa division en deux moitiés, dont l'inférieure occupe une plus grande portion de circonférence.

Fig. 71. Ovaire et disque, ou nectaire d'une fleur épanouie.

Fig. 72. Le même disque seul vu par sa face inférieure.

Fig. 73. Coupe longitudinale d'un pédoncule à la base d'une fleur, pour montrer la subdivision des faisceaux vasculaires, la disparition de la moelle et le rapetissement de toutes les cellules, à mesure qu'elles approchent davantage de la fleur.

Fig. 74, 75, 76. Développement des papilles que l'on observe sur le calice des boutons très-jeunes, et longs seulement de $0^m,001$ à $0^m,004$ environ. Fig. 74, papilles naissantes : A, tenant à l'épiderme; B, détachée avec sa cellule basilaire. Fig. 75, papilles plus avancées, à trois articles, dont le terminal plus large, arrondi : elles paraissent contenir une matière mucilagineuse. Fig. 76, papilles tout à fait développées : A, avec trois articles au pédicule; B, à deux articles seulement.

Fig. 77. Épiderme d'un calice adulte.

PLANCHE VI.

Fig. 78. Coupe longitudinale du même, montrant son tissu cellulaire tortu.

Fig. 79. Coupe transversale du même à l'une de ses nervures, que l'on voit plus rapprochée de la face interne (*aa*) que de l'externe (*bb*).

Fig. 80. Épiderme de la corolle adulte.

Fig. 81. Extrémité d'un très-petit faisceau vasculaire, présentant deux fausses trachées qui finissent près du bord d'un lobe corollin.

Fig. 82. Coupe transversale d'une anthère presque naissante. Au milieu du tissu cellulaire qui la forme, on distingue sur ses deux côtés (*aa*) deux points où les mailles sont plus serrées, ou bien deux foyers où se fait surtout le développement.

Fig. 83. Coupe transversale d'une loge ou moitié d'anthère plus avancée : *bb* est la saillie dorsale formée par le connectif. Aux deux extrémités (*aa*) de la coupe de la future loge, on reconnaît encore deux foyers de développement qui vont donner chacun une logette.

Fig. 84. Coupe transversale d'une logette ou d'un quart d'une anthère plus avancée. Vers son extrémité, en *a*, se montrent quelques cellules, que j'ai un peu ombrées pour les faire mieux distinguer, et qui ne sont que des utricules polliniques commençant à se faire reconnaître.

Fig. 85. Coupe transversale d'une logette dans laquelle la masse pollinique est bien développée et se montre, en *aa*, comme un ruban courbé en fer à cheval : *b*, masse cellulaire centrale de la logette enveloppée par l'ensemble des utricules polliniques; *c*, les trois couches de cellules marginales, dont l'extérieure est l'épiderme, et qui entourent la masse pollinique entière.

Fig. 86. Coupe transversale d'une loge entière, dans laquelle les utricules polliniques résorbées avaient laissé le pollen libre : *bb*, les deux masses cellulaires des deux logettes; *aa* indique la largeur de la lame cellulaire qui les sépare, et aussi celle

de la ligne selon laquelle cette lame va se détacher de la paroi des valves, de manière à confondre ainsi les deux logettes en une loge unique. Des deux côtés de cette ligne se montre à la face interne une bande assez large de cellules fibreuses. C'est sur la ligne *a* que s'ouvrira la loge, pour laisser sortir le pollen.

Fig. 87. Coupe transversale des parois d'une anthère appartenant à un bouton de $0^m,0025$ de longueur faite vers sa base. Elle montre les divers degrés du développement des poils.

Fig. 88. Coupe transversale des parois d'une anthère qui a déjà lancé son pollen : A, la partie de ces parois opposée à la ligne de déhiscence ; B, portion antérieure et médiane des mêmes.

Fig. 89. Coupe transversale de la portion de ces parois qui borde la ligne de déhiscence : *a*, couche épidermique ; *b*, cellules fibreuses.

Fig. 90. A, soie de la base des anthères adultes tout entière ; B, son extrémité plus grossie.

Fig. 91. Épiderme du filet de l'étamine adulte.

Fig. 101. Coupe transversale d'un style adulte faite dans l'intervalle des deux faisceaux vasculaires.

PLANCHE VII.

Fig. 92. Coupe transversale d'un style jeune appartenant à un bouton de $0^m,0025$ de longueur. On y voit le décroissement progressif des cellules de l'extérieur à l'intérieur.

Fig. 93. Utricules polliniques dans l'état le plus jeune où j'aie pu les observer isolément d'une manière satisfaisante. Elles ont déjà leurs grains de pollen formés ; mais ils se montrent comme agglomérés au centre.

Fig. 94. Utricules polliniques un peu plus âgées. Leurs grains de pollen paraissent moins serrés au centre : sans doute, les cloisons commencent à les séparer.

Fig. 95. Utricules polliniques un peu plus avancées encore. Les grains de pollen y sont bien séparés. Ces dernières utricules appartiennent à des boutons de fleur longs d'environ $0^m,003$.

Fig. 96. Utricules déjà bien formées, quoique appartenant à un bouton qui n'a qu'un peu plus de $0^m,004$ de longueur. Sur A, un grain de pollen est sorti de sa loge et se voit séparément en *a*.

Fig. 97. Utricules d'un bouton de $0^m,005$ de longueur. Elles sont ici à l'état de développement complet : A et B montrent leurs variations de forme par l'effet de leur pression réciproque ; *a*, un grain de pollen à côté de la loge d'où il est sorti.

Fig. 98. Grains de pollen déjà libres dans l'anthère d'un bouton de $0^m,007$ de longueur : A, grain vu par une extrémité, pour montrer ses trois sillons ; B, vu de côté.

Fig. 99. Grains de pollen adultes : A, vu de côté ; B, par une extrémité.

Fig. 100. Grain dont la membrane interne, après avoir déchiré l'un des trois sillons, a fait saillie, par suite d'un gonflement lent, en une grosse vésicule, qui porte encore des fragments de la membrane déchirée.

Fig. 102. Coupe longitudinale d'un style adulte passant par l'un de ses faisceaux vasculaires : la couche épidermique *aa* se fait remarquer par l'épaississement de sa paroi externe.

Fig. 103. Faisceau vasculaire du même isolé : *aa*, côté interne. On voit que ce faisceau se compose de fausses trachées qui se décomposent, vers l'extérieur, en vaisseaux spiro-annulaires et annulaires.

Fig. 104. Extrémité supérieure, ou origine des tubes muqueux, dans le tissu profond du stigmate.

Fig. 105. Tubes muqueux : A, un article terminal inférieur très-long et très-aigu ; B, une articulation fortement grossie, pour montrer l'épaisseur des parois ; C, portion médiane d'un tube montrant la longueur d'un de ses articles.

Fig. 106. Coupe longitudinale d'une des lèvres du stigmate : *aa* est le côté interne ou l'une des parois de l'entonnoir stigmatique ; *bbb*, papilles qui revêtent toute la surface du stigmate.

Fig. 107. Un groupe de ces papilles en place, vu par-dessus, pour montrer combien elles sont nombreuses et pressées l'une contre l'autre.

Fig. 108. Stigmate entier faiblement grossi : A, de face, montrant la

bouche médiane ou l'entonnoir; B, de profil, montrant l'inégalité des deux lèvres.

Fig. 109. Cellules du tissu du stigmate prises à diverses distances du bord. Les plus courtes en étaient les plus voisines. Chez toutes celles que reproduit cette figure, l'extrémité supérieure regardait le bord du stigmate.

PLANCHE VIII.

Fig. 110. Capsule entière vue de deux côtés différents, en A et en B. B montre l'inégalité des deux côtés au bord supérieur.

Fig. 111. Un fruit coupé transversalement avec précaution, de manière que les valves ne se soient pas séparées et ne se soient enroulées qu'à l'une des deux sutures. En *aa* se voient les deux placentaires.

Fig. 112. Coupe longitudinale faite en avant des sutures, afin d'empêcher l'explosion, sur un fruit dont les quatre graines avaient réussi.

Fig. 113. Les deux valves enroulées d'un fruit qui a lancé ses graines.

Fig. 114. Coupe transversale des parois de la capsule. J'ai supprimé dans cette figure, comme devant nuire à la netteté, toute la fécule qui se trouve en quantité dans ces cellules, surtout chez celles de la couche charnue. *ab*, couche externe et charnue, ou du moins très-aqueuse (mésocarpe et épicarpe); *ac*, couche interne consistante et presque coriace (endocarpe).

N. B. Dans les figures relatives à l'ovule, les mêmes lettres désignent les mêmes parties.

m. Micropyle.
n. Nucelle.
ch. Chalaze.
r. Vaisseaux du raphé.

Fig. 115. Ovules très-jeunes à l'état de mamelons celluleux.

Fig. 116. Ovule plus avancé.

Fig. 117. Ovule plus âgé, chez lequel le tégument s'est fortement épaissi à son bord, et où le nucelle déborde en un cône allongé.

Fig. 118. Coupe longitudinale d'un ovule plus âgé montrant le nu-

celle enfoncé au-dessous du micropyle. Le nucelle a été un peu déplacé par la coupe.

Fig. 119. Ovule entier de l'âge du précédent.

Fig. 120 et 121. Coupe longitudinale de deux ovules, dont le dernier appartient à une fleur à peu près adulte.

Fig. 122. Une graine entière au moment où elle vient d'être lancée par la capsule : *h*, le hile et le reste du funicule rompu au moment de l'explosion; *a*, l'appendice en crochet.

Fig. 123. La même coupée longitudinalement, pour montrer la situation de son embryon (*e*).

Fig. 124. L'embryon lui-même tout entier : *r*, sa radicule; *cc'*, ses deux cotylédons. Celui des deux désigné par *c'* est le plus long.

Fig. 125. Coupe de la cavité embryonifère et d'une portion de l'albumen qui l'entoure, montrant: 1° le mamelon gemmaire (*a*) entre les bases des deux cotylédons; 2° le décroissement des cellules de l'albumen vers les bords de la cavité *ccc* et vers le spermoderme *bb*. On voit aussi que l'embryon remplit exactement sa cavité.

Fig. 126. Coupe du spermoderme et de la portion d'albumen sous-jacente : *ad*, spermoderme entier formé de plusieurs couches; *aa*, épiderme; *bb*, couche sous-épidermique de cellules transparentes et à parois simples; *c*, couches de cellules fibreuses; *d*, lame épaisse qui semble formée de couches celluleuses oblitérées; *e*, albumen.

Fig. 127. Coupe du spermoderme d'une graine jeune. Les lettres ont la même signification que dans la figure précédente. On y voit en *d* deux couches celluleuses distinctes, à parois simples, transparentes, qui s'oblitéreront et s'affaisseront plus tard pour former la lame *d* de la figure 126.

Fig. 128. Cellules fibreuses du spermoderme de la graine mûre, vues par la face interne.

Fig. 129. Cellules fibreuses transparentes, à réticulations légères, qui se trouvent à l'intérieur de l'appendice en crochet.

Fig. 130. Une cellule de l'albumen montrant les ponctuations de face et leur profil sur la coupe des parois.

Fig. 131. A, ponctuations des cellules de l'albumen jeune; B, leur profil sur la coupe des parois cellulaires.

DÉVELOPPEMENTS

SUR QUELQUES POINTS

DE

LA THÉORIE DES SURFACES ISOTHERMES ORTHOGONALES;

PAR M. J. BERTRAND.

(PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 8 SEPTEMBRE 1845.)

Les seuls cas où l'on ait déterminé la forme des surfaces isothermes pour des corps particuliers ont présenté jusqu'ici une circonstance remarquable; je veux parler de l'existence de deux autres systèmes de surfaces, coupant les premières à angle droit et orthogonales entre elles, qui jouissent également de la propriété de pouvoir être considérées comme surfaces isothermes. Il m'a semblé utile d'examiner si ce fait peut être érigé en théorème général. La discussion de cette question fait l'objet des recherches suivantes. Je démontre que le théorème dont je parle conduirait à des résultats évidemment inadmissibles, et qu'il existe certaines conditions sans lesquelles un système de surfaces isothermes ne saurait être conjugué à deux autres systèmes de surfaces isothermes orthogonales entre elles et aux premières: c'est par hasard que ces conditions se sont trouvées remplies dans les cas examinés jusqu'ici.

Les surfaces cylindriques, que je considère en particulier, satisfont toujours aux conditions établies pour des surfaces quelconques; je démontre, en effet, qu'une série de surfaces cylin-

driques isothermes est toujours coupée orthogonalement par une autre série de cylindres isothermes. Ce théorème avait d'ailleurs été donné par M. Lamé, comme conséquence analytique du caractère assigné par lui à un système de surfaces isothermes.

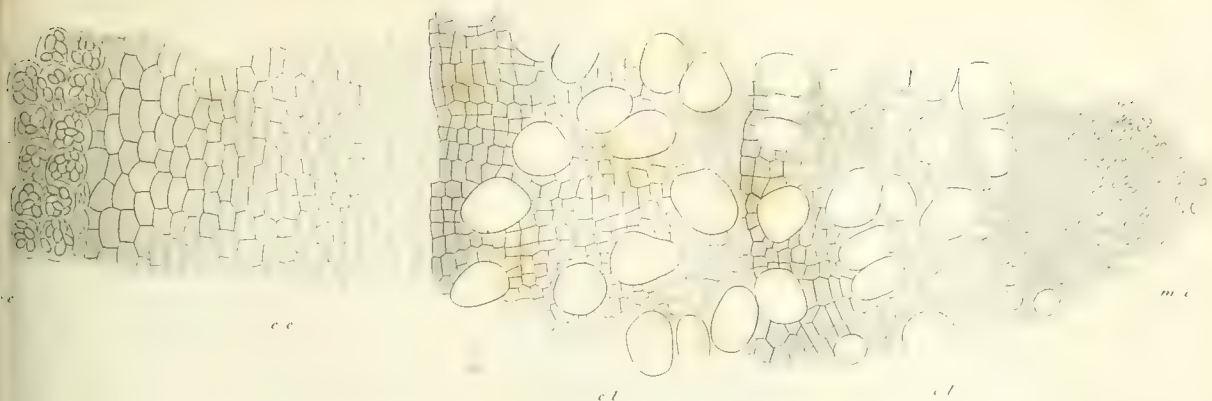
Je me suis aussi occupé du cas des surfaces de révolution. Les trajectoires orthogonales conjuguées à de pareilles surfaces sont des plans et d'autres surfaces de révolution, dont les méridiens coupent à angle droit les méridiens des premières. J'ai trouvé qu'un système de surfaces isothermes de révolution étant donné, leurs trajectoires orthogonales de révolution ne peuvent être isothermes que dans le cas particulier où les méridiens des surfaces considérées sont les bases de cylindres isothermes. Dans ce cas, les méridiens jouissent d'une propriété remarquable, si l'on considère deux courbes de l'un des systèmes, ces courbes seront coupées, par leurs diverses trajectoires orthogonales, en des points dont les distances à l'axe de révolution sont dans un rapport constant. Ce résultat général, appliqué au cas où les méridiens sont des sections coniques homofocales, conduit à un théorème de géométrie remarqué déjà par M. Chasles.

Je commencerai par établir directement les conditions connues pour qu'une série de surfaces puissent être isothermes. Ces conditions sont, comme M. Lamé l'a montré, une conséquence fort simple de l'équation de Fourier, et nous pourrions les prendre pour point de départ; mais il sera utile de les déduire de considérations analogues à celles que j'emploierai dans le reste de ce mémoire.

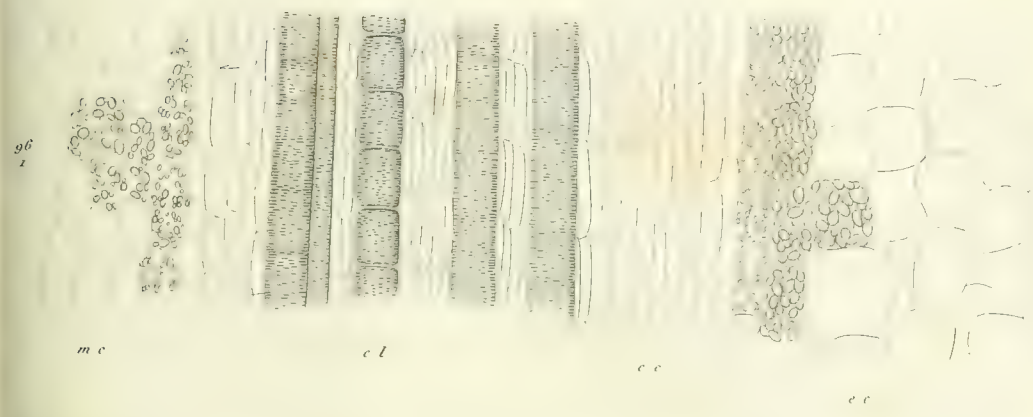
I.

Considérons dans un corps en équilibre de température la série des surfaces isothermes : soit pris sur l'une d'elles, un élément superficiel, et, par les différents points du contour de cet élément, faisons passer des courbes qui coupent à angle droit les diverses surfaces, ces courbes formeront un canal, dans lequel s'effectuera le mouvement de la chaleur, indépendamment

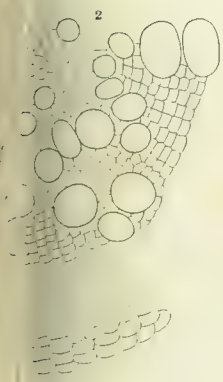
1



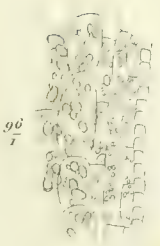
3.



2

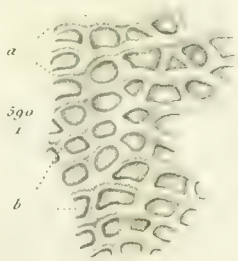


6



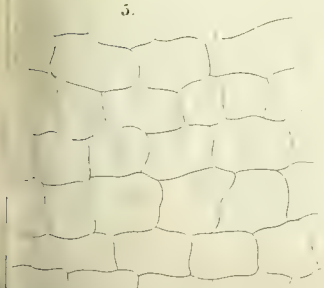
4.

11.

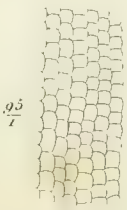


9.

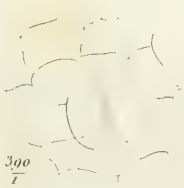
5.



7.



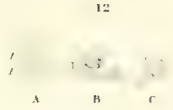
8.



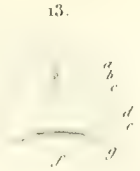
230/1

14.

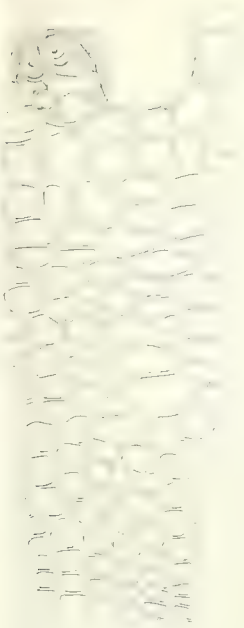
12.



13.

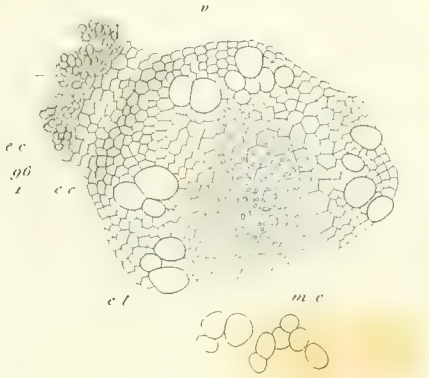


10

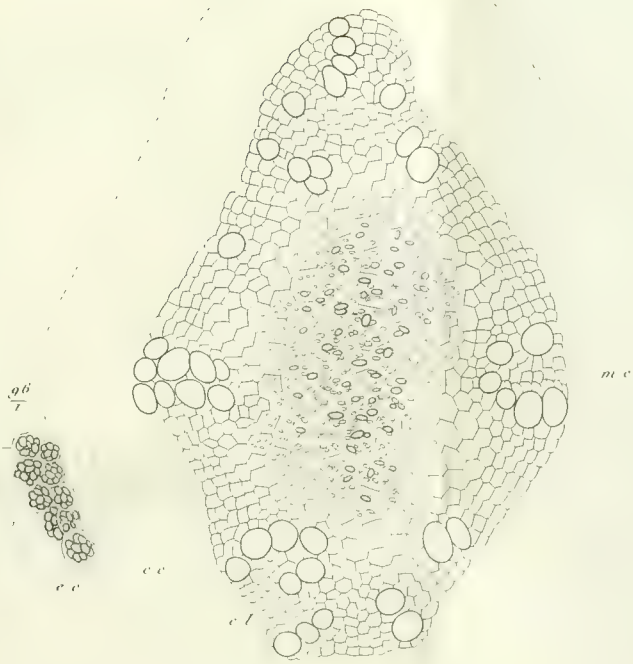


15.

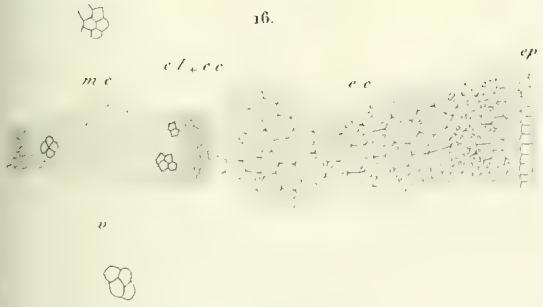
18.



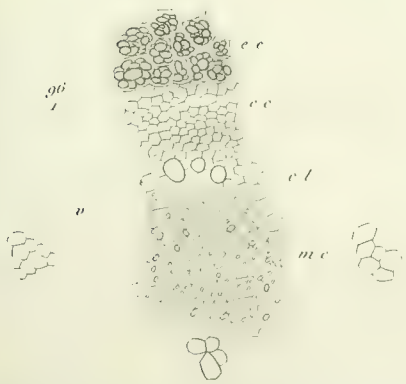
19.

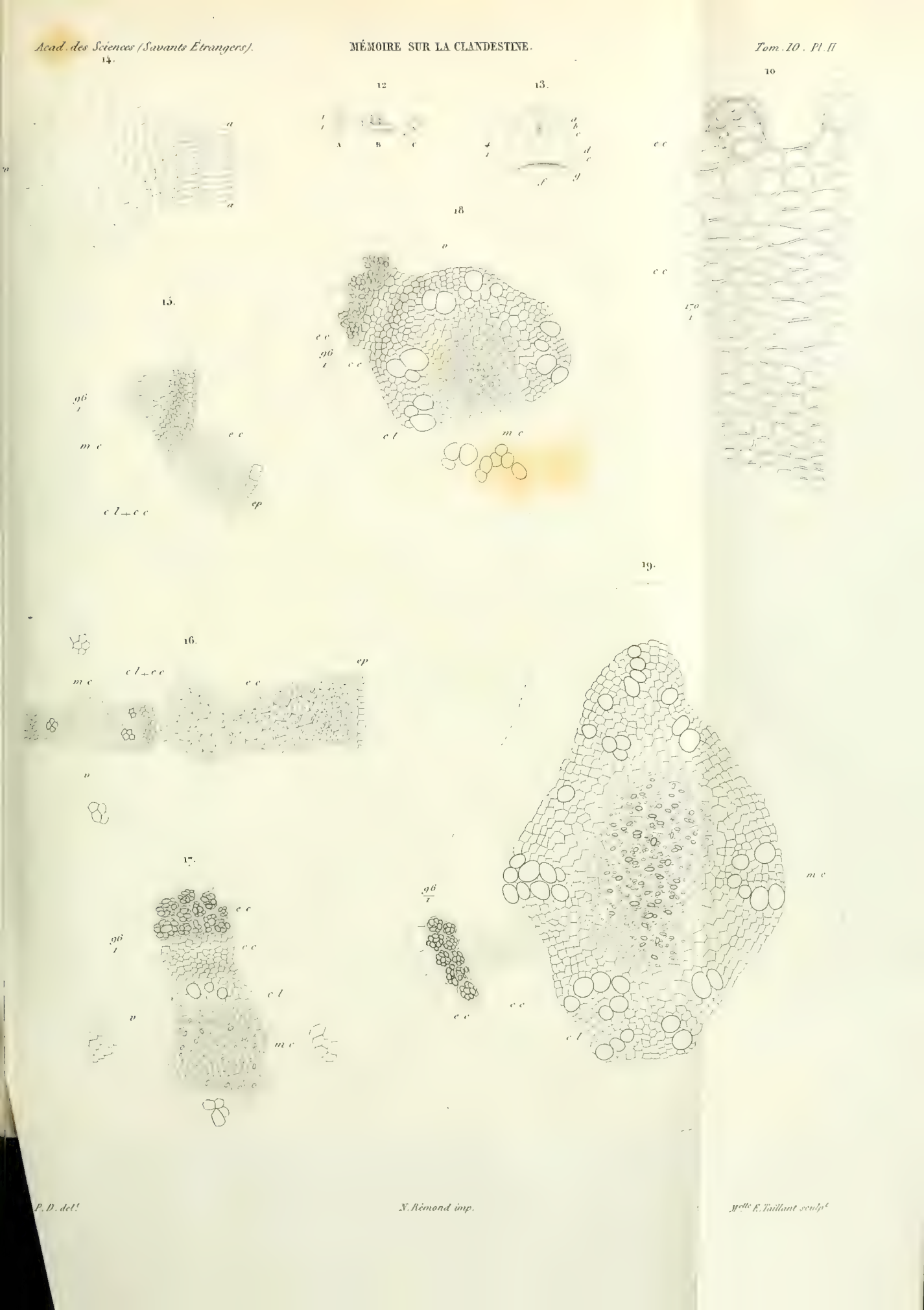


16.

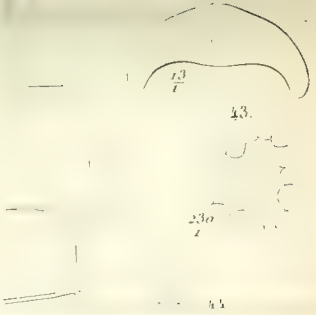


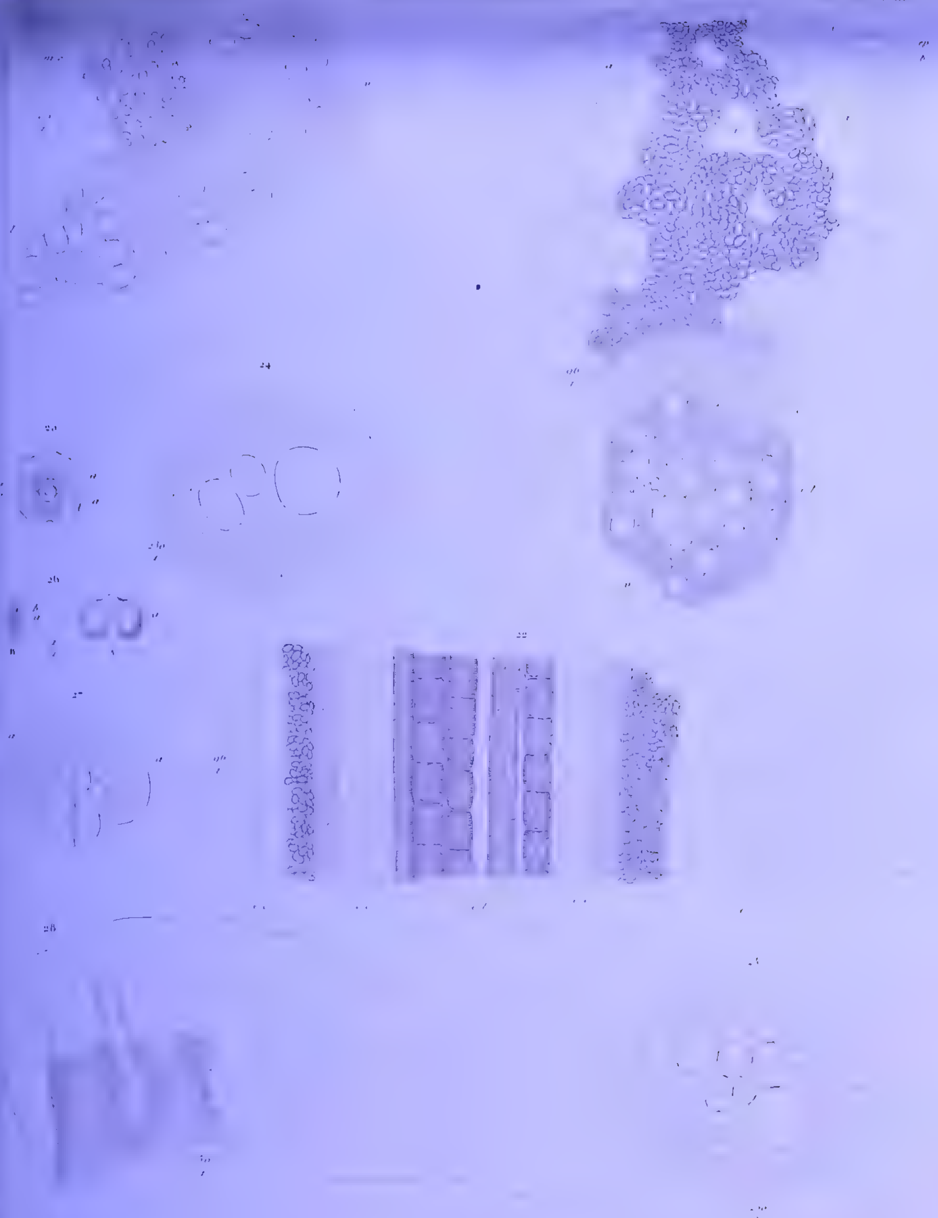
17.



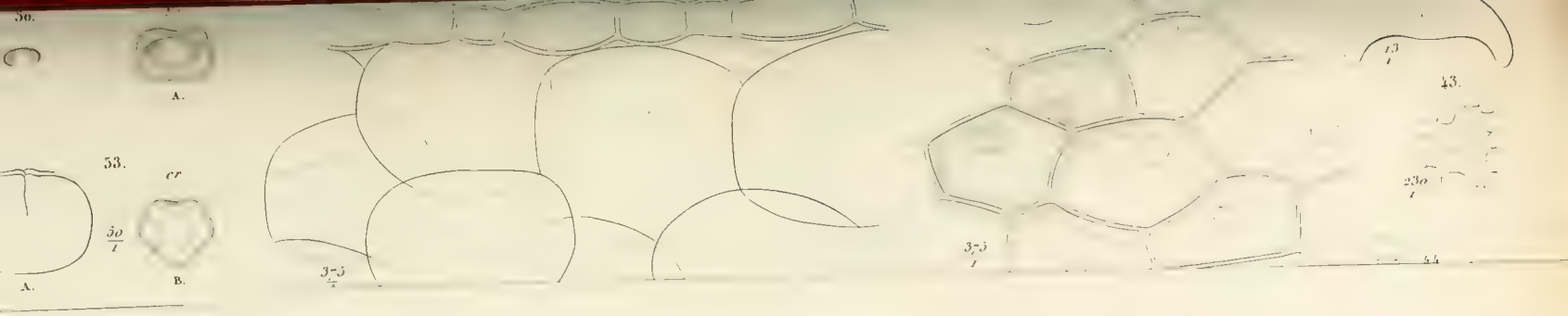

14.
a
a
12
A
B
C
13.
a
b
c
d
e
f
g
10
c c
c c
17a
18
p
c c
96
c c
c l
m c
15.
96
e c
m c
c l + c c
ep
19.
16.
m c
c l + c e
e c
ep
p
17.
96
e c
c c
c l
p
m c
96
c c
c c
c l
m c

ep
b
a
n


13
f
43.
23a
f



Mme E. Taillant sculp.


50.
A.
53.
cr
$\frac{5a}{1}$
A.
B.
$\frac{3-5}{2}$
$\frac{3-5}{1}$
$\frac{13}{1}$
43.
$\frac{23a}{1}$
44

78.

79.

59.

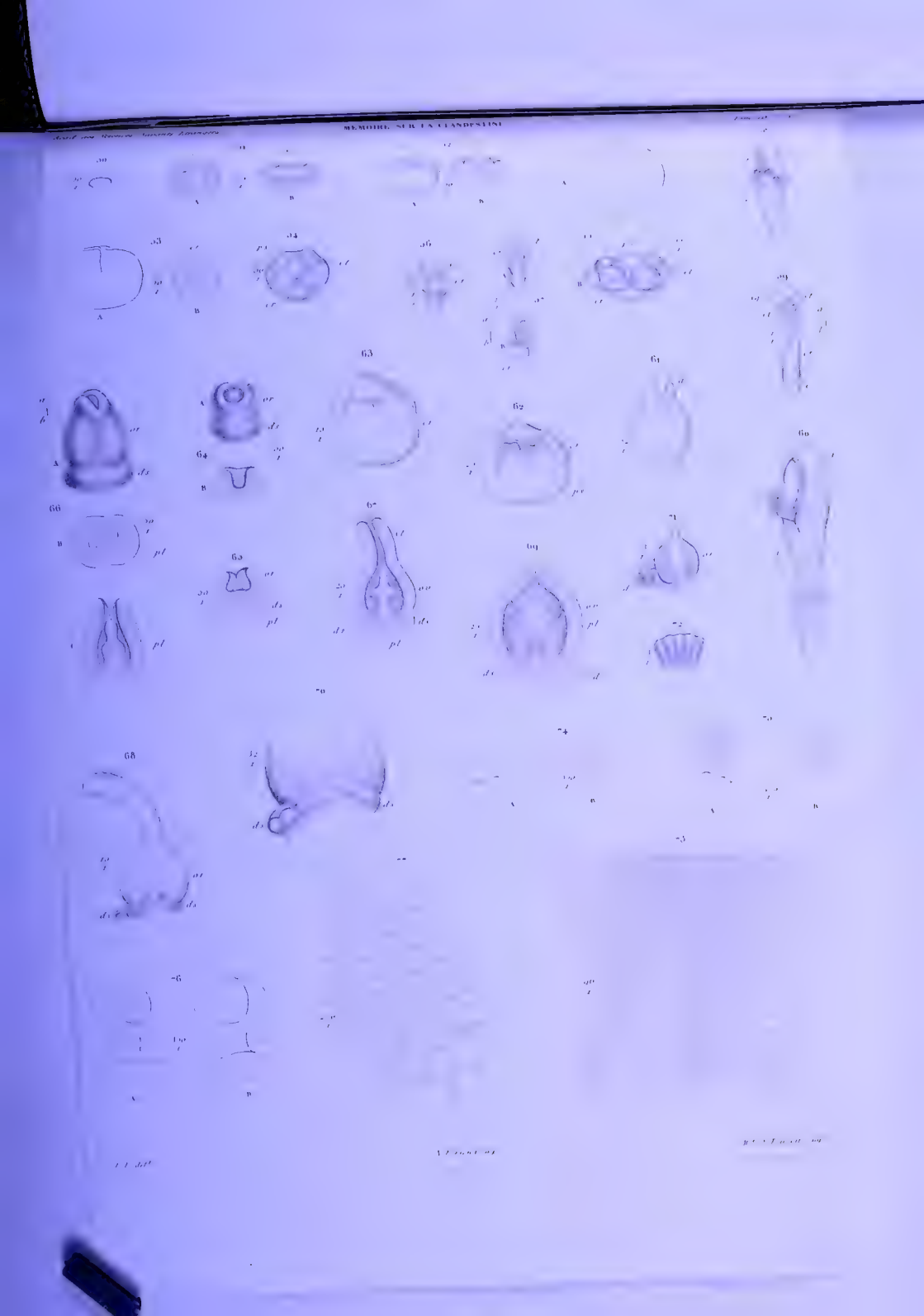
55.

37.

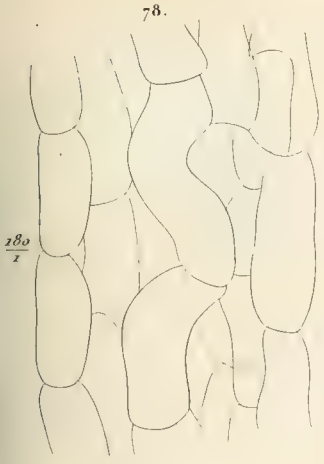
56.

54.

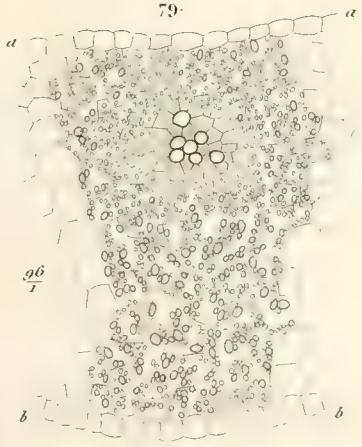
53.



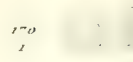
78.



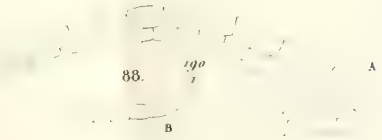
79.

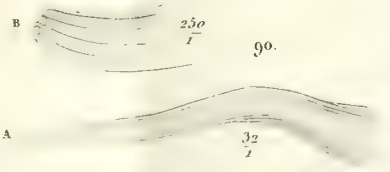


89.



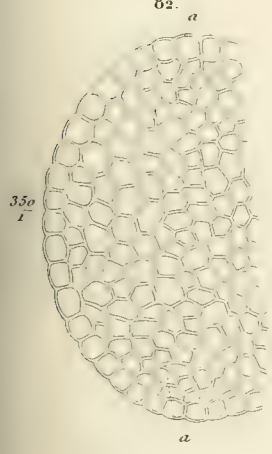
88.



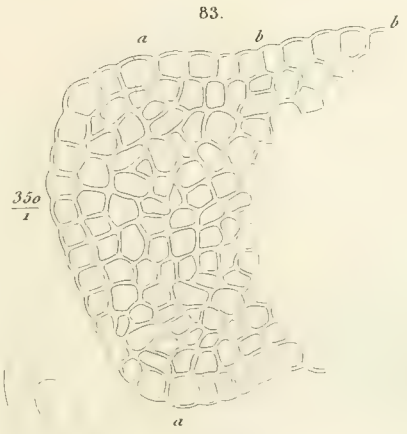


90.

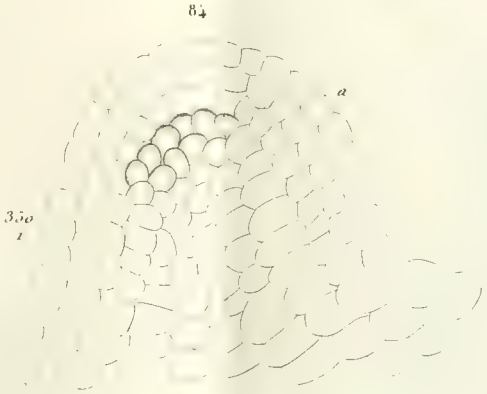
82.



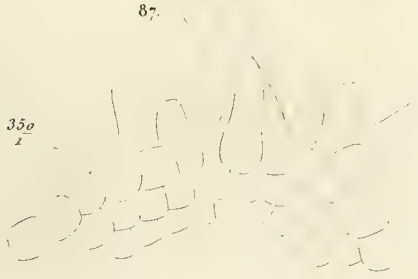
83.



84.

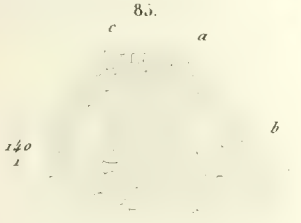


87.

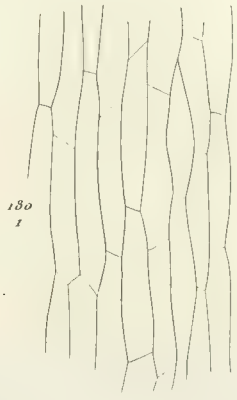


86.

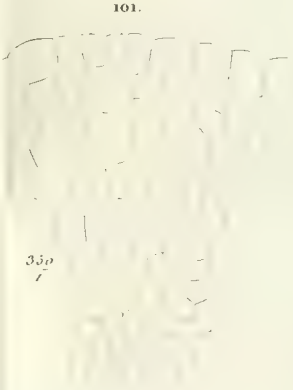
85.



91.

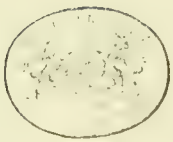


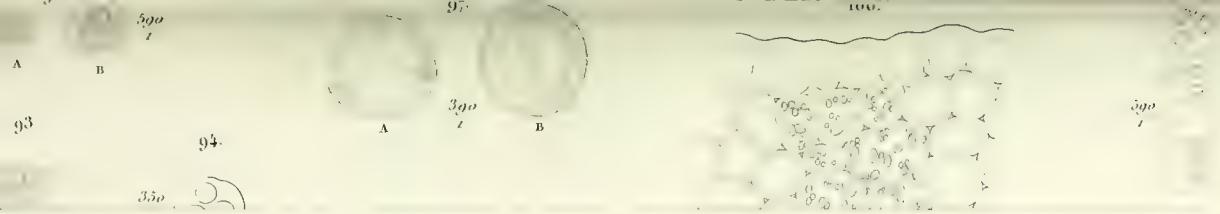
101.

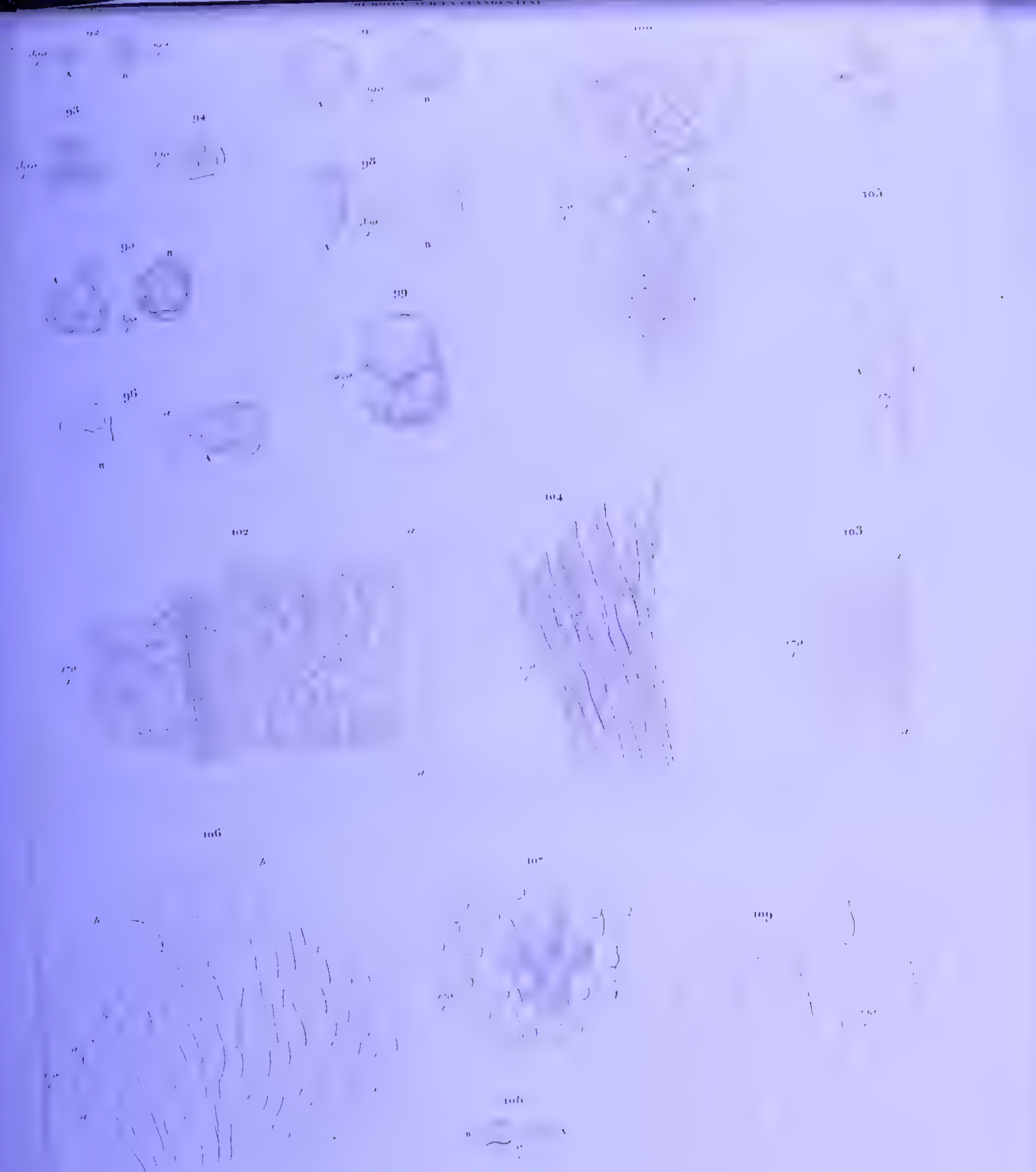


81.

80.



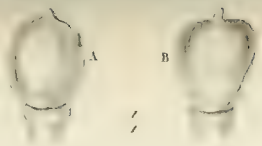

390
1
A
B
93
94.
350
97.
390
1
A
B
100.
390
1
b



V. Remond imp.

Yvlle P. Taillant sculp.

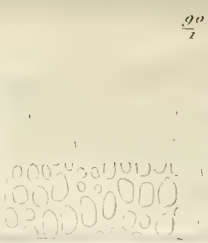
110.



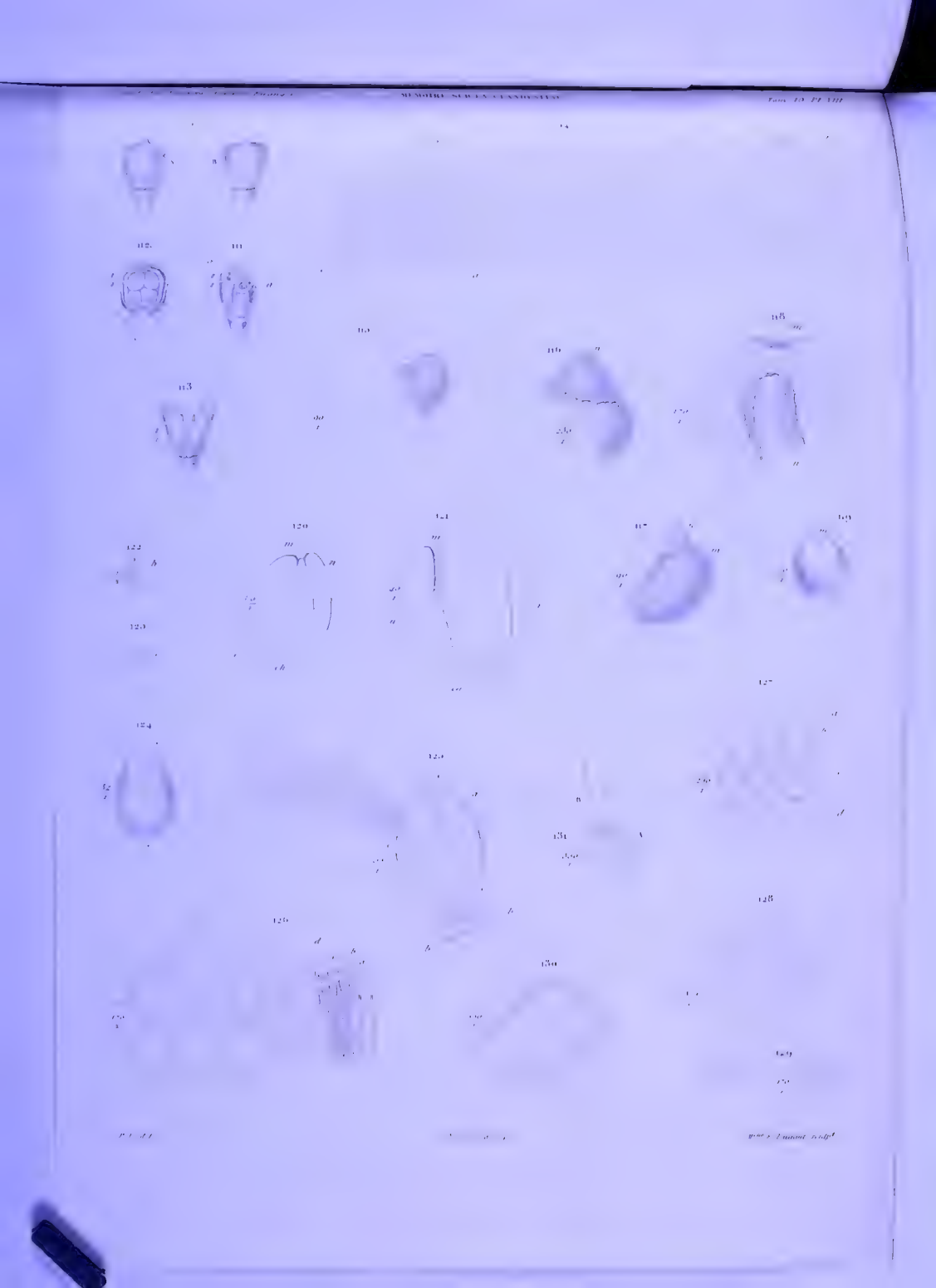
112

111.

114.



6



de ce qui se passe dans les autres parties du solide, car le flux de chaleur à travers ses parois sera, comme on sait, égal à zéro. Il faut donc, pour l'équilibre, que les diverses tranches du canal soient traversées à chaque instant par la même quantité de chaleur. Soit s la longueur du canal comptée à partir de la surface sur laquelle a été pris l'élément ω. La ligne s peut servir à caractériser les diverses surfaces isothermes, car ces surfaces sont, par leur nature, déterminées dès que l'on connaît un quelconque de leurs points. Si V désigne la température de la surface qui correspond à l'arc s, $\omega' \frac{dv}{ds}$ sera le flux qui traversera l'élément ω' intercepté par le canal; d'après ce que nous avons dit, ce produit doit être constant, en sorte que, si l'on a

$$\omega' = \varphi(s),$$

on en conclura:

$$dV = \frac{C ds}{\varphi(s)},$$

d'où

$$V = C \int \frac{ds}{\varphi(s)}. \tag{1}$$

reste à déterminer la fonction $\varphi(s)$. Pour y parvenir, étudions la loi de variation des sections interceptées sur les diverses surfaces par un canal normal à ces surfaces; il semble évident que cette loi ne dépend pas de la forme que l'on a choisie pour la section infiniment petite du canal; c'est ce qui résultera d'ailleurs de la manière dont nous allons la calculer.

Quelque petite que soit la surface par les points de laquelle on mène des trajectoires orthogonales, cette surface peut être décomposée en un nombre infini de rectangles infiniment petits par rapport à elle-même. Supposons ces rectangles déterminés par les intersections des lignes de courbure qui se croisent sur la surface, et considérons un filet normal aux surfaces isothermes

ayant pour base l'un d'entre eux, cherchons l'accroissement de sa section lorsqu'on passe d'une surface isotherme à une autre infiniment voisine. La section infiniment voisine aura, comme on sait, la forme d'un rectangle; or, ds désignant la distance des deux surfaces, α, β, les côtés du rectangle qui sert de base au filet, et R, r, les rayons de courbure principaux de la surface au point considéré, on aura évidemment

$$\alpha + d\alpha : \alpha :: \mathrm{R} + ds : \mathrm{R}$$
$$\beta + d\beta : \beta :: r + ds : r,$$

d'où

$$d\alpha = \frac{\alpha ds}{\mathrm{R}},$$
$$d\beta = \frac{\beta ds}{r},$$

et, par suite, le rectangle $\alpha\beta$ devient

$$\alpha\beta + d\alpha\beta = (\alpha + d\alpha)\,(\beta + d\beta) = \alpha\beta\left(1 + \frac{ds}{\mathrm{R}} + \frac{ds}{r}\right).$$

Il augmente donc proportionnellement à la somme $\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}$, somme que nous appellerons, avec M^lle^ Sophie Germain, courbure de la surface au point considéré.

Chacun des rectangles augmentant dans le rapport trouvé ci-dessus, il en sera de même de l'élément ω, et nous pourrons écrire :

$$d\omega = \omega ds\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}\right), \tag{2}$$

et, par suite,

$$\frac{d\omega}{\omega} = ds\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}\right).$$

$$\omega = \mathrm{C}e^{\int_0^s ds\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}\right)} = \varphi(s). \tag{3}$$

Remettant cette valeur de $\varphi(s)$ dans l'équation (1), il vient

$$V = C \int ds\, e^{-\int_0^s ds \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)}. \tag{4}$$

Cette formule permet, comme on voit, de calculer la loi des températures, lorsque l'on connaît la loi de variation de la courbure le long d'une ligne perpendiculaire aux diverses surfaces; elle apprend, par conséquent, conformément à ce qu'on devait prévoir, qu'une série de surfaces choisies au hasard ne peut pas être une série de surfaces isothermes; car, en prenant différentes trajectoires orthogonales, on arriverait, en général, à des expressions différentes de la température dans les divers points d'une même surface.

Il est facile de déduire de la formule (4) la condition nécessaire pour que des surfaces données puissent être isothermes; il faut que, s et s' désignant les longueurs de deux trajectoires orthogonales différentes comptées entre les deux mêmes surfaces, on ait

$$\int_0^s ds\, e^{-\int_0^s ds \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)} = \int_0^{s'} ds'\, e^{-\int_0^{s'} ds' \left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right)}. \tag{5}$$

Différentions les deux membres, en prenant pour variable indépendante un paramètre quelconque λ variable d'une surface à l'autre, il vient

$$\frac{ds}{d\lambda} e^{-\int_0^s ds \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)} = \frac{ds'}{d\lambda} e^{-\int_0^{s'} ds' \left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right)}, \tag{6}$$

prenant les logarithmes

$$\text{l.}\frac{ds}{d\lambda} - \int_0^s ds \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right) = \text{l.}\frac{ds'}{d\lambda} - \int_0^{s'} ds' \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right). \tag{7}$$

Si nous différentions une seconde fois, il vient

$$(8)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right) = \frac{\frac{d^2s'}{d\lambda^2}}{\frac{ds'}{d\lambda}} - \frac{ds'}{d\lambda}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right),$$

et, par suite, le premier membre, c'est-à-dire

$$(9)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

ne doit dépendre que de la surface que l'on considère, c'est-à-dire qu'il doit être une certaine fonction du paramètre λ. Il est facile de faire coïncider ce résultat avec celui de M. Lamé.

λ étant en effet le paramètre qui distingue les diverses surfaces les unes des autres, on peut concevoir leur équation résolue par rapport à λ, soit

$$\varphi(x, y, z) = \lambda.$$

Cette équation à la distance des deux surfaces infiniment voisines s'exprime facilement au moyen de $d\lambda$. Supposons, en effet, que l'on prenne sur la normale à l'une des surfaces, une longueur infiniment petite ds, si x, y, z, sont les coordonnées du point par lequel cette normale est menée, les coordonnées de l'extrémité seront évidemment

$$x+ds.\frac{\frac{d\lambda}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},\quad y+ds.\frac{\frac{d\lambda}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},\quad z+ds.\frac{\frac{d\lambda}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}}$$

et, par conséquent, l'accroissement du paramètre λ, lorsque l'on passera de la surface à laquelle appartient le point x, y, z

à celle qui passe par l'extrémité de notre petite normale ds, sera

$$\frac{d\lambda}{dx}dx+\frac{d\lambda}{dy}dy+\frac{d\lambda}{dz}dz=ds\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

d'où l'on tire

$$ds=\frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}}.$$

La différentiation donne

$$\frac{d^2s}{d\lambda^2}=-\frac{\frac{d}{d\lambda}\left\{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2\right\}+\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\frac{d}{d\lambda}\cdot\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{2\left\{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}};$$

mais on a

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2=\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2\cdot\frac{d\lambda}{ds}\cdot\frac{ds}{d\lambda}=2\cdot\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2\frac{d^2\lambda}{dx^2}\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\cdot\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{d\lambda}=2\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2\cdot\frac{d^2\lambda}{dy^2}\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{d\lambda}=2\cdot\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\frac{d^2\lambda}{dz^2}\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}}=-\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2\cdot\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{\left\{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right\}^2}.$$

On trouve, en calculant d'après les formules connues, la somme $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$, que cette somme est égale à

$$\frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\frac{d^2\lambda}{dy^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\frac{d^2\lambda}{dz^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{\left\{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}-\frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},$$

et en substituant dans l'expression (9), nous voyons que la condition pour que les surfaces considérées soient isothermes est que le rapport

$$\frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}$$

soit une fonction du seul paramètre λ. Réciproquement, si cette condition est remplie, en déterminant la température des diverses surfaces par la formule (4), on aura un état calorifique qui, une fois établi, se maintiendra indéfiniment, puisque chaque élément compris entre deux tranches d'un canal quelconque perdra à chaque instant autant de chaleur qu'il en gagnera.

II.

Un système quelconque de surfaces qui s'enveloppent les unes les autres étant donné, il existe dans un grand nombre de cas deux séries de surfaces trajectoires orthogonales qui les coupent suivant leurs lignes de courbure. Dans tous les cas examinés jusqu'ici, en prenant pour surfaces primitives des surfaces isothermes, il s'est trouvé que les surfaces orthogonales étaient aussi isothermes. Il est important de savoir si ce fait peut être érigé en théorème général. Pour nous assurer qu'il n'en est pas ainsi, nous emploierons la méthode si connue de démonstration par l'absurde, qui consistera ici à admettre d'abord le théorème pour en déduire des conséquences dont quelques-unes seront évidemment inexactes.

Considérons trois séries de surfaces isothermes orthogonales. On sait que chacune d'elles coupe toutes celles des autres systèmes suivant leurs lignes de courbure. Considérons sur l'une de ces surfaces un rectangle A B C D de dimensions finies, formé par quatre lignes de courbure; menons quatre autres lignes de courbure respectivement très-voisine des quatre premières, de

manière à former aux quatre sommets A B C D quatre rectangles

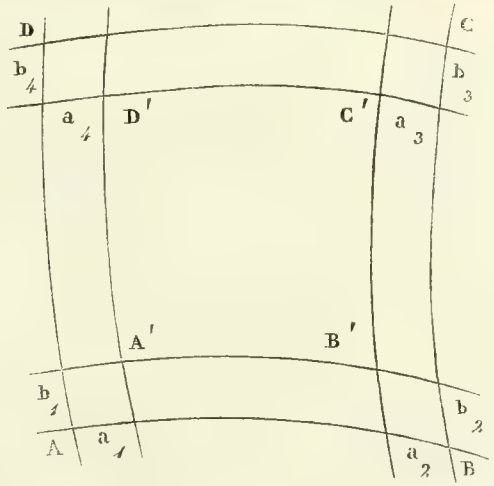


Fig. 1.

infiniment petits, dont je désignerai les côtés par $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$. Soient $i_1 i_2 i_3 i_4$ les distances comptées sur les normales aux quatre points A, B, C, D, entre la surface considérée et la surface infiniment voisine.

Puisque, par hypothèse, la série des surfaces orthogonales à A B C D, et dont l'une a A D pour trace, forme un système de surfaces isothermes, on peut concevoir sur chacune de ces surfaces une température telle qu'il y ait équilibre calorifique, et telle, par conséquent, qu'en considérant le filet compris entre la surface A B C D, la surface voisine appartenant au même système, et les deux surfaces orthogonales à celles-là passant par B A et B′ A′, les sections faites dans ce filet par les deux surfaces A D et C B soient traversées par les mêmes quantités de chaleur. Si donc dV_1 désigne la différence entre la température sur la surface A D et sur la surface A′ D′ et dV_2 la différence analogue pour les surfaces B C et B′ C′, on aura, d'après l'expression connue du flux :

$$(a) \qquad \frac{b_1 i_1 dV_1}{a_1} = \frac{b_2 i_2 dV_2}{a_2}.$$

De même, l'équilibre du filet DC, D'C' exigera que l'on ait

$$(b) \qquad \frac{b_4 i_4 dV_1}{a_4} = \frac{b_3 i_3 dV_2}{a_3}$$

On aura, par des considérations analogues, en remarquant que les surfaces A B, C D, sont par hypothèse isothermes, et désignant par dV_1', dV_2', les accroissements de température qui auraient lieu dans l'état d'équilibre si l'on passait de la surface A B à la surface A' B' et de la surface C' D' à la surface C D.

$$(c) \qquad \frac{a_1 i_1 dV_1'}{b_1} = \frac{a_4 i_4 dV_4'}{b_4}$$

$$(d) \qquad \frac{a_2 i_2 dV_1'}{b_2} = \frac{d_3 i_3 dV_2'}{b_3}.$$

Ces quatre équations étant multipliées membre à membre, en faisant entrer dans un même produit les premiers membres de (a) et de (c) et les seconds membres de (b) et de (d), il vient :

$$i_1^2 i_1^2 = i_2^2 i_4^2,$$

ou

$$i_1 : i_2 :: i_4 : i_3. \qquad (e)$$

Nous avons donc ce théorème :

Si l'on a trois systèmes de surfaces isothermes orthogonales les unes aux autres; si, sur l'une quelconque de ces surfaces, on considère un rectangle de dimensions finies formé par quatre lignes de courbures, les distances des quatre sommets de ce rectangle à la surface infiniment voisine de celle qui le renferme formeront une proportion.

D'après ce théorème, si l'on admettait qu'une série de surfaces isothermes eût toujours des trajectoires orthogonales et isothermes, il en résulterait qu'une des surfaces isothermes d'un corps étant connue, ainsi que la loi des distances à la surface infiniment voisine, le long de deux lignes de courbure perpendiculaires, on pourrait assigner la valeur de cette distance en un point quelconque pris sur la surface, et par suite déterminer la surface infi-

niment voisine. Il suffirait, en effet, de faire passer deux lignes de courbure par le point considéré, et la distance cherchée serait une quatrième proportionnelle à celles qui correspondent aux trois autres sommets du rectangle formé par ces lignes et par les deux premières. Mais cette conséquence est évidemment inadmissible, car on sait que l'on peut toujours se donner deux surfaces isothermes, et que les autres en sont une conséquence. Il est clair, en effet, qu'un corps de forme quelconque, ayant une paroi intérieure à une certaine température et une paroi extérieure à une autre température, finira par prendre un état d'équilibre calorifique dans lequel il existera une série de surfaces isothermes dont les parois interne et externe feront partie. Cette proposition, étendue comme limite au cas de deux surfaces infiniment voisines, montre qu'il est impossible d'établir aucun théorème général qui permette de déterminer l'une des deux par le moyen de l'autre, et, par conséquent, nous étions partis d'une hypothèse fausse, en admettant que les surfaces isothermes pouvaient toujours former des groupes de surfaces trajectoires orthogonales.

La considération de limite employée tout à l'heure, pour prouver que deux surfaces isothermes consécutives sont essentiellement arbitraires, pouvant ne pas paraître suffisamment rigoureuse, j'entrerai à ce sujet dans quelques développements. Admettons que deux surfaces isothermes consécutives soient connues, ou, ce qui revient au même, supposons donnée une surface isotherme, ainsi que le flux de chaleur qui doit s'établir en chacun de ses points; supposons celle des deux surfaces infiniment voisines qui est enveloppée par l'autre décomposée en un nombre infini de surfaces élémentaires, formées, par exemple, par les intersections de ses lignes de courbure; par les points du contour de ces surfaces élémentaires, menons des normales à la surface donnée; les pieds de ces normales traceront sur la surface voisine une série de lignes qui la décomposeront de même en surfaces élémentaires; le rapport de deux surfaces élémentaires dépendra,

comme nous l'avons vu plus haut, de la courbure des surfaces considérées et de la distance infiniment petite qui les sépare. Par les différents points des contours de ces surfaces élémentaires, menons des normales à notre seconde surface isotherme, et prenons sur ces normales des longueurs proportionnelles à l'aire de l'élément correspondant. Nous formerons de cette manière une troisième surface. Cette troisième surface nous servira à en trouver une quatrième, et ainsi de suite indéfiniment. Il est facile de voir que les surfaces construites de cette manière, ou plus rigoureusement la limite des systèmes obtenus de cette manière, pourrait être considérée comme un système de surfaces isothermes ; car, en faisant croître la température par degrés égaux de la première à la seconde surface, de la seconde à la troisième, etc. un canal quelconque, dont les parois seraient orthogonales aux diverses surfaces, aurait toutes ses sections traversées par la même quantité de chaleur, puisque le flux, qui est en raison inverse de la distance des surfaces traversées, se trouverait aussi en raison inverse de la surface des diverses sections.

Le théorème exprimé par l'équation (*e*) est une propriété remarquable des groupes de surfaces isothermes orthogonales : il

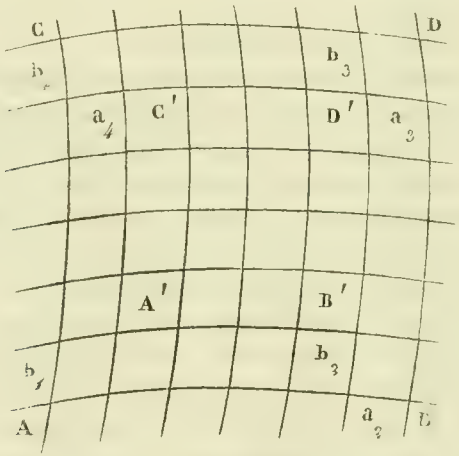


FIG. 2.

est relatif à deux surfaces infiniment voisines; mais on peut en déduire une autre qui donne une propriété commune à toutes les surfaces qui peuvent entrer dans un système de surfaces isothermes orthogonales. Considérons sur l'une des surfaces deux lignes de courbure orthogonales A B, A C, et deux lignes voisines A′ B′, A′ C′, il est évidemment possible de construire des lignes de courbure infiniment rapprochées, de telle manière que les rectangles compris entre deux lignes consécutives et les courbes A B, A′ B′ soient tous semblables entre eux; on pourra également concevoir des lignes perpendiculaires à A C qui diviseront la bande infiniment étroite comprise entre A C et A′ C′ en rectangles semblables entre eux, et semblables aussi aux précédents.

Les différentes lignes qui déterminent ces rectangles, étant prolongées, décomposeront toute la surface considérée en rectangles infiniment petits, et je dis que ces rectangles seront tous semblables aux premiers, de manière que la surface se trouvera divisée en rectangles semblables, dans lesquels le rapport des côtés est arbitraire, puisque les rectangles compris entre les courbes primitives (A B, A′ B′) (A C, A′ C′) ont été déterminés arbitrairement.

Considérons, par exemple, le rectangle DD′ : je dis que si ceux qui sont compris entre (A B, A′ B′), (A C, A′ C′), sont tous semblables entre eux, il sera semblable à chacun d'eux.

Désignons par $(a_1\ b_1)$, $(a_2\ b_2)$, $(a_3\ b_3)$, $(a_4\ b_4)$ les côtés des quatre rectangles (AA′) (BB′) (DD′) (CC′), et soient i_1, i_2, i_3, i_4, les distances des surfaces infiniment voisines comptées aux points A, B, C D, sur les normales à la surface A B C D, l'équilibre du canal A B A′ C′, dans le corps qui aurait pour surfaces isothermes les surfaces perpendiculaires à A B C D, ayant, A B, A′ B′, etc. pour traces, exigera que l'on ait

$$(f) \qquad \frac{a_1 i_1 dV_1}{b_1} = \frac{a_4 i_4 dV_4}{b_4};$$

on aura de même

$$(g) \qquad \frac{a_2 i_2 dV_1}{b_2} = \frac{d_2 i_4 dV_2}{b_2}.$$

Si donc $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_4}{b_4}$, on tire de là, en ayant égard à la proportion

$$i_1 : i_2 :: i_4 : i_3,$$

$$(h) \qquad \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2}{b_2};$$

et, par suite, le rectangle D D′, dont les côtés ont été désignés par a_3, b_3, est semblable au rectangle B B′. On en conclut que tous les rectangles de la surface seront semblables entre eux, puisque chacun d'eux est semblable à un rectangle compris entre A B A′ B′ et que ceux-là sont tous semblables les uns aux autres.

Nous avons donc ce théorème :

Toute surface susceptible de faire partie d'un système de surfaces orthogonales isothermes jouit de la propriété de pouvoir être découpée par les lignes de courbure en rectangles tous semblables entre eux, dans lesquels le rapport des côtés peut être choisi arbitrairement; on pourra faire en sorte, par exemple, que tous ces rectangles soient des carrés.

L'ellipsoïde, pouvant toujours entrer dans un système de surfaces isothermes orthogonales, jouit de la propriété précédente et peut être divisé en carrés par ses lignes de courbure.

Je démontre ce théorème directement dans une note jointe au mémoire.

III.

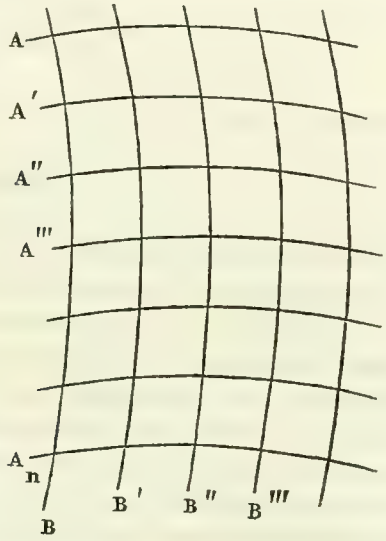
Dans le cas où les surfaces isothermes d'un corps sont cylindriques, les surfaces orthogonales conjuguées sont d'autres cylindres et des plans perpendiculaires aux génératrices. Pour que les cylindres orthogonaux soient aussi isothermes, il faut, d'après ce que nous venons de dire, que les traces de ces cylindres sur les plans perpendiculaires à leurs génératrices, ou, en d'autres

termes, que les bases de ces cylindres forment des rectangles tous semblables entre eux, pourvu, bien entendu, que ces bases soient convenablement espacées.

Il est facile de voir que cette condition sera toujours remplie, et qu'elle est même nécessaire et suffisante pour que les premiers cylindres soient isothermes.

Si nous considérons, en effet, la propagation de la chaleur dans un plan : soient A, A′, A″ une série de lignes isothermes, B, B′, B″ leurs trajectoires orthogonales. Considérons le mouvement de la chaleur dans le filet compris entre B et B′, A et A_n étant deux lignes isothermes quelconques, si ω est la portion de

Fig. 3.



A interceptée dans le filet B B′, et ω_n la portion correspondante de A_n', en désignant par dV l'accroissement de température lorsque l'on passe de A à la courbe voisine, et dV_n l'accroissement correspondant entre la ligne A_n et la ligne qui la suit, et appelant i_1, i_n, les portions de la ligne B comprise entre les mêmes courbes,

on aura, pour que la température puisse se maintenir constante :

$$\frac{\omega dV}{i_1} = \omega_n \frac{dV_n}{i_n};$$

d'où

$$\frac{\omega}{i_1} : \frac{\omega_n}{i_n} :: dV_n : dV_1. \qquad (\alpha)$$

Si ω', ω_n', i', i'_n, sont les quantités analogues à ω, ω_n' i_1, i_n pour un autre filet quelconque orthogonal aux lignes A_1 A_2, on aura de même

$$\frac{\omega'}{i'_1} : \frac{\omega'_n}{i'_n} :: dV_n : dV; \qquad (\beta)$$

donc

$$\frac{\omega}{i_1} : \frac{\omega_n}{i_n} :: \frac{\omega'}{i'_1} : \frac{\omega'_n}{i'_n}. \qquad (\sigma)$$

Si, par conséquent,

$$\frac{\omega}{i} = \frac{\omega'}{i'} = \frac{\omega_n}{i_n},$$

$\frac{\omega_n}{i_n}$ sera égal à chacun de ces trois rapports.

Si donc on choisit les lignes A A′ et les trajectoires B, B′, de manière que les rectangles compris entre AA′ et ceux compris entre B B′ soient semblables entre eux, ce qui évidemment est toujours possible, il arrivera que tous les rectangles seront semblables à ceux-là et, par suite, semblables les uns aux autres.

Réciproquement, si l'on a sur un plan deux séries de lignes se coupant respectivement à angle droit, il est facile de voir que si tous les rectangles formés par leurs intersections sont semblables entre eux, un quelconque des systèmes peut être considéré comme composé de lignes isothermes.

Soient, en effet, les lignes A A′ ....; B, B′ ..... Si nous prenons pour lignes isothermes les lignes A A′ A″, la température en un point de chacune d'elles pourra être déterminée par la condition de l'équilibre des températures dans un canal compris entre deux

courbes voisines B B′, et la condition pour que les lignes puissent être isothermes est que ces calculs, faits successivement pour les différents filets conduisent aux mêmes résultats : c'est ce qui aura lieu ici, car la condition qui donne, dans un filet, l'accroissement de température quand on passe d'une courbe à une autre, est que ω et dV étant les côtés du rectangle,

$$\frac{\omega dV}{i} = C'_1.$$

Si donc $\frac{\omega}{i}$ est constant, dV est constant, et comme la constante C est arbitraire, on pourra faire coïncider les résultats fournis par les divers filets.

Nous retombons ainsi sur un théorème déja démontré analytiquement par M. Lamé.

A un système de courbes planes isothermes, ou, si l'on veut, de cylindres isothermes, correspondent toujours des trajectoires orthogonales ou des cylindres orthogonaux également isothermes.

Si les surfaces isothermes sont de révolution, les surfaces orthogonales conjuguées doivent les couper suivant des méridiens et des parallèles, et sont, par conséquent, des plans passant par l'une et d'autres surfaces de révolution dont les méridiens coupent à angles droits ceux des premières surfaces.

Si nous admettons que ces trois séries de surfaces puissent être considérées comme isothermes, il faudra, d'après notre théorème, que deux quelconques d'entre elles coupent la troisième, et puissent, si on les dispose convenablement, tracer sur elle des rectangles semblables entre eux : ainsi, par exemple, les deux systèmes de surfaces de révolution doivent être tels, que leurs lignes méridiennes forment en se coupant des rectangles semblables entre eux, et, par suite, que ces méridiens forment les bases de cylindres isothermes. Nous avons donc ce théorème :

Des surfaces isothermes de révolution ne peuvent avoir pour trajectoires orthogonales conjuguées d'autres surfaces isothermes que dans le cas où leurs méridiens forment un système de lignes isothermes.

Lorsque cette condition sera remplie, il faudra, d'après le théorème exprimé par l'équation (*e*) du second paragraphe, qu'en considérant sur l'un des plans méridiens un rectangle de dimensions finies, formé par les traces de quatre surfaces de révolution appartenant deux à deux à des systèmes différents, les distances des quatre sommets de ce rectangle au plan méridien infiniment voisin, forment les quatre termes d'une proportion; mais ces distances sont proportionnelles aux rayons des parallèles que les quatre points décrivent dans leur rotation autour de l'axe. Nous avons donc ce théorème :

Deux systèmes de lignes isothermes orthogonales étant donnés, pour que leur rotation autour d'un axe engendre des surfaces de révolution isothermes, il faut que les distances à l'axe des quatre sommets d'un rectangle quelconque formé par les intersections des lignes données, soient les quatre termes d'une proportion.

On peut vérifier que cette condition est remplie par un système de sections coniques homofocales; ces lignes sont, comme on sait, des lignes isothermes, et leur révolution autour d'un de leurs axes engendre des surfaces de révolution isothermes. Si donc on prend un rectangle formé par deux hyperboles et deux ellipses, les ordonnées de ses quatre sommets devront former une proportion. Or, c'est précisément ce qui résulte d'un théorème de M. Chasles d'après lequel une même hyperbole coupe toutes les ellipses en des points *correspondants* dont le rapport des ordonnées est égal au rapport des axes des ellipses sur lesquelles ils se trouvent.

Le théorème précédent montre qu'il est impossible d'admettre que des surfaces isothermes de révolution aient toujours pour trajectoires orthogonales conjuguées d'autres surfaces isothermes de révolution. Si cela était en effet, il faudrait, d'après un théorème démontré plus haut, que les méridiens d'un système de surfaces de révolution isothermes fussent toujours des lignes isothermes. Admettons pour un instant qu'il en soit ainsi : si nous remarquons qu'une série de surfaces ou de lignes isothermes est

complétement déterminée quand on connaît deux d'entre elles [1], nous en conclurons que des lignes qui, en tournant autour d'un certain axe, engendrent des surfaces isothermes engendreraient également des surfaces isothermes en tournant autour d'un autre axe quelconque.

En effet, prenons deux des lignes en question; en les faisant tourner autour d'un axe quelconque, elles engendreront deux surfaces de révolution, et si nous regardons ces deux surfaces comme ayant en chacun de leurs points une même température différente de l'une à l'autre, de manière à ce qu'elles soient toutes deux surfaces isothermes, la série des surfaces isothermes dont elles feront partie sera, par cela même, déterminée, et ne pourra l'être que d'une seule manière. Toutes les surfaces qui composent cette série seront de révolution, comme les

[1] M. Liouville, dans ses leçons au Collége de France, a démontré cette proposition de la manière suivante.

On peut d'abord remarquer que, si des surfaces isothermes sont possibles lorsque deux d'entre elles ont des températures données, ces surfaces pourront encore rester isothermes lorsque les températures données viendront à changer. Cela posé, l'équation de l'équilibre de la chaleur étant

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

je dis que si tous les points de deux surfaces S et S_1 ont des températures données, les températures de tous les points du corps seront parfaitement déterminées. Si, en effet, on avait deux états possibles, on en formerait un troisième, en donnant à chaque point la différence des températures qu'il prend dans chacun des deux autres, et, par conséquent, en supposant une température nulle à tous les points des deux surfaces S et S_1. Si V_1 désigne alors la température d'un point du corps dans ce troisième état possible, on aura

$$\frac{d^2V_1}{dx^2}+\frac{d^2V_1}{dy^2}+\frac{d^2V_1}{dz^2}=0.$$

Multiplions par $V_1\,dx\,dy\,dz$, et intégrons dans toute la portion de l'espace comprise entre les surfaces S et S_1, nous aurons

$$\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{d^2V_1}{dx_1^2}V_1+\frac{d^2V_1}{dy_1^2}V_1+\frac{d^2V_1}{dz_1^2}V_1\right)=0,$$

ou en intégrant une fois par partie chacun des termes qui se trouvent sous le signe $\iiint$,

surfaces extrêmes [1], et, par suite, leurs lignes méridiennes pourront être considérées comme les bases de cylindres isothermes; mais les méridiens extrêmes étant donnés, les courbes intermédiaires sont toutes déterminées et ne peuvent l'être que d'une seule manière; elles coïncident donc avec la série qui avait été donnée d'abord, et dont les courbes que nous avons choisies comme courbes extrêmes faisaient aussi partie. Par conséquent, si des courbes, en tournant autour d'un axe, engendrent des surfaces isothermes, le théorème que nous avons admis nous démontrerait qu'en tournant autour d'un autre axe, elles engendreraient encore des surfaces isothermes; mais, d'après ce même théorème, en considérant un rectangle formé par deux de ces lignes et deux de leurs trajectoires orthogonales, les distances des quatre sommets de ce rectangle à l'axe de révolution forment une proportion. Il est donc impossible que l'axe de révolution puisse être choisi arbitrairement, et, dès lors, il n'est pas vrai de dire que des surfaces de révolutions isothermes aient pour méridiens des courbes isothermes. Il résulte de là qu'elles n'ont pas toujours pour surfaces de révolutions orthogonales des surfaces isothermes.

remarquant que V_1 s'annule pour tous les points des surfaces qui limitent les intégrations, il vient

$$0 = \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV_1}{dz}\right)^2 \right\};$$

équation qui exige évidemment que l'on ait en chaque point du corps

$$\frac{dV_1}{dx} = 0, \qquad \frac{dV_1}{dy} = 0, \qquad \frac{dV_1}{dz} = 0.$$

et, par suite,

$$V_1 = \text{const.} = 0$$

[1] Si les deux surfaces extrêmes sont de révolution, la symétrie exige qu'un état d'équilibre calorifique étant donné, on puisse également regarder comme états possibles ceux qui n'en différeraient que par la rotation du corps autour de son axe; or, ces états doivent être tous identiques d'après le théorème précédent, et la seule manière de satisfaire à cette condition est de supposer les surfaces isothermes de révolution.

SURFACES ISOTHERMES.

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ DE L'ELLIPSOÏDE.

On sait que, sur une surface quelconque, il passe en chaque point deux lignes de courbure perpendiculaires l'une à l'autre; il résulte de là que l'on peut toujours diviser une surface en rectangles infiniment petits, dont les côtés soient formés par les lignes de la courbure de la surface. J'ai été conduit à démontrer, par des considérations empruntées à la théorie de la chaleur, que, dans le cas d'un ellipsoïde, on pouvait faire en sorte que tous ces rectangles devinssent à la fois des carrés, ou, plus généralement, qu'ils devinssent tous à la fois semblables à un rectangle donné. C'est cette proposition que j'ai pour but d'établir directement. Pour y parvenir, j'emploierai les coordonnées curvilignes de M. Lamé, qui, dans cette question, se présentent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes.

Dans le système de coordonnées proposé par M. Lamé, chaque point de l'espace est déterminé par les paramètres de trois surfaces du second degré homofocales, que l'on peut faire passer par ce point.

b^2 et c^2 désignant deux constantes et μ, ν, ρ les paramètres en question, les équations des trois surfaces sont de la forme

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\rho^2}-\frac{y^2}{b^2-\rho^2}-\frac{z^2}{c^2-\rho^2}=1.$$

Puisque nous considérons ici les points de la surface d'un ellipsoïde, le paramètre μ sera pour nous une constante donnée; alors chaque valeur attribuée à ν fournira une ligne de courbure de la surface, les lignes de courbure de l'autre système étant définies par les valeurs constantes de ρ.

Considérons sur l'ellipsoïde un point dont nous désignerons les coordonnées par ν_1 et ρ_1; si l'on change ν_1 en $\nu_1+d\nu_1$, ρ_1 en $\rho_1+d\rho_1$, à ces nou-

velles valeurs des coordonnées correspondront deux lignes de courbures, et les quatre lignes

$$v = v_1, \qquad v = v_1 + dv_1$$
$$\rho = \rho_1, \qquad \rho = \rho_1 + d\rho_1$$

comprennent entre elles un rectangle. Cherchons la condition pour que ce rectangle soit un carré. Si ds_1, ds', désignent ses deux côtés, M. Lamé a trouvé (*Mémoire sur les surfaces isothermes*)

$$ds_1 = \frac{\sqrt{\mu^2 - v_1^2}\sqrt{v_1^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{v_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - v_1^2}}\, dv_1$$
$$ds'_1 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho_1^2}\sqrt{v_1^2 - \rho_1^2}}{\sqrt{b^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}.$$

Si donc on veut avoir $ds_1 = ds'_1$, il faut que

$$dv_1 = d\rho \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}\sqrt{v_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - v_1^2}}{\sqrt{b^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{\mu^2 - v_1^2}}. \qquad (1)$$

Si sur la ligne de courbure dont l'équation est $v = v_1$, nous prenons un point dont les coordonnées soient v_1 et ρ_2, la ligne $\rho = \rho_2$ aura une portion ds_2 interceptée entre les deux lignes qui ont pour équations

$$v = v_1, \qquad v = v_1 + dv_1,$$

et l'on aura

$$ds_2 = \frac{\sqrt{\mu^2 - v_1^2}\sqrt{v_1^2 - \rho_2^2}}{\sqrt{v_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - v_1^2}}\, dv_1.$$

Si l'on nomme ds'_2 la portion de la courbe $v = v_1$ comprise entre les lignes qui ont pour équations

$$\rho = \rho_2, \qquad \rho = \rho_2 + d\rho_2,$$

on aura

$$ds'_2 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho_2^2}\sqrt{v_1^2 - \rho_2^2}}{\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}}\, d\rho_2;$$

et, par conséquent, pour que les deux lignes $\rho = \rho_2$, $\rho = \rho_2 + d\rho_2$, forment un carré avec les lignes $v = v_1$, $v = v_1 + dv_1$, il faut que l'on ait

$$dv_1 = d\rho_2 \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho_2^2}\sqrt{v_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - v_1^2}}{\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{c^2 - \rho_2^2}\sqrt{\mu^2 - v_1^2}}; \qquad (2)$$

de même, en prenant sur la ligne $\rho = \rho_1$ un point dont les coordonnées soient ρ_1 et ν_2, le rectangle compris entre les lignes $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_1 + d\rho$, $\nu = \nu_2$, $\nu = \nu_2 + d\nu_2$, sera un carré si l'on a

$$d\nu_2 = d\rho_1 \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho_1^2}\sqrt{\nu_2^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu_2^2}}{\sqrt{b^2 - \rho_1^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}\sqrt{\mu^2 - \nu_2^2}}. \qquad (3)$$

Si entre les équations (1), (2), (3), nous éliminons les deux quantités $d\nu_1$ et $d\rho_1$, il se trouve que ν_1 et ρ_1 disparaissent d'eux-mêmes, et il vient

$$d\nu_2 = d\rho_2 \frac{\sqrt{\nu_2^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu_2^2}\sqrt{\mu_2^2 - \rho_2^2}}{\sqrt{c^2 - \rho_2^2}\sqrt{b^2 - \rho_2^2}\sqrt{\mu^2 - \nu_2^2}}, \qquad (4)$$

équation qui ne diffère de (1) que par le changement de ρ_1, ν_1, $d\rho_1$, $d\nu$, en ρ_2, ν_2, $d\rho_2$, $d\nu_2$, et qui exprime, par suite, que le rectangle compris entre les courbes

$$\rho = \rho_2, \qquad \rho = \rho_2 + d\rho_2,$$
$$\nu = \nu_2, \qquad \nu = \nu_2 + d\nu_2$$

est un carré.

Il résulte de là que *si l'on divise les portions de surface comprise entre les lignes de courbures voisines* $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_1 + d\rho_1$ *et* $\nu = \nu_1$, $\nu = \nu_1 + d\nu_1$, *de manière à les partager toutes deux en carrés infiniment petits, ce qui, évidemment, est toujours possible, les lignes qui forment les côtés de ces carrés, étant prolongées sur la surface, la diviseront complétement en carrés infiniment petits.*

Il est évident qu'au lieu de carrés j'aurais pu prendre des rectangles semblables à un rectangle donné : la démonstration se serait faite absolument de la même manière.

SUR LA DIVISION

DES

FONCTIONS ABÉLIENNES

OU ULTRA-ELLIPTIQUES;

PAR M. HERMITE,

ÉLÈVE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

(PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 10 JUILLET 1843.)

L'objet principal du premier mémoire d'Abel sur la théorie des fonctions elliptiques est la résolution des équations relatives à leur division en parties égales. Le beau résultat auquel il est parvenu, savoir, que cette résolution est toujours possible à l'aide de radicaux, en supposant connue la division de la fonction complète, peut être étendu aux transcendantes d'ordre plus élevé nommées par Legendre fonctions ultra-elliptiques, au moyen des nouveaux principes sur lesquels M. Jacobi a fondé leur théorie.

C'est ce qu'on va essayer de faire voir, en considérant d'abord les transcendantes qui sont l'objet du mémoire intitulé : *De functionibus quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur* (Journal de Crelle, t. XIII, p. 55).

I.

Soit

$$\Delta(x) = \sqrt{x(1-x)\,(1-p_1^2x)\,(1-p_2^2x)\,(1-p_3^2x)};$$

considérez les fonctions x et y déterminées par les deux équations

$$\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\Delta(y)} = u,$$
$$\int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)}{\Delta(y)} = u',$$

et soit

$$x = \lambda_0(u, u'), \quad y = \lambda_1(u, u').$$

La propriété fondamentale de ces fonctions de deux variables consiste en ce que les quantités

$$\lambda_0(u+v,\ u'+v'), \quad \lambda_1(u+v,\ u'+v'),$$

sont les racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\lambda_0(u, u'),\ \lambda_1(u, u'),\ \Delta(\lambda_0(u, u')),\ \Delta(\lambda_1(u, u')),$$
$$\lambda_0(v, v'),\ \lambda_1(v, v'),\ \Delta(\lambda_0(v, v')),\ \Delta(\lambda_1(v, v')).$$

Il en résulte que, quel que soit le nombre entier n, les deux fonctions

$$\lambda_0(nu, nu'), \quad \lambda_1(nu, nu'),$$

seront pareillement les racines d'une équation du second degré à coefficients rationnels en

$$\lambda_0(u, u'),\ \lambda_1(u, u'),\ \Delta(\lambda_0(u, u')),\ \Delta(\lambda_1(u, u')).$$

Cela fait voir que, par la résolution de deux équations algébriques, on pourra déterminer inversement

$$\lambda_0(u, u') \text{ et } \lambda_1(u, u')$$

par

$$\lambda_0(nu, nu') \text{ et } \lambda_1(nu, nu').$$

Représentons, pour abréger, par x_n et y_n les fonctions relatives aux arguments multiples nu, nu', et soit

$$Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0$$

l'équation qui sert à les déterminer, au moyen de x et y, j'ai trouvé qu'on pouvait mettre les coefficients sous la forme

$$P + Q\Delta(x)\Delta(y),$$

en désignant par P et Q des fonctions rationnelles de x et y; mais cette remarque n'est pas essentielle pour ce qui va suivre. Je partirai de ce que les racines simultanées des équations

$$(1)\quad \begin{cases} Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0 \\ Uy_n^2 + U'y_n + U'' = 0 \end{cases}$$

sont données, d'après M. Jacobi, par les formules suivantes, où l'on a

$$i_1 = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)},\quad i_2 = 2\int_{0}^{1} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)},\quad i_3 = 2\int_{\frac{1}{p^2_2}}^{\frac{1}{p^2_3}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)},\quad i_4 = 2\int_{\frac{1}{p^2_3}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)},$$

$$i'_1 = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)},\quad i'_2 = 2\int_{0}^{1} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\Delta(x)},\quad i'_3 = \int_{\frac{1}{p^2_2}}^{\frac{1}{p^2_3}} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{-1}\,\Delta(x)},\quad i'_4 = 2\int_{p^2_3}^{\infty} \frac{\alpha'+\beta' x)\,dx}{\Delta(x)};$$

savoir :

$$x = \lambda_0\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right)$$

$$y = \lambda_1\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''', les valeurs $0, 1, 2 \ldots\ldots n-1$.

Voici maintenant le théorème sur lequel repose leur résolu-

tion. Soit $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de x et y, p, q, r, s, quatre racines de l'équation binôme $t^n = 1$. Faisons, pour abréger,

$$\mathrm{I} = mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4$$
$$\mathrm{I}' = mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4,$$

on aura

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{m}\sum_{0}^{n-1}\sum_{0}^{n-1}{}_{m'}\sum_{0}^{n-1}{}_{m''}\left\{f\left(\lambda_0\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n}u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n},\ u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right)p^m q^{m'} r^{m''} s^{m'''}\right\}$$
$$= \sqrt[n]{\mathrm{A} + \mathrm{B}\Delta(\lambda_0(nu, nu')) + \mathrm{C}\Delta(\lambda_1(nu, nu')) + \mathrm{D}\Delta(\lambda_0(nu, nu'))\Delta(\lambda_1(nu, nu'))},$$

A, B, C, D, étant des fonctions rationnelles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$.

Le premier membre peut d'abord être ramené à une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, contenant d'ailleurs des quantités relatives aux arguments multiples. En effet, d'après la propriété fondamentale des fonctions λ, le terme général

$$f\left(\lambda_0\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n}u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(u+\frac{\mathrm{I}}{n}u'+\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right)$$

pourra être exprimé rationnellement en fonction de

$$\lambda_0(u, u'),\ \lambda_1(u, u'),\ \Delta(\lambda_0(u, u')),\ \Delta(\lambda_1(u, u'))$$

et des quantités analogues relatives à la division des indices : or, on trouve aisément les formules

$$\Delta(x) = (\alpha + \beta x)\frac{dx}{du} + (\alpha' + \beta' x)\frac{dx}{du'},$$
$$\Delta(y) = (\alpha + \beta y)\frac{dy}{du} + (\alpha' + \beta' y)\frac{dy}{du'},$$

desquelles il résulte que les radicaux

$$\Delta(\lambda_0(u, u')),\ \Delta(\lambda_1(u, u'))$$

s'exprimeront eux-mêmes rationnellement en $\lambda_0(u, u')$ et $\lambda_1(u, u')$, car, en faisant disparaître les irrationnelles des équations, puis les différentiant successivement par rapport à u et u', on obtiendra les dérivées partielles en fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$ et $\lambda_1(u, u')$.

Représentons pour un instant ce premier nombre par $\varphi(u, u')$; on démontrera aisément, au moyen des propriétés relatives à la périodicité des fonctions λ, l'égalité suivante :

$$\varphi\left(u + \frac{ki_1\sqrt{-1} + k'i_2 + k''i_3\sqrt{-1} + k'''i_4}{n},\ u' + \frac{ki'_1\sqrt{-1} + k'i'_2 + k''i'_3\sqrt{-1} + k'''i'_4}{n}\right) = p^{-k} q^{-k'} r^{-k''} s^{-k'''} \varphi(u, u'),$$

quels que soient les entiers k, k', k'', k'''.

En l'élevant à la puissance n, on obtient donc une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, qui ne change point en substituant à ces quantités deux autres quelconques des racines simultanées des équations proposées. Il résulte de là, et de la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues, que cette fonction pourra être déterminée rationnellement par les coefficients des équations proposées.

Mais comme il a été introduit précédemment les dérivées partielles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$, on pourra les éliminer par les formules suivantes :

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\frac{dx}{du} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha' + \beta' y), \qquad (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\frac{dx}{du'} = \frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha + \beta y),$$

$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')\frac{dy}{du} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha' + \beta' x), \qquad (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\frac{dy}{du'} = \frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha + \beta x),$$

appliquées, bien entendu, aux quantités x_n, y_n.

Il suffit maintenant, pour achever la démonstration du théorème énoncé, d'observer que toute fonction rationnelle des deux radicaux

$$\Delta(\lambda_0(nu, nu')), \qquad \Delta(\lambda_1 nu, nu'))$$

peut être mise sous la forme

$$A + B\Delta(\lambda_0(nu, nu')) + C\Delta(\lambda_1(nu, nu')) + D\Delta(\lambda_0(nu, nu'))\,\Delta(\lambda_1(nu, nu')).$$

En supposant successivement $f(x,y) = x + y$ et $f(x, y) = xy$, le théorème précédent donnera, exprimés par une somme de $n^4 - 1$, radicaux n^{es}, les coefficients d'une équation du second degré, dont les racines détermineront, en dernière analyse, celles des équations proposées. On le verra facilement, en considérant le système des équations linéaires qu'on obtiendrait en attribuant à p, q, r, s, leurs diverses valeurs. J'ajouterai ici, mais sans m'arrêter à le démontrer, que les $n^n - 1$, radicaux dont je viens de parler, peuvent s'exprimer rationnellement par quatre d'entre eux.

II.

Pour obtenir la division des indices, faisons

$$nu = ki_1\sqrt{-1} + k'i_2 + k''i_3\sqrt{-1} + k'''i_4,$$
$$nu' = ki'_1\sqrt{-1} + k'i'_2 + k''i'_3\sqrt{-1} + k'''i'_4;$$

on aura

$$x_n = 0, \qquad y_n = 0,$$

et les équations à résoudre seront:

$$(2) \qquad U' = 0, \qquad U'' = 0.$$

Leurs racines seront données par les formules

$$x = \lambda_0\left(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$
$$y = \lambda_1\left(\frac{mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + m'''i_4}{n}, \frac{mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres m, m', m'', m''', les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$; mais si l'on suppose le nombre n premier et si l'on fait

$$(3) \qquad \begin{aligned} I_1 &= i_1\sqrt{-1} & I'_1 &= i'_1\sqrt{-1} \\ I_2 &= mi_1\sqrt{-1} + i_2 & I'_2 &= mi'_1\sqrt{-1} + i'_2 \\ I_3 &= mi_1\sqrt{-1} + mi'_2 + i_3\sqrt{-1} & I'_3 &= mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + i'_3\sqrt{-1} \\ I_4 &= mi_1\sqrt{-1} + m'i_2 + m''i_3\sqrt{-1} + i_4 & I'_4 &= mi'_1\sqrt{-1} + m'i'_2 + m''i'_3\sqrt{-1} + i'_4. \end{aligned}$$

il est aisé de voir qu'on peut les remplacer par les suivantes:

$$x=\lambda_0\left(\mu\frac{I_1}{n},\ \mu\frac{I'_1}{n}\right),\ y=\lambda_1\left(\mu\frac{I_1}{n},\ \mu\frac{I'_1}{n}\right)$$
$$x=\lambda_0\left(\mu\frac{I_2}{n},\ \mu\frac{I'_2}{n}\right),\ y=\lambda_1\left(\mu\frac{I_2}{n},\ \mu\frac{I'_2}{n}\right)$$
$$x=\lambda_0\left(\mu\frac{I_3}{n},\ \mu\frac{I'_3}{n}\right),\ y=\lambda_1\left(\mu\frac{I_3}{n},\ \mu\frac{I'_3}{n}\right)$$
$$x=\lambda_0\left(\mu\frac{I_4}{n},\ \mu\frac{I'_4}{n}\right),\ y=\lambda_1\left(\mu\frac{I_4}{n},\ \mu\frac{I'_4}{n}\right),$$

en supposant à m, m', m'', m''', les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$ et à μ, les valeurs $1, 2, 3, \ldots n-1$.

Cependant, si l'on observe que

$$\lambda_0(-u,-u')=\lambda_0(u,u')$$
$$\lambda_1(-u,-u')=\lambda_1(u,u'),$$

comme on peut aisément le démontrer, on verra qu'il suffit de faire

$$\mu=1,\ 2,\ \ldots\ldots\frac{n-1}{2},$$

conjointement avec les autres valeurs de m, m', m'', m'''; car, passé le terme $\frac{n-1}{2}$, on ne ferait plus que reproduire les valeurs déjà obtenues.

Cela posé, soit ρ une racine primitive, par rapport au nombre premier n, I, l'une quelconque des quantités comprises dans la formule $mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i''_4$, I' la quantité correspondante relative à l'argument u', et $f(x,y)$ une fonction rationnelle et symétrique de x et y; considérez l'expression

$$(4)\qquad \sum_0^{\frac{1}{2}(n-1)-1} {}_k f\left(\lambda_0\left(\rho^k\frac{I}{n},\ \rho^k\frac{I'}{n}\right),\ \lambda_1\left(\rho^k\frac{I}{n},\ \rho^k\frac{I'}{n}\right)\right)\theta^k,$$

où θ est une racine de $t^{n-1}=1$, le terme général pourra s'exprimer rationnellement en

$$\lambda_0\left(\frac{I}{n},\ \frac{I'}{n}\right),\qquad \lambda_1\left(\frac{I}{n},\ \frac{I'}{n}\right),$$

et

$$\Delta\left(\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right), \ \Delta\left(\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right).$$

Or, on a vu précédemment que, pour toute valeur des arguments u et u', les radicaux

$$\Delta(\lambda_0(u, u')), \ \Delta(\lambda_1(u, u'))$$

s'expriment rationnellement au moyen de

$$\lambda_0(u, u'), \ \lambda_1(u, u')$$

et des quantités relatives aux arguments multiples; ainsi, on pourra transformer l'expression (4) en une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$, que je représenterai, pour abréger, par $\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)$.

Or, si dans l'égalité

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right) = \sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)-1} {}_k f\left(\lambda_0\left(\rho^k \frac{\mathrm{I}}{n}, \rho^k \frac{\mathrm{I}'}{n}\right), \ \lambda_1\left(\rho^k \frac{\mathrm{I}}{n}, \rho^k \frac{\mathrm{I}}{n}\right)\right)\theta^k.$$

on remplace I et I′ par $\rho^h \mathrm{I}$ et $\rho^h \mathrm{I}'$, on trouvera aisément

$$\varphi\left(\rho^h \frac{\mathrm{I}}{n}, \rho^h \frac{\mathrm{I}'}{n}\right) = \theta^{-h} \varphi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right).$$

Cela posé, comme le nombre ρ^h équivaut, suivant le module n, à un nombre quelconque μ pour une valeur convenable de h, en faisant

$$\psi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right) = \varphi^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right),$$

on aura

$$\psi\left(\mu \frac{\mathrm{I}}{n}, \mu \frac{\mathrm{I}'}{n}\right) = \psi\left(\frac{\mathrm{I}}{n}, \frac{\mathrm{I}'}{n}\right).$$

Si donc on donne à I et I′ toutes les valeurs correspondantes

comprises dans les formules (3), en attribuant à m, m', m'', les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1,$$

on pourra former une équation dont les racines seront les valeurs correspondantes de la fonction ψ, et dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de ceux des équations proposées. Il est bien facile de voir, d'après les expressions (3), que son degré sera $1+n+n^2+n^3$; or, il suffira d'en connaître une seule racine pour résoudre les équations (2).

En effet, si nous considérons une de ces racines, et si nous la désignons par (θ) pour rappeler qu'elle dépend de la quantité θ qui entre dans l'expression (4), on aura

$$(\theta)^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}} = \Sigma f\left(\lambda_0\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(\rho^k\frac{\mathrm{I}}{n},\ \rho^k\frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right)\theta^k,$$

d'où, en substituant successivement à θ toutes les autres racines de $x^{\frac{1}{2}(n-1)}=1$, $\theta'\ \theta''\ldots\ \theta^{\left(\frac{1}{2}(n-3)\right)}$, 1, et ajoutant membre à membre les équations résultantes

$$f\left(\lambda_0\left(\frac{\mathrm{I}}{n},\ \frac{\mathrm{I}'}{n}\right),\ \lambda_1\left(\frac{\mathrm{I}}{n},\ \frac{\mathrm{I}'}{n}\right)\right) = (\theta)^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}} + (\theta')^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}} + (\theta'')^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}} + \ldots + (1)^{\frac{1}{\frac{1}{2}(n-1)}};$$

donc, en faisant $f(x, y)=x+y$, puis $f(x, y)=xy$, on connaîtra par là les coefficients d'une équation du second degré dont les racines déterminent, en dernière analyse, celles des équations proposées.

III.

Des considérations toutes semblables aux précédentes s'appliquent aux autres classes des fonctions ultra-elliptiques, et il suffira, pour le faire voir, d'établir les formules suivantes.

Soit

$$\Delta(x) = \sqrt{x(1-x)(1-p_1^2x)\dots(1-p^2_{2n-1}x)}$$
$$\theta_k(x) = \alpha_k + \beta_k x + \gamma_k x^2 + \dots + \eta_k x^n.$$

Posons

$$u_0 = \sum_0^n{}_h \int_0^{x_h} \frac{\theta_0(x)\,dx}{\Delta(x)} \quad u_1 = \sum_0^n{}_h \int_0^{x_h} \frac{\theta_1(x)\,dx}{\Delta(x)} \dots\dots \quad u_k = \sum_0^n{}_h \int_0^{x_h} \frac{\theta_u(x)\,dx}{\Delta(x)},$$

et considérons, d'après M. Jacobi, x_0, x_1,... x_n, comme déterminés par ces équations en fonction de u_0, u_1..... u_n, de sorte qu'on ait

$$x_0 = \lambda_0(u_0, u, \dots u_n) \quad x_1 = \lambda_1(u_0, u, \dots u_n) \dots \quad x_n = \lambda_n(u_0, u, \dots u_n).$$

En les différentiant, par rapport à u_0, il viendra

$$1 = \sum_0^n{}_h \frac{dx_h}{du_0}\frac{\theta_0(x_h)}{\Delta(x_h)} \quad 0 = \sum_0^n{}_h \frac{dx_h}{du_0}\cdot\frac{\theta_1(x_h)}{\Delta(x_h)} \dots \quad 0 = \sum_0^n{}_h \frac{dx_h}{du_0}\frac{\theta_n(x_h)}{\Delta(x_h)},$$

et si on les ajoute après les avoir respectivement multipliées, à partir de la seconde, par des quantités t_1, t_2,... t_n, telles que

$$\begin{aligned}
&\theta_0(x_1) + t_1\theta_1(x_1) + t_2\theta_2(x_1) + \dots + t_n\theta_n(x_1) = 0\\
&\theta_0(x_2) + t_1\theta_1(x_2) + t_2\theta_2(x_2) + \dots + t_n\theta_n(x_2) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\theta_0(x_n) + t_1\theta_1(x_n) + t_2\theta_2(x_n) + \dots + t_n\theta_n(x_n) = 0,
\end{aligned}$$

on trouvera, en faisant pour abréger :

$$\mathrm{D} = \theta_0(x_0) + t_1\theta_1(x_0) + t_2\theta_2(x_0) + \dots + t_n\theta_n(x_0),$$
$$\frac{dx_0}{du_0} = \frac{\Delta(x_0)}{\mathrm{D}},$$

et il est bien aisé de voir qu'en différentiant par rapport à u_1, u_2,... u_n, on aurait d'une manière semblable :

$$\frac{dx_0}{du_1} = \frac{t_1\Delta(x_0)}{\mathrm{D}}, \quad \frac{dx_0}{du_2} = \frac{t_2\Delta(x_0)}{\mathrm{D}} \dots\dots \quad \frac{dx_0}{du_n} = \frac{t_n\Delta(x_0)}{\mathrm{D}}.$$

Ces formules font d'abord voir comment le radical $\Delta(x_0)$ s'exprime rationnellement par l'une quelconque des dérivées partielles de x_0 et les fonctions $x_0, x_1, \ldots, x_n$; mais en ajoutant les équations précédentes, après les avoir multipliées, la première par $\theta_0(x_0)$, la seconde par $\theta_1(x_0)$, et ainsi de suite, on obtient cette expression plus simple :

$$\Delta(x_0) = \theta_0(x_0)\frac{dx_0}{du_0} + \theta_1(x_0)\frac{dx_0}{du_1} + \ldots + \theta_n(x_0)\frac{dx_0}{du_n},$$

et il est clair qu'on aurait de même

$$\Delta(x_1) = \theta_0(x_1)\frac{dx_1}{du_0} + \theta_1(x_1)\frac{dx_1}{du_1} + \ldots + \theta_n(x_1)\frac{dx_1}{du_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta(x_n) = \theta_0(x_n)\frac{dx_n}{du_0} + \theta_1(x_n)\frac{dx_n}{du_1} + \ldots + \theta_n(x_n)\frac{dx_n}{du_n}.$$

Les propriétés relatives à la périodicité des fonctions λ sont comprises dans le théorème suivant.

Soit

$$i_1^{(k)} = 2\int_0^1 \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)}, \quad i_2^{(k)} = 2\int_1^{\frac{1}{p_1}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)}, \quad i_3^{(k)} = 2\int_{\frac{1}{p_1}}^{\frac{1}{p_2}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)}, \ldots\ldots\ldots \quad i_{2n-2}^{(k)} = 2\int_{\frac{1}{p_{2n-3}}}^{\frac{1}{p_{2n-2}}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)}$$

et

$$I^{(k)} = m_1 i_1^{(k)} + m_2 i_2^{(k)} + m_3 i_3^{(k)} + \ldots + m_{2n+1} i_{2n+1}^{(k)},$$

quels que soient les entiers m_1, m_2, etc. on aura

$$\lambda_0(u_0 + I^{(0)}, u_1 + I^{(1)}, \ldots u_n + I^{(n)}) = \lambda_0(u_0, u_1, \ldots u_n)$$
$$\lambda_1(u_0 + I^{(0)}, u_1 + I^{(1)}, \ldots u_n + I^{(n)}) = \lambda_1(u_0, u_1, \ldots u_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_n(u_0 + I^{(0)}, u_1 + I^{(1)}, \ldots u_n + I^{(n)}) = \lambda_n(u_0, u_1, \ldots u_n).$$

Parmi les $2n+2$, indices de périodicité, $n+1$ seront réels, savoir :

$$2i_1, \; 2i_3, \ldots \; 2i_{2n+1},$$

et les autres imaginaires, et de la forme $a\sqrt{-1}$, où a est réel. Ainsi, pour le cas de $n=1$, on trouverait les indices

$$2\int_0^1 \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\quad 2\int_1^{\frac{1}{p^2_1}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\quad 2\int_{\frac{1}{p^2_1}}^{\frac{1}{p^2_2}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},\quad 2\int_{\frac{1}{p^2_2}}^{\frac{1}{p^2_3}} \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)},$$

k étant o ou 1, et ils se ramènent à ceux de M. Jacobi par ces équations :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_{\frac{1}{p^2_3}}^{\frac{1}{p^2_2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} = \int_1^{\frac{1}{p^2_1}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)},$$

$$\int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_{\frac{1}{p^2_3}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)} = \int_{\frac{1}{p^2_1}}^{\frac{1}{p^2_2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)}.$$

Enfin, la propriété fondamentale des fonctions λ, et qui est relative à l'addition des arguments, consiste en ce que les quantités

$$\lambda_0(u_0+v_1,\ u_1+v_1,\ldots\ u_n+v_n),\ \lambda_1(u_0+v_0,\ u_1+v_1,\ldots\ u_n+v_n),\ldots.\ \lambda_n(u_0+v_0,\ u_1+v_1,\ldots\ u_n+v_n)$$

sont les racines d'une équation de degré $n+1$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de

$$\begin{array}{c}
\lambda_0(u_0,\ u_1,\ldots\ u_n),\quad \lambda_1(u_0,\ u_1,\ldots\ u_n),\ldots.\quad \lambda_n(u_0,\ u_1,\ldots\ u_n)\\
\Delta(\lambda_0(u_0,\ u_1,\ldots\ u_n)),\ \Delta(\lambda_1(u_0,\ u_1,\ldots\ u_n)),\ldots.\ \Delta(\lambda_n(u_0,\ u_1,\ldots\ u_n))\\
\lambda_0(v_0,\ v_1,\ldots\ v_n),\quad \lambda_1(v_0,\ v_1,\ldots\ v_n),\ldots\quad \lambda_n(v_0,\ v_1,\ldots.\ v_n)\\
\Delta(\lambda_0(v_0,\ v_1,\ldots\ v_n)),\ \Delta(\lambda_1(v_0,\ v_1,\ldots\ v_n)),\ldots.\ \Delta(\lambda_n(v_0,\ v_1,\ldots.\ v_n))
\end{array}$$

NIDIFICATION

DES ÉPINOCHES ET DES ÉPINOCHETTES;

PAR M. COSTE,

PROFESSEUR AU COLLÉGE ROYAL DE FRANCE.

(PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 18 MAI 1846.)

CONSTRUCTION DU NID.

J'ai placé au Collége de France, dans des bassins circulaires de deux mètres environ de diamètre et de trente-trois centimètres de profondeur, où j'avais réuni toutes les conditions matérielles qui m'avaient paru propres au succès de mes expériences, un grand nombre d'Épinoches mâles et femelles pris au moment où la ponte allait s'accomplir. Peu de jours après leur transport dans cette nouvelle habitation, j'ai vu certains mâles choisir pour séjour permanent un point déterminé du fond du bassin, et y déployer une grande activité. Je me suis mis alors en observation pour découvrir quel pouvait être le but de toutes ces manœuvres et de ce retour constant vers le même lieu; je n'ai pas tardé à reconnaître que l'unique occupation de chacun d'eux consistait à recueillir les matériaux d'une construction à l'organisation de laquelle il consacrait toutes les ressources de son industrie; et, en suivant avec une attention soutenue les rapides progrès de sa laborieuse entreprise, j'ai assisté au plus curieux spectacle qu'il soit possible de contempler.

J'ai vu chacun des mâles qui se livrent à ce travail entasser, dans le lieu de son choix, des brins d'herbe de toute nature qu'il va sou-

vent chercher au loin, et à l'aide desquels il commence à former une sorte de tapis; mais, comme les matériaux qui constituent cette première partie de son édifice pourraient être entraînés par les mouvements ou oscillations de l'eau, il a la prévoyance d'aller prendre du sable, dont il remplit sa bouche, et qu'il vient déposer sur le nid pour le contraindre à rester en place. Puis, pour donner à tous ces éléments réunis une cohésion qui les tienne enchaînés les uns aux autres, il applique sur eux sa face ventrale, glisse lentement, comme par une sorte de reptation vibratoire, en essuyant ainsi le mucus qui suinte de sa peau. Il résulte de là que les premiers matériaux assemblés forment une espèce de fondement ou de plancher solide sur lequel pourra s'élever désormais le reste de l'édifice, dont il poursuit l'exécution avec persévérance et avec une agitation fébrile. Pour s'assurer si toutes les parties sont suffisamment unies, il agite avec une extrême rapidité ses nageoires pectorales, de manière à produire des courants qu'il dirige contre le nid, et s'il s'aperçoit que des brins d'herbe s'ébranlent, il les enfonce avec son museau, les tasse, les plane et les englue de nouveau.

Quand les choses en sont venues à ce point, il choisit des matériaux plus solides. On le voit prendre tantôt des racines, tantôt des pailles, qu'il saisit toujours avec la bouche et qu'il vient ficher dans l'épaisseur ou placer à la surface de sa première construction; si, pendant qu'il fait ainsi effort pour les introduire, il juge que la position qu'il leur donne ne remplit pas suffisamment le but, il les retire, les saisit par un autre point de leur longueur, les retourne, les pousse, les enfonce davantage jusqu'à ce qu'il trouve qu'il en a fait le meilleur usage possible. Quelquefois cependant, malgré tous ses soins, il y a des parties qui, à cause même de leur configuration, ne peuvent entrer dans le plan général de l'édifice; alors il les retire, les emporte loin du nid, les abandonne et va en choisir d'autres pour les remplacer. Il finit ainsi par se creuser un lit solide, dont il a toujours la précaution de lier les divers éléments au moyen de la matière visqueuse dont il les englue.

Mais les tiges, les racines ou les pailles dont il double la cavité de la petite fosse qu'à ce degré de construction son nid représente, sont toujours placées dans une direction constante : il les pose toutes dans le sens longitudinal, c'est-à-dire de manière à ce que l'une de leurs extrémités correspondra plus tard à l'entrée, et l'autre à la sortie de son domicile. Cette organisation a probablement un double but, celui d'obtenir la consolidation de la paroi intérieure du nid, et celui d'en éviter la destruction au moment de la ponte ou de la fécondation; car si, à cette époque, le mâle et la femelle, au lieu de rencontrer des matériaux disposés dans le sens de la direction qu'ils suivent pour traverser ce nid, trouvaient au contraire des espèces de brides transversales qui leur feraient obstacle, il en résulterait souvent qu'en cherchant à se dégager, ils entraîneraient avec ces dernières l'établissement auquel elles seraient solidement liées.

Lorsqu'il est ainsi parvenu à construire le plancher et les parois latérales de son édifice, il s'occupe alors d'en organiser la toiture. Pour cela, il continue à y apporter des matériaux semblables à ceux dont il s'est servi pour en jeter les fondements; mais, tout en poursuivant l'accomplissement de son entreprise avec l'ardeur croissante de sa laborieuse activité, il travaille sans cesse à en obtenir la consolidation, et, pour la lui donner, se livre sans relâche à la manœuvre fatigante de la reptation vibratoire, à l'aide de laquelle, comme nous l'avons déjà dit, il agglutine les divers éléments dont son nid se compose. Cependant, à mesure qu'il s'applique à consolider son établissement, il faut qu'il le dispose convenablement pour l'usage auquel il le destine : aussi ne manque-t-il jamais de réserver une ouverture, très-nettement et très-régulièrement circonscrite, par laquelle il plonge souvent sa tête et même une grande partie de son corps, afin d'en écarter les parois, et de maintenir la cavité intérieure du nid assez dilatée pour que la femelle puisse s'y engager et pondre les œufs, dont il deviendra le courageux et infatigable protecteur.

Le bord circulaire de cette ouverture est bâti avec le plus grand

soin et la plus grande régularité : pas un brin d'herbe n'y dépasse l'autre et ne vient en obstruer le passage; toutes les précautions sont prises pour en adoucir l'entrée; il l'englue avec une remarquable patience, rampe obliquement sur son bord, et, en suivant son contour de manière à contraindre les herbes qui le forment à se courber en anneau, il garnit d'un glacis velouté le passage qu'elles circonscrivent.

Le nid, ainsi constitué, forme une voûte arrondie de dix centimètres environ de diamètre, qui apparaît au fond du bassin comme un petit soulèvement circulaire. A l'époque des amours, on voit, dans les ruisseaux habités par les Épinoches, un si grand nombre de ces espèces de monticules, qu'on a de la peine à comprendre que la nidification de ces animaux ne soit pas un fait depuis longtemps vulgaire. Chacune de ces voûtes, dont les parois sont aussi habilement construites que celles du nid de l'hirondelle, offre, comme nous venons de le dire, sur un point de sa circonférence, une ouverture qui conduit dans la cavité préparée pour recevoir les œufs; mais cette ouverture ne restera pas longtemps la seule dont le nid soit pourvu ; car bientôt il en sera pratiqué une seconde dans le point diamétralement opposé à celui où se trouve la première.

Ordinairement, c'est la femelle qui, en s'élançant hors du nid après la ponte, perfore la paroi opposée pour se frayer un passage; mais il y a des cas où le mâle se charge de ce soin. Il entre par la première ouverture, traverse le nid de part en part, et, pendant qu'il exécute cette manœuvre, on le voit mesurer l'étendue de ses mouvements au degré d'élasticité de son établissement, et ne lui imprimer que des secousses qui ne peuvent en compromettre la solidité. On dirait qu'il veut s'assurer si sa construction pourra résister aux ébranlements que le passage de la femelle va lui faire subir, car il imite tous les mouvements de cette dernière et prend une allure bien différente de celle qu'il aura lorsqu'il viendra féconder les œufs.

Chez les Épinochettes, c'est toujours le mâle qui pratique les

deux ouvertures, comme on va le voir dans l'exposé rapide du mode particulier de nidification qui caractérise cette espèce.

Pendant que toutes les espèces d'Épinoches construisent leurs nids sur la vase, à plate terre et dans des endroits où il est facile de les apercevoir, les Épinochettes, au contraire, les suspendent aux feuilles ou aux branches des végétaux qui sont à leur portée, et les cachent bien davantage. Le mâle va chercher avec sa bouche une quantité suffisante de conferves, les entasse dans le lieu dont il a fait choix, les lie aux points qui doivent leur servir de support, et, quand ces matériaux assemblés forment une masse suffisante, il plonge son corps dans leur épaisseur et s'en enveloppe comme d'une gaîne; puis, il traverse lentement cette gaîne en exécutant sur son grand axe un mouvement de rotation saccadée, et, à mesure qu'il accomplit cette révolution, les conferves qui l'enveloppent, engluées par le frottement de son corps, s'enroulent autour de lui en fibres circulaires, et le nid prend ainsi la forme d'un manchon. Il est probable que cette disposition en fibres annelées est produite par la nombreuse rangée d'épines qui, en s'érigeant le long du dos de l'animal, agissent circulairement sur les tiges ou les rameaux des conferves, comme les dents des machines dont on se sert pour carder la laine ou le crin. Il recommence cette manœuvre autant de fois que cela lui paraît nécessaire pour la confection régulière de son nid et l'affermissement des matériaux qui en forment les parois, et va ensuite chercher les femelles pour les faire pondre.

On a toujours admiré la merveilleuse industrie avec laquelle certains oiseaux construisent l'édifice qui doit recevoir les œufs; on a souvent parlé de l'intelligence dont la mésange à longue queue fait preuve en ménageant à son nid deux ouvertures opposées qui lui permettent d'y entrer et d'en sortir librement sans qu'elle soit obligée de se retourner, ce qu'elle n'aurait pu faire aisément à cause de sa longue queue. C'est avec raison qu'on a vu dans ce fait le résultat d'un acte de prévoyance. Les Épinoches et les Épinochettes ne nous paraissent ni moins industrieuses ni

moins intelligentes que l'oiseau dont il est question; car nous les voyons, guidées par le même instinct de prévoyance, agir à peu près en vue du même résultat, celui de pouvoir sortir de leur nid sans en altérer la construction, chose nécessairement impossible eu égard à leur organisation, si ce nid n'avait eu qu'une seule ouverture. Mais ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que, de même que la mésange à longue queue, lorsque ses petits sont éclos, bouche l'issue désormais inutile de l'édifice qui les abrite, et où elle ne doit plus pénétrer; de même les Épinoches mâles, lorsque leur nid est pourvu d'une suffisante quantité d'œufs, ou que leur pouvoir fécondateur s'est éteint, se hâtent d'obstruer celle des deux ouvertures qui servait de sortie.

DE LA PONTE.

Lorsque la construction du nid est assez avancée pour recevoir les œufs, le mâle s'élance, plein d'agitation, au milieu du groupe des femelles, pour y fixer l'attention de celle qui est disposée à pondre, et lui offrir un asile pour sa progéniture. Celle-ci peut facilement le distinguer des mâles ordinaires, car il porte maintenant la riche livrée des amours et se pare des plus vives couleurs. Ses joues et sa face ventrale ont perdu leur blancheur habituelle pour se couvrir d'une couleur de feu, d'un orangé vif ou d'un rouge aurore; son dos, ordinairement grisâtre, passe tour à tour par toutes les nuances du vert, du bleu, de l'argent, exprimant ainsi, à la faveur de cette mobilité surprenante, l'aptitude et le besoin de consommer l'acte de la génération. Aussi, dès que la femelle aperçoit le mâle qui s'avance, elle s'empresse, le recherche, glisse sur son dos, et par une série de petits manéges coquets, d'agaceries réciproques, semble lui indiquer qu'elle est prête à le suivre. Alors le mâle, averti par les signes animés de ce mystérieux langage, se précipite vers son nid comme pour lui en indiquer le chemin, plonge sa tête dans son ouverture béante, l'élargit vivement pour lui en faciliter l'entrée, cède

ensuite la place à la femelle, qui, en y pénétrant, semble obéir à son invitation. Elle s'y engage tout entière et ne laisse plus voir à l'extérieur que l'extrémité de sa queue, qui fait saillie à travers l'ouverture par laquelle elle s'est introduite; elle y reste pendant deux ou trois minutes, durant lesquelles ses mouvements convulsifs indiquent tous les efforts qu'elle fait pour pondre les œufs; puis elle s'élance, pâle et décolorée, après avoir percé le nid de part en part; en sorte que ce nid, qui souvent n'a qu'une seule ouverture avant le passage de la femelle, en a toujours deux après la ponte.

Pendant que la femelle occupe le nid, y dépose les œufs, le mâle, dont la coloration mobile, les mouvements animés, expriment l'agitation croissante, paraît en proie à une sorte de paroxysme, et semble vouloir hâter le moment où il pourra pénétrer à son tour. Il assiste la femelle, la frotte avec son museau, comme pour l'encourager, et, dès qu'elle a accompli la douloureuse fonction de la ponte, il entre par la même voie qu'elle a suivie, glisse sur les œufs en frétillant, et sort presque aussitôt pour réparer les désordres de son établissement. Mais ce nid, dont la construction lui a coûté tant de fatigues, n'est pas seulement destiné à recevoir les œufs d'une seule ponte; il peut en contenir une bien plus grande quantité. Le mâle y attire donc successivement et à diverses reprises, pendant plusieurs jours, ou la même femelle, ou toutes celles qui consentent à le suivre, et consacre, en général, une fécondation spéciale à la progéniture de chacune d'elles; en sorte que son nid finit par devenir un riche magasin, où les œufs de chaque ponte particulière sont agglomérés en masses distinctes, et où toutes ces masses entassées forment un bloc énorme.

La faculté qu'a chaque femelle de pondre plusieurs fois et à des intervalles plus ou moins variables, explique pourquoi ces animaux sont susceptibles de se multiplier d'une manière si prodigieuse, et l'on n'est plus surpris, lorsqu'on connaît toutes les ressources de cette étonnante fécondité, qu'ils puissent pulluler

en assez grande abondance, dans certaines localités, pour y devenir un moyen d'engraisser la terre. Il n'est pas rare que, dans un seul nid, la somme de toutes les pontes qui s'y sont effectuées donne un total de mille à deux mille œufs, et l'on conçoit facilement que ce chiffre puisse s'élever bien davantage, puisque les habitudes de polygamie donnent à chaque mâle la possibilité de féconder la progéniture d'un nombre pour ainsi dire illimité de femelles.

Pennant raconte que, dans les marais du comté de Lincoln, ces poissons se montrent de temps en temps en quantités surprenantes, et remontent en colonnes épaisses la rivière de Welland : il y en a tant, qu'on en répand sur les terres pour les fertiliser. Ces apparitions subites et innombrables ont fait croire que des inondations successives enlèvent les Épinoches de la surface de tous les marais pour les accumuler dans des cavités souterraines, d'où elles sortiraient ensuite quand leur nombre deviendrait excessif; mais je viens de donner une explication si simple de ce phénomène, qu'il est impossible de ne pas l'accepter comme une solution définitive.

SOINS DONNÉS AUX ŒUFS.

Le mâle reste l'unique gardien de ce précieux dépôt, car non-seulement les femelles n'en prennent aucun soin, mais elles en deviennent les ennemies redoutables, font partie des coalitions nombreuses qui cherchent à envahir le nid pour le livrer au pillage et satisfaire sur les œufs leur appétit féroce. C'est donc pour lui une rude et difficile tâche que celle de les défendre contre les tentatives répétées de ces pirates affamés ou gourmands, alors surtout que, pendant un mois tout entier, il sera obligé de fournir aux œufs qu'il protége toutes les conditions nécessaires pour en favoriser l'éclosion, ou de veiller à l'éducation de sa nombreuse famille; mais il n'y a pas d'obstacle qui puisse le détourner de son but ou affaiblir son courage. Il commence d'abord par

fortifier son nid en le recouvrant de pierres, dont le volume est quelquefois égal à la moitié de son corps, et qu'on ne le croirait pas capable de transporter si on ne le voyait à l'œuvre. Il ferme la sortie de son nid et n'en conserve que l'entrée ouverte, à travers laquelle il est presque toujours occupé à faire passer des courants par le rapide mouvement de ses nageoires pectorales. Ces courants ont probablement pour but, en lavant sans cesse les œufs, d'empêcher que des byssus ne se forment sur eux et n'en arrêtent le développement; car ils périssent presque tous dès qu'on les soustrait à cette influence salutaire. Les mouvements que le mâle exécute pour obtenir ce résultat ne peuvent être confondus avec aucun de ceux auxquels il se livre dans d'autres circonstances; ils sont complétement caractéristiques de l'acte qu'il accomplit en ce moment. Après avoir placé le grand axe de son corps dans le prolongement de l'ouverture du nid, il rapproche assez sa tête de cette ouverture pour que l'extrémité de son museau en atteigne l'entrée, pousse ensuite ses deux nageoires pectorales d'arrière en avant, et dirige si visiblement l'eau sur les œufs, qu'il est impossible de supposer que cette manœuvre, répétée avec une incroyable persévérance, puisse avoir une autre destination.

Pendant que le mâle est ainsi occupé à faire pondre les femelles, à soigner leurs œufs, à murer son nid pour mettre ces derniers à l'abri, il chasse rudement toutes les Épinoches qui tentent de s'en approcher, les frappe avec son museau, les menace de ses aiguillons, et, tant que le nombre des assaillants ne s'élève pas au delà de quatre ou cinq, il réussit toujours à les repousser par la force; mais il y a des moments où l'ennemi devient si formidable que toute résistance est inutile, et, quoique dans ces cas il ne lui soit plus permis de se défendre, il ne renonce pas pour cela à l'espoir de conjurer l'orage. Il a alors recours à la ruse, s'éloigne de son nid en exagérant les mouvements saccadés auxquels il se livre, prend toutes les allures d'un poisson qui poursuit une proie, et cherche ainsi à opérer une diversion.

Ce stratagème lui réussit souvent; car les Épinoches, entraînées par l'espoir de lui ravir sa proie, se dispersent sans consommer l'acte de spoliation qu'elles se préparaient à accomplir contre les œufs objet de leur convoitise. Mais cet artifice ne réussit pas toujours à préserver son nid du pillage. J'ai vu des individus obligés de le recommencer cinq ou six fois de suite, et ce nid subir toujours le même sort.

Le merveilleux instinct qui porte le mâle protecteur à tromper l'ennemi, quand il désespère de le vaincre, est une faculté du même ordre que celle qui inspire aux femelles d'un grand nombre d'oiseaux ces ruses si bien combinées à l'aide desquelles on les voit entraîner le chasseur loin du lieu où elles couvent leurs œufs, où elles élèvent leurs petits. Tout le monde sait que la perdrix, par exemple, lorsqu'elle est surprise, traîne pesamment son aile comme un oiseau blessé, et que, laissant ainsi à l'ennemi qu'elle redoute l'espoir de l'atteindre, elle l'entraîne à sa poursuite et donne à ses petits le temps de se cacher ou de fuir. Il est rare que des faits semblables ne se présentent pas à l'observation des personnes qui habitent la campagne, et, pour ma part, je n'ai jamais oublié les détails intéressants d'une petite aventure dans laquelle une femelle couveuse joua si habilement son rôle, que je fus bien complétement dupe de son artifice. Je traversais, en 1841, une terre moissonnée des environs de Nice, lorsque je vis tout à coup une alouette rouler à mes pieds et se traîner péniblement comme si elle n'avait pas la force de s'éloigner. Mon premier mouvement fut de me baisser pour la prendre; mais, au moment où je croyais la saisir, elle fit un nouvel effort et parut ne réussir qu'avec peine à se traîner un peu plus loin. Elle m'attira ainsi successivement jusqu'en un champ voisin, et lorsqu'elle jugea qu'elle m'avait assez détourné de son nid pour m'en faire perdre la trace, elle s'élança, joyeuse et légère, en célébrant par ses cris le succès de sa ruse. Il est évident qu'il y a dans tous ces actes, comme dans ceux auxquels les Épinoches se livrent, un véritable calcul, et qu'ici l'instinct s'élève jusqu'à la hauteur de l'in-

telligence. Mais je n'ai pas le projet de traiter une semblable question, et je reviens aux combats des Épinoches.

Ce n'est point avec les Épinoches ordinaires qu'ont lieu les combats les plus acharnés, car une attaque un peu vive suffit ordinairement pour les mettre en fuite; mais quand les rencontres ont lieu entre des mâles voisins, occupés tous deux à soigner les œufs confiés à leur garde, alors des luttes terribles peuvent s'engager. Les deux adversaires, animés d'une égale fureur, se précipitent l'un contre l'autre, mettent le même acharnement à ne point laisser envahir leur territoire, se poursuivent en tournoyant rapidement, se mordent ou s'efforcent de se percer avec leurs aiguillons. Le changement et la mobilité de leurs couleurs expriment l'ardeur croissante de la passion qui les agite. On les voit ainsi, le plus souvent, s'épuiser en efforts inutiles et revenir ensuite, accablés de fatigue, reprendre chacun leur fonction auprès du nid qu'ils avaient passagèrement abandonné; d'autres fois, le vaincu n'échappe aux coups de son adversaire qu'en allant se cacher dans l'herbe pour les éviter. Il est des cas cependant où la lutte se termine d'une manière beaucoup plus tragique, car l'un des champions, traversé par l'aiguillon du vainqueur, peut périr victime dans ce combat à outrance; mais c'est là une rare exception. Presque toujours les deux adversaires regagnent paisiblement leur demeure et finissent par se tolérer réciproquement. On voit même que dans les ruisseaux, lorsque les nids sont très-rapprochés, chaque mâle protecteur se contente, quand il est assailli par son voisin, de se coucher sur le flanc, en étendant son aiguillon comme pour exprimer qu'il exerce ses fonctions, et l'assaillant se retire après l'avoir reconnu.

ÉDUCATION DES PETITS.

Lorsque, par les soins assidus de sa courageuse persévérance, le mâle réussit à conserver son nid jusqu'aux approches de l'é-

closion, on le voit redoubler de zèle, ôter les pierres pour le rendre plus perméable à l'eau, pratiquer de nouvelles ouvertures, multiplier les courants, remuer les œufs, les amener tantôt à la surface, tantôt au fond, et leur fournir ainsi, en variant leur position, les conditions qui conviennent à cette période de leur développement.

Enfin, quand, au bout de dix ou douze jours de fatigue et de soins, les petits sont éclos, il est encore nécessaire qu'il les protége pendant assez longtemps, car, s'il les abandonnait, ils ne tarderaient pas à devenir la proie de leurs ennemis. Ils naissent, en effet, avec une vésicule ombilicale si volumineuse, que c'est à peine s'ils peuvent en supporter le poids, et leur marche, si je puis ainsi parler, en est tellement embarrassée, qu'ils sont incapables de fuir le danger qui les menace. Il faut donc que la sollicitude paternelle devienne pour eux une barrière qui les préserve de toutes les invasions.

Le mâle protecteur se dévoue à cette nouvelle fonction et la remplit avec une vigilance minutieuse. Il ne permet à aucun des nouveau-nés de franchir les limites de son nid : si quelqu'un s'en écarte, il le prend aussitôt dans sa bouche et le reporte immédiatement à son domicile; quand le nombre des déserteurs augmente, il en saisit plusieurs à la fois sans jamais en blesser aucun; la poule n'élève pas ses poussins avec une sollicitude plus intelligente. Mais à mesure que sa nombreuse famille se développe, et que les petits deviennent plus agiles, il leur faut un plus grand espace pour s'exercer, et alors le mâle les laisse se répandre sur un territoire plus étendu. Cette augmentation de liberté lui impose une surveillance encore plus active; il est obligé de veiller à la fois à la sécurité de tous et d'être présent partout. On le voit donc sans cesse aller et venir comme ces chiens de berger qui tournent autour des troupeaux, ramènent les brebis qui s'égarent, et sont toujours prêts à les défendre contre les attaques dont elles peuvent être l'objet.

L'exercice de cette dernière fonction ne dure pas moins de

quinze à vingt jours, et comme au bout de ce temps tous ses élèves sont devenus assez forts pour suffire aux besoins de leur propre conservation, le mâle protecteur les abandonne pour aller reprendre ses habitudes au milieu des autres Épinoches qui habitent le bassin ou le ruisseau; mais, chose surprenante, cet animal, qui, pendant toutes les autres saisons de l'année, se fait remarquer par sa voracité, vit dans une abstinence presque complète durant tout le temps qu'il consacre à construire son nid, à soigner les œufs, à élever ses petits.

CONCLUSIONS.

Nous déduirons des faits que nous venons d'exposer les considérations générales suivantes :

1° L'histoire de la reproduction de certains poissons dénote chez ces animaux un degré d'intelligence plus étendu que celui qu'on leur accorde généralement.

2° Il est probable que, dans cette classe, les espèces signalées ne sont pas les seules qui construisent un vrai nid propre à recevoir ou à mettre à couvert le produit de la femelle : des observations ultérieures conduiront bientôt, nous en sommes convaincu, à la découverte de faits analogues.

3° Contrairement à ce qu'on observe chez les autres animaux du type des vertébrés, ce ne sont plus les femelles, mais les mâles seuls, qui élèvent l'édifice où seront déposés les œufs : c'est ce qui résulte d'une manière certaine des observations faites sur les Gobies, les Épinoches, les Épinochettes, et ce qui est extrêmement probable pour toutes les autres espèces qui font des nids.

4° C'est également au mâle seul qu'est dévolu le soin de veiller sur les œufs pondus et de protéger les petits pendant quelque temps après l'éclosion.

5° L'époque des amours détermine chez les mâles des poissons qui ont pour habitude de nicher, un changement de couleur, total ou partiel, fort analogue à celui que présentent un très-grand

nombre d'oiseaux au temps des pontes, et certains mammifères au moment du rut.

6° Pour ce qui concerne particulièrement les espèces que l'on rassemble sous la dénomination générique de *Gasterosteus*, les Épinochettes (fait qui n'avait point encore été indiqué) font un nid comme les Épinoches; mais, tandis que ces dernières l'établissent invariablement sur le sol et à découvert, les Épinochettes, au contraire, le cachent avec soin et le fixent toujours aux herbes ou aux feuilles des plantes aquatiques : différence caractéristique qui paraît justifier la séparation qu'on a faite de ces poissons en deux genres (*Gasterosteus* et *Pungitius*).

7° Les Épinoches ne sont point monogames, comme on l'a avancé; elles sont, au contraire, ainsi que les Épinochettes, essentiellement polygames, les mâles fécondant successivement et indifféremment les œufs de plusieurs femelles.

8° Enfin, les Épinoches et les Épinochettes femelles font plusieurs pontes dans la même saison et à très-peu d'intervalle l'une de l'autre; leur fécondité est donc bien plus grande qu'on ne l'a dit jusqu'ici.

D'un autre côté, on trouve des nids depuis mars jusqu'en août.

Ces deux faits rapprochés expliquent la multiplication inouïe de ces poissons.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Fig. 1. Épinoche mâle jetant les premiers fondements de son nid.

Fig. 2. Épinoche mâle assistant une femelle au moment de la ponte.

Fig. 3. Épinoche mâle indiquant à une femelle, disposée à pondre, l'entrée de son nid, dont il cherche à agrandir l'ouverture.

Fig. 4. Épinoche mâle gardant son nid et produisant des courants au moyen de ses nageoires pectorales.

Fig. 5. Épinochette mâle exécutant dans son nid un mouvement de rotation sur son axe, de façon à en disposer circulairement les matériaux.

Fig. 6. Épinochette femelle disposée à pénétrer dans le nid pour y déposer ses œufs.

Nota. Dans les quatre premières figures sont en même temps indiqués les divers états de coloration par lesquels passe le mâle à l'époque des amours.

SUR

LES TERRAINS TERTIAIRES

DU NORD-OUEST DE L'ITALIE;

PAR H. DE COLLEGNO,

ANCIEN CAPITAINE D'ARTILLERIE.

(PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 11 JUIN 1838 [1].)

Depuis que la Description des environs de Paris a appelé l'attention des géologues sur les dépôts de sédiment postérieurs à la craie, ces dépôts, que l'on a compris sous la dénomination générale de *terrains tertiaires*, ont été l'objet d'un grand nombre de travaux dont l'ouvrage classique de MM. Brongniart et Cuvier était le point de départ. On avait pensé d'abord que les divers terrains tertiaires devaient tous rentrer dans le cadre tracé par ces auteurs; et ce ne fut que lorsque des faits bien évidents eurent prouvé qu'il existait sur différents points de la France et de l'Europe, en général, des terrains postérieurs à ceux des environs de Paris, que l'on admit que la série des terrains tertiaires n'était pas complète dans le bassin qui entoure cette capitale.

Quelques années après la publication de la Description des environs de Paris, la Conchyliologie subapennine de Brocchi prouva que la moitié environ des coquilles fossiles des terrains subapennins ont leurs analogues dans les espèces vivantes, tandis que

[1] Voyez *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. VI, p. 819.

l'on ne trouve guère à Paris que trois espèces sur cent identiques avec celles qui vivent dans les mers actuelles. Plus tard, M. le professeur Bonelli reconnut que les fossiles des environs immédiats de Turin formaient un groupe distinct, qu'il fallait séparer de ceux des collines subapennines, publiés par Brocchi. Ces différents travaux décidèrent la division des terrains tertiaires, adoptée par M. Lyell, tandis que M. Deshayes arrivait, par la seule inspection des coquilles de sa riche collection, à une division presque entièrement correspondante à celle du géologue anglais.

D'un autre côté, les ingénieurs des mines chargés, sous la direction de M. Brochant de Villiers, des travaux de la carte géologique de France ont distingué trois étages de terrains tertiaires, séparés entre eux par des discordances générales qui indiquent entre l'un et l'autre de ces étages une interruption dans la suite régulière de la sédimentation. On n'a qu'à comparer la Carte géologique de la France avec les Tables indiquant la distribution des coquilles fossiles tertiaires de M. Deshayes, pour voir combien les groupes *Pliocène*, *Miocène* et *Éocène* de M. Lyell, fondés exclusivement sur des caractères zoologiques, correspondent aux trois étages tertiaires reconnus en France par les ingénieurs des mines.

Deux de ces étages paraissent exister seuls dans le sud-est de la France; il est fort difficile, du moins, d'admettre comme tertiaires les calcaires à nummulites des Alpes, lorsqu'on a examiné sur place les relations de gisement des couches qui renferment ces fossiles. Mais, outre ces calcaires, il existe au pied des Alpes deux étages tertiaires bien distincts, qui s'étendent depuis la Suisse jusqu'à la Méditerranée. M. Élie de Beaumont a montré, dans ses Recherches sur les révolutions du globe [1], comment les caractères géologiques et paléontologiques de ces deux terrains s'accordent pour les faire rapporter à deux formations entièrement distinctes l'une de l'autre.

Les mêmes terrains tertiaires se retrouvent sur le revers op-

[1] *Annales des sciences naturelles*, tom. XVIII et XIX.

posé des Alpes, mais avec des caractères un peu différents de ceux qu'ils présentent dans le sud-est de la France. Ainsi, au lieu des dépôts lacustres de la Bresse et du Dauphiné, l'étage tertiaire supérieur est représenté le long des Apennins par des marnes bleues et des sables calcaires marins, dont les fossiles nombreux ont donné lieu à l'ouvrage de Brocchi que j'ai cité plus haut. J'ai dit aussi que les observations de M. Bonelli avaient amené une distinction paléontologique entre deux groupes des terrains tertiaires d'Italie: cette distinction, adoptée d'abord par MM. Lyell et Deshayes, est admise aujourd'hui par la plupart des géologues; mais personne, que je sache, ne s'est occupé encore de mettre en rapport la différence de fossiles que présentent les deux dépôts tertiaires du nord-ouest de l'Italie avec les caractères purement géologiques de ces terrains. Je vais essayer de remplir cette lacune et de prouver que les interruptions dans la série des dépôts supérieurs à la craie ont été tout aussi marquées sur le revers méridional des Alpes, qu'elles le sont dans le sud-est de la France. Pour cela, je prendrai pour types les deux localités dans lesquelles j'ai pu le mieux étudier les relations des étages tertiaires, et je chercherai à rapporter à ces deux localités les circonstances générales de gisement des terrains supracrétacés du nord-ouest de l'Italie.

CHAPITRE PREMIER.

COLLINES DE SUPERGA ET PLAINES DE L'ASTESAN.

La grande plaine de Lombardie et du Piémont est bornée au sud et au nord par des collines qui forment comme des terrasses avancées au pied des Alpes et des Apennins. Les argiles de la Fola, près de Vasèse, comparées aux marnes subapennines de Voghère et de Tortone, prouvent suffisamment l'identité générale des terrains de ces diverses localités, situées autour de l'extrémité occidentale du grand bassin du Pô. M. Lyell a donné les

caractères géologiques des couches qui, dans la vallée de la Bormida, supportent les marnes subapennines[1]. Les mêmes couches sont parfaitement développées auprès de Turin, et les vallons escarpés des collines de Superga permettent d'y étudier mieux que partout ailleurs les caractères des terrains qui, à Varèse, au Carcare, à Spigno, etc. s'appuient sur les pentes des Alpes et des Apennins.

M. Al. Brongniart a donné, dans son Essai sur les terrains du Vicentin, une coupe de la pente septentrionale de la colline de Superga. Si, depuis le sanctuaire qui est au sommet, on continue au sud-est vers Baldichieri (voir la planche II à la fin de ce Mémoire), perpendiculairement presque au plan des couches qui sont dirigées de l'est 35° N. à l'ouest 35° S., on se trouve pendant quelque temps sur les tranches de couches de poudingues à gros blocs de serpentine, dont le ciment a souvent été désagrégé de manière à laisser en place les blocs les plus volumineux, tandis que les graviers et les blocs de moindres dimensions ont été entraînés par les eaux, et se sont arrêtés çà et là dans les anfractuosités des pentes des collines[2]. Au-dessous des blocs désagrégés, on reconnaît, au sud-est du sanctuaire, des couches de poudingue plongeant vers le Pô, tandis qu'à dix minutes de là les couches plongent vers les plaines de l'Astesan. Ce nouveau plongement continue jusqu'à la limite de la formation de mollasse, qui est recouverte, au nord-ouest de Baldichieri, par des couches d'une époque postérieure. Au sud-est de Superga, les couches dont on coupe les

[1] *Principles of geology*, 3e édition, tom. IV, p. 74.

[2] Je crois qu'une grande partie au moins des blocs que M. Brongniart signale près du sommet de la colline de Superga n'ont point d'autre origine : et je me fonde sur ce qui se voit, en général, en remontant depuis le Pô les différents vallons de ces collines. Ainsi, en suivant le lit du ruisseau de Cavoretto (à une lieue au sud de Turin), on trouve d'abord des marnes micacées alternant avec des couches de mollasses, plongeant vers le Pô de plus de 45° et dirigées du nord 30° E. au sud 30° O. A un quart d'heure de la grande route de Gênes, la tranche des couches est cachée par des amas de sable contenant des blocs serpentineux, qu'on exploitait en 1836 pour les constructions de Turin. A mesure qu'on monte vers le sommet de la colline, les blocs augmentent de volume, et à une heure de la vallée du Pô ils ont quatre et cinq mètres de côté; bientôt après, on trouve en place les couches de nagelflue, qui déterminent en général les arêtes plus élevées de la colline ; nagelflue qui n'est autre chose

branches ont sensiblement le même ordre que M. Brongniart a observé en montant depuis le Pô. C'est une suite de marnes plus ou moins micacées, plus ou moins sableuses, passant quelquefois à une mollasse calcaire, ailleurs se changeant en un sable serpentineux, dont les grains augmentent quelquefois de volume au point de former des couches puissantes de conglomérat. On peut se convaincre au fond d'une vallée escarpée à l'est de Superga, près du village de Rivo-Dora, que toute la masse des collines est formée par des couches analogues. Tout au fond de la vallée, on voit un mamelon de poudingue à blocs calcaires exploités pour les fours à chaux des villages voisins; les couches de mollasse et de marne se relèvent des deux côtés de ce mamelon, et leurs tranches forment des escarpements de plus de mille pieds (325 mètres), qui supportent les hauteurs couronnées par le sanctuaire.

La formation dont je viens de donner les principaux traits contient un grand nombre de fossiles, qui, ainsi que je l'ai annoncé plus haut, ont été dès longtemps distingués de ceux des plaines de l'Astesan : ce sont ceux que M. Deshayes a désignés dans ses Tableaux des fossiles tertiaires, comme se trouvant à Turin. On verra à la fin de ce mémoire la liste des fossiles de la formation des mollasses de Superga : je me contenterai d'ajouter ici que le *trochus infundibulum* paraît y être la coquille la plus caractéristique.

En approchant de Baldichieri, on trouve des couches dont la

qu'une agglomération des mêmes cailloux que l'on a vus en montant, cimentés par un grès peu résistant, qui paraît résulter de l'atténuation des éléments du poudingue. On ne peut douter là un seul instant que les blocs des pentes de la colline ne proviennent de la destruction des crêtes du nagelflue, destruction qui certes est due à des causes plus énergiques que celles qui agissent de nos jours. M. Brongniart est donc fondé à rapporter *les lits supérieurs*, près le sanctuaire de Superga, *au terrain de transport ancien;* et M. Lyell ne me paraît guère autorisé à accuser M. Brongniart d'avoir *représenté, par erreur, les couches de conglomérat comme une masse discordante, supérieure à ces couches.* (*Principles of geology*, t. IV, p. 74.) Au reste, le diluvium alpin débouché par la vallée de Suze a sans doute laissé à diverses hauteurs sur les collines de Superga quelques-uns des blocs qu'il transportait, et ces blocs ont dû s'ajouter à ceux provenant de la destruction du nagelflue.

nature minéralogique, les fossiles et la position générale diffèrent assez de celles de la formation des mollasses que l'on a suivies jusque-là pour qu'on soit convaincu, au premier abord, que les couches de Baldichieri, qui se prolongent dans les plaines de l'Astesan, sont d'une autre époque que celles de Superga; les marnes sont moins sableuses, plus bleuâtres, et elles dominent tellement, que les géologues s'accordent depuis longtemps pour donner à cette formation le nom de *marnes bleues*. On n'y trouve plus ces immenses agglomérations de poudingues qui dominent dans les couches de la mollasse; quelquefois seulement des sables calcaires s'intercalent entre les marnes bleues : la partie supérieure de la formation paraît même consister généralement en un sable jaunâtre très-coquillier, qui est cimenté quelquefois par un suc calcaire, de manière à former une roche très-solide (c'est le calcaire isabelle de M. de la Marmora, que ce savant a suivi depuis Montpellier jusqu'à Rome et qu'il a retrouvé en Sardaigne et dans les îles Baléares). Quelquefois on rencontre de grands amas aplatis (ou des couches peu étendues) de gypse intercalés dans les marnes bleues. Les carrières de Moncucco, à trois lieues de Superga, fournissent tout le gypse employé à Turin et dans les environs : on en exploite en outre sur plusieurs points de l'Astesan, du Montferrat, et du versant nord des Apennins, depuis Acqui jusqu'à Plaisance. Les gypses des environs de Stradella sont connus par les descriptions de Breislack et du marquis Pareto.

Les fossiles des marnes bleues diffèrent presque totalement de ceux de la mollasse de Superga (voir les Tableaux de M. Deshayes et les tables à la fin du mémoire). A Baldichieri, à Sciolze, à Bardassano, etc. c'est la *terebratula ampulla*, le *balanus tulipa*, le *dentalium elephantinum*, l'*oliva hispidula*, une *auricula*, voisine de la *buccinea*, *etc. etc.* qui sont le plus fréquents; le *pecten sœnensis* y forme quelquefois, mêlé à un peu de sable gris, des couches presque entières. Des débris de végétaux abondent également dans la formation des marnes bleues : outre les empreintes de feuilles

qui accompagnent souvent les gypses, et dont M. le professeur Viviani a donné la description[1], on trouve sur plusieurs points des traces de lignite. Cette substance forme de petits lits à peu de distance de Moncucco : on en retrouve des traces à Bersano, à Robella, à Villadeati, et sur une foule d'autres points de l'Astesan et du Montferrat ; mais nulle part le combustible n'est assez abondant pour donner lieu à des exploitations.

Lorsqu'on parcourt la limite des deux formations, on a souvent l'occasion de voir que les marnes bleues reposent en stratification discordante sur la mollasse. M. le professeur Sismonda avait reconnu ce fait, il y a quelques années, dans les environs de Chieri : j'ai eu occasion de constater cette même discordance sur plusieurs autres points[2]. En outre, la direction générale moyenne des marnes bleues, là où elles ont été redressées, est de l'est 15° N. à l'ouest 15° S. tandis que la direction moyenne des mollasses et nagelflues de Superga fait toujours avec la première un angle de 40° environ.

Nous voyons ainsi les caractères géologiques des collines de Superga confirmer la séparation que l'on avait faite, d'après les fossiles, des deux terrains qui entrent dans la composition du massif de ces collines, en les rapportant aux étages tertiaires moyen et supérieur. La distinction des deux terrains est tout aussi évidente au pied des Apennins, dans la vallée de la Bormida, où la mollasse est fortement redressée, tandis qu'à Acqui les marnes bleues sont presque horizontales. M. Pareto a donné une coupe des terrains tertiaires des environs de Tortone, dans laquelle les couches de poudingue et de mollasse qui s'appuient immédiatement sur le calcaire à fucoïdes (de la formation crétacée) sont recouvertes en stratification discordante par les marnes bleues[3]. La discordance entre les deux étages tertiaires est encore bien prouvée par la différence des limites des bassins dans les-

[1] *Mémoires de la Société géologique de France*, t. I, p. 129.
[2] *Ibid.* t. II, p. 193 et suivantes.
[3] *Ibid.* t. I, pl. 8.

quels ils ont été déposés. Ainsi, les marnes bleues manquent entièrement dans le bassin de Cadibona, dont M. Bertrand Geslin a donné la description [1], et qu'il rapporte au terrain tertiaire moyen.

Je crois qu'il est bien établi, d'après ce qui précède, que le dépôt des formations tertiaires de Superga et du pied des Apennins a été interrompu par un événement géologique *qui a suspendu le fil des opérations* et qui a changé en grande partie les êtres organisés qui vivaient dans les eaux de ces contrées. Cet événement, qui a redressé les couches de l'étage moyen sans affecter les marnes bleues, se trouve, d'après cette seule circonstance, être contemporain du soulèvement des Alpes occidentales. Une seconde interruption de même genre a eu lieu après le dépôt des marnes bleues et des sables calcaires qui les accompagnent. C'est ce qui se voit parfaitement à Verrua, où la formation subapennine se présente dans son entier, à la rive droite du Pô, et dans la prolongation des couches de Chieri et de Sciolze. Le calcaire jaunâtre supérieur, plongeant au N. 15° O. sous un angle de 45°, y forme un rocher élevé, couronné par un ancien château fort; au-dessous du calcaire et au pied méridional de la colline, on trouve les marnes bleues; plus loin, on a la mollasse, dont je n'ai pu bien voir ici les relations avec les marnes bleues. Dans les collines de Saint-Colombano (province de Lodi), les marnes bleues, bien caractérisées par des fossiles très-abondants, forment comme un îlot entouré par le diluvium qui couvre toute la plaine de Lombardie : là aussi le plongement général des couches est, comme à Verrua, au nord 10° à 20° O. Le même plongement se retrouve dans les environs de Plaisance, au pied des Apennins, où les marnes bleues sont assez fortement inclinées [2].

Or, il est à remarquer que le plongement N. 15° O. des marnes bleues les enfonce sous le diluvium qui recouvre la grande plaine de Lombardie, et que le contact entre les couches tertiaires redressées et la masse diluvienne qui en recouvre le pied se fait

[1] *Bulletin de la Société géologique*, t. VI, p. 282.

[2] Cortesi, *Saggi geologici degli stati di Parma e Piacenza*, p. 2.

toujours de manière à rendre tout rapprochement impossible entre deux dépôts d'un ordre si différent. Partout le diluvium, ne présentant aucune trace de stratification, vient mourir au pied des collines de la rive droite du Pô, et si quelquefois les blocs erratiques ont été transportés sur les hauteurs de ces collines, ils y sont tout aussi isolés du terrain qui les supporte, que les blocs arrivés sur les pentes du Jura, par les vallées septentrionales des Alpes, sont distincts des couches calcaires sur lesquelles ils se sont arrêtés. Le mouvement qui a redressé les marnes subapennines est donc antérieur *au dépôt* de la masse diluvienne qui forme les plaines de la Lombardie et du Piémont, et puisqu'il est postérieur au soulèvement de la partie occidentale des Alpes, qui n'a affecté que la formation de la mollasse, il doit être contemporain du ridement de l'écorce du globe, qui a donné lieu à la partie orientale de cette même chaîne.

CHAPITRE II.

LAC DE CÔME ET COLLINES SUBALPINES.

On a vu dans le chapitre précédent que le dépôt des terrains tertiaires qui forment aujourd'hui le massif de Superga et les plaines de l'Astesan avait été interrompu à plusieurs reprises par des catastrophes correspondantes aux grands mouvements qui avaient donné aux Alpes leur relief actuel. C'est cette correspondance entre des phénomènes qui ne diffèrent que par la grandeur de leur échelle qui a fait dire à M. Élie de Beaumont que *le massif de Superga est un modèle en petit du croisement des Alpes orientales et occidentales*[1]. Lorsque de l'étude de ce modèle on passe à celle de la partie des Alpes qui regarde l'Italie, on trouve à chaque pas des traces des deux grandes révolutions; traces qui sont toujours bien distinctes, même aux points de leur croisement. Ainsi, aux environs du Simplon, la direction moyenne des couches est du

[1] *Mémoires de la Société géologique de France*, t. II, p. 209.

nord-nord-est au sud-sud-ouest, tandis que les grandes fractures qui ont donné lieu aux vallées de Gondo, de Bugnanco, d'Antrona et d'Anzasca, suivent sensiblement la direction des Alpes orientales. Cette dernière direction est marquée encore par la ligne de gypses et de dolomies qui, depuis Pfynn, en Valais, s'étend jusqu'à Airolo, au pied du Saint-Gothard; ligne que M. Élie de Beaumont a indiquée dans sa Carte des directions qui dominent dans les Alpes[1], et sur laquelle j'ai moi-même donné ailleurs quelques détails[2].

D'un autre côté, la forme générale des grands lacs du nord-ouest de l'Italie est sensiblement alignée du sud 26° O. au nord 26° E. tandis que la direction O. 15° à 20° S., E. 15° à 20° N., est fortement prononcée dans quelques-unes des couches de la contrée et dans la ligne de mélaphyres et dolomies allant du lac d'Orta à Bleyberg. On peut dire, en un mot, que le phénomène de croisement signalé par M. Élie de Beaumont dans la partie des Alpes comprise entre le mont Blanc et le Saint-Gothard[3] est tout aussi marqué sur le revers méridional qu'au centre même de la chaîne. Mais, de même que sur le revers septentrional, ce n'est qu'à une certaine distance de l'axe de la chaîne que l'on retrouve en Italie les dépôts dont les accidents peuvent servir à fixer l'époque relative des divers mouvements qui ont donné lieu au relief actuel du sol, les terrains tertiaires, exposés, au débouché des grandes vallées, à toute l'action des eaux diluviennes, ont dû être détruits en grande partie, et ce n'est que dans les intervalles de ces vallées qu'on peut reconnaître aujourd'hui des lambeaux de ces terrains; lambeaux assez importants, toutefois, pour démontrer que la mer des époques tertiaires s'étendait jusqu'au pied des Alpes. Ainsi, en commençant par le point le plus occidental, on voit à quelques minutes de la Stura (voir la planche 1re à la fin du mémoire), près de Lanzo, un dépôt argileux, en

[1] *Annales des sciences naturelles*, t. XIX, pl. 2.
[2] *Bulletin de la Société géologique*, t. VI, p. 106.
[3] *Annales des sciences naturelles*, t. XIX, p. 207.

couches horizontales, qui présente, à partir de la surface du sol, la coupe suivante :

Terre végétale passant à une argile grossière verdâtre.
Argile rougeâtre impure..... $0^m,08$.
Argile grise faisant pâte avec l'eau..... 0 20.
Lignite fibreux (arbres dicotylédones) $0^m,30$ à 0 50.
Argile grise très-pure.

L'excavation n'a pas été poussée au-dessous de cette argile, et l'exploitation du lignite a été abandonnée comme improductive. Mais le même dépôt reparaît à l'extrémité orientale des collines de Balangero, à trois lieues de Lanzo, et il y est mis au jour dans les escarpements du lit du Malone, près du village de Front.

M. Al. Brongniart avait annoncé depuis longtemps[1] que le sable rougeâtre qui recouvre les serpentines de Castellamonte faisait partie des terrains de sédiment supérieurs. M. le professeur Simonda vient en effet de trouver dans les sables qui constituent, à deux lieues de Front, les dernières pentes des Alpes, entre l'Orco et la Doire Baltée, les coquilles suivantes : *pectunculus violascensis*, Lam. *pecten flabelliformis*, Brocc. *cancellaria cancellata*, Lam. *purpura hœmastoma*, Lam. *buccinum mutabile*, Lam. *terebra fuscata*, Brocc. *T. duplicata*, Lam. qui toutes se retrouvent dans les marnes bleues subapennines. L'âge de ces sables est donc bien déterminé d'après les fossiles qu'ils renferment[2], et la disposition des lieux porte à présumer que les argiles à lignites de Front et de Lanzo ne sont qu'un prolongement du même dépôt, malgré la différence de caractères minéralogiques qu'elles présentent. Les élévations qui flanquent le lit de la Doire Baltée, et qui portent le nom de Serra, sont diluviennes; mais on retrouve, près de Bielle, des collines tertiaires qui s'étendent vers

[1] *Sur les gisements des ophiolites.* (Annales des mines, 1821, t. VI, p. 177.)

[2] On peut voir, dans la coupe que M. Brongniart donne de la colline de Castellamonte, que le sable rougeâtre y repose en couches horizontales au-dessus de la serpentine; on a donc là encore une preuve que l'apparition des serpentines et le soulèvement des Alpes occidentales, qui en a été contemporain, ont précédé le dépôt des marnes subapennines.

l'est jusqu'à la Sésia, et dont les fossiles les ont depuis longtemps fait rapporter par M. de la Marmora à l'époque des marnes subapennines[1]. Il est à remarquer que les couches subapennines du Biellais reposent immédiatement sur des terrains secondaires (crétacés?). A l'est de la Sésia, le dépôt reprend un caractère argileux et la coupe suivante des exploitations de lignite de Maggiora correspond assez bien à celle de Lanzo.

Terre végétale passant à une argile impure à grains de quartz et fragments de lignite.

Argile blanchâtre plastique.....	$0^{m},60$.
Lignite plus ou moins terreux renfermant des troncs d'arbres dicotylédones.....	0 90.
Argile sableuse avec traces de lignite.....	1 20.
Argile blanchâtre, plastique, exploitée.....	1 60.
Argile jaunâtre, moins pure.	

Les couches de Maggiora sont faiblement inclinées vers la plaine, et dirigées de l'est 10° N. à l'ouest 10° S.

On retrouve encore à l'est du Tessin, auprès de Varese, un gisement de lignite qui a les plus grands rapports avec celui de Maggiora. Il est mis à découvert pour l'exploitation de l'argile qui lui est inférieure; mais dans aucune des localités situées sur les pentes des Alpes on n'a pénétré jusqu'à la limite inférieure de la formation subapennine, de sorte que l'on ignore s'il existe là des mollasses analogues à celles de la Bormida et de Superga, et si les deux formations tertiaires y sont séparées par une discordance de stratification. Il est cependant une autre circonstance qui me paraît démontrer que le dépôt des couches pliocènes a été précédé par la dislocation du sol, à laquelle est due la chaîne occidentale des Alpes : c'est l'existence sur les bords du lac de Côme d'un dépôt marneux qui n'a point été affecté par cette dislocation, tandis qu'il l'a été par celle qui a soulevé les couches subapennines de Verrua : aussi vais-je entrer dans

[1] *Bulletin de la Société géologique de France*, t. II, p. 391.

quelques détails plus particuliers sur les relations et les caractères généraux de ce dépôt.

La forme générale du lac de Côme (voir la planche 3 à la fin du mémoire) est sensiblement dirigée, ainsi que je l'ai dit plus haut, du sud 26° O. au nord. 26° E.; en même temps, ce lac peut se diviser en éléments distincts qui sont en rapport avec les directions dominantes des couches de la contrée. Ainsi la partie supérieure de ce lac, connue sous le nom de lac de Chiavenna, est dirigée du nord au sud de Sorico à Dongo, et du fort de Fuentes à Olgiasca; la direction moyenne est de l'est 38° N. à l'ouest 38° S. De Dongo, une ligne allant au sud suivrait sensiblement le bord du lac jusqu'à Rezzonico; plus loin, cette ligne rencontrerait la pointe de Bellagio, et longerait ensuite la rive occidentale du lac de Lecco jusqu'à Onno. De la pointe de Bellagio à la Cavagnola, on retrouve la direction E. 38° N. à O. 38° S. De la Cavagnola à la villa Pliniana, les rives du lac sont dirigées nord-sud; enfin, de Carate jusqu'à Cernobio, et de Torno jusqu'à Geno, on a une direction approchant du nord-est au sud-ouest.

Au nord de Bellano et de San-Abondio, les bords du lac de Côme sont composés, en général, de roches cristallines: c'est le gneiss surtout qui paraît la roche dominante, comme il l'est dans toute cette partie du revers méridional des Alpes; le micaschiste ne s'y montre guère qu'à la partie supérieure des roches cristallines, c'est-à-dire à l'approche des terrains de sédiment. A Musso et à Olgiasca, on exploite un marbre blanc dont les relations avec les roches qui l'encaissent ne sont pas assez évidentes pour qu'on puisse en tirer quelque conclusion pour l'origine de ce calcaire cristallin; ce n'est que par une étude générale de tous les lambeaux calcaires ainsi encaissés dans les roches dites primitives du revers méridional des Alpes, qu'on pourra arriver à une explication satisfaisante sur la cause de leur existence.

La direction des couches est à peu près du nord-est au sud-ouest à Domaso, à Gaggio, à Livo, à Gravedona, et la même direction se retrouve généralement au nord-ouest du lac de Côme,

jusque vers le Saint-Gothard et le Simplon. A Bellano, sur la rive orientale du lac, les couches de gneiss sont dirigées du nord-ouest au sud-est, plongeant au sud-est; cette direction est en même temps celle des vallées voisines du Virone et de la Pioverna. La coupe des bords du lac, de Bellano à Varenna, a été mise parfaitement à découvert par les travaux de la grande route allant de Milan au *Stilfser-Joch :* cette coupe a été décrite avec détail par M. de la Bêche [1] et par M. le professeur Studer [2]; mais on peut remarquer que ni l'un ni l'autre de ces auteurs n'a parlé de l'épaisseur des diverses roches qu'il décrivait. C'est qu'il serait fort difficile, en effet, de dire, en suivant les bords du lac, où finissent les terrains cristallins, où commencent les calcaires compactes, quoique certes rien ne soit plus différent que les termes extrêmes de cette série de couches. Voilà ce que j'ai observé dans les escarpements de la grande route, en allant de Bellano à Varenna. Au sud de Bellano, le gneiss perd peu à peu son feldspath, le mica s'oriente en feuillets suivis, et l'on a des couches de micaschiste qui continuent jusqu'à la première galerie que traverse la route : là les paillettes de mica se séparent; on a d'abord une roche grenue de quartz et de mica; puis les grains de quartz deviennent aréna-cés, et on a des assises d'un grès qui prend bientôt quelques galets de quartz, de porphyre rouge, etc. et finit par constituer un véritable conglomérat à ciment rougeâtre, qui rappelle celui du Saint-Salvatore, près de Lugano. Le conglomérat *passe* de nouveau au micaschiste; puis, en continuant toujours vers le sud, on a un nouveau *passage* au conglomérat rouge; celui-ci perd peu à peu sa teinte et ses galets; le ciment calcaire qui unissait les cailloux roulés forme des assises dolomitiques blanchâtres, qui sont bientôt recouvertes par un calcaire noirâtre, lequel se continue jusqu'à Varenna et au delà [3].

[1] *Sections and views illustrative of geological phænomena.*

[2] *Bulletin de la Société géologique de France*, t. IV, p. 58.

[3] Le *passage* qui a lieu ici du gneiss au calcaire jurassique, quelque surprenant qu'il puisse paraître d'abord, me semble trouver une explication assez facile dans la théorie de M. Babbage sur les effets thermométriques produits dans les dépôts de sédiment par la différence

La direction et le plongement des couches est constamment le même depuis Bellano jusqu'à Varenna, si on excepte quelques accidents locaux qui se voient à la pointe de Morcate. Le calcaire ne présente point de fossiles à Varenna, mais le torrent de la vallée d'Esino, qui tombe dans le lac à la porte de ce bourg, roule des blocs et des cailloux d'un calcaire tout semblable, contenant une telle quantité de coquilles univalves (mélanies? ou mélanopsides?), qu'il en résulte une véritable lumachelle employée quelquefois dans les arts.

A la partie occidentale du lac de Côme, la jonction des terrains cristallins avec les sédimentaires n'est pas aussi distincte qu'à la rive opposée : les conglomérats y forment un escarpement dans lequel sont ouvertes les galeries de mines de la Gaeta. Les propriétaires de ces mines en défendaient l'entrée en 1836 ; mais je tiens, du chef mineur, que le fer hydroxydé s'y trouve en filons verticaux dirigés nord-sud. Au sud de la Gaeta ; les couches dolomitiques du *sasso rancio,* qui recouvrent immédiatement le conglomérat rouge, sont bien plus puissantes que celles qui leur correspondent à la rive orientale ; un peu plus au sud, on trouve à

de rayonnement dans la surface du sol, et surtout dans une lettre écrite dernièrement du cap de Bonne-Espérance par M. Herschell (*Bulletin de la Société géologique de France*, t. VIII, p. 98). D'après ce savant, les couches isothermes, qui à l'intérieur du globe terrestre suivent des courbes sphéroïdales régulières, doivent se conformer, en approchant de la surface, aux divers accidents de cette surface : elles doivent donc présenter une certaine concavité au-dessous des bassins des mers ; que si un de ces bassins vient à être comblé par les sédiments qui s'y accumulent, la couche isotherme, qui d'abord était concave, deviendra horizontale, et les sédiments accumulés au centre du bassin s'y trouveront soumis à une température proportionnée à l'épaisseur des couches qui les recouvrent. La formation jurassique présente sur plusieurs points des Alpes une épaisseur de près de 2,500 mètres. Aujourd'hui, en admettant que la température terrestre augmente de 1 degré par 25 mètres, on aurait, à la profondeur de 2,500 mètres une température supérieure à celle de l'eau bouillante ; mais il ne faut point oublier qu'à l'époque jurassique l'influence intérieure de la partie non oxydée de notre planète donnait lieu, dans nos latitudes, à une température égale au moins à celle de la zone torride actuelle, à en juger par les êtres organisés qui habitaient alors à ces latitudes ; l'écorce solide à travers laquelle se communiquait la chaleur intérieure devait donc être beaucoup moins épaisse qu'elle ne l'est aujourd'hui ; et il est bien possible qu'à la profondeur de 2,500 mètres, les couches jurassiques inférieures se trouvassent soumises à une température capable de les modifier ainsi que nous les voyons au lac de Côme, et d'établir un *passage* entre les couches cristallines et celles qui conservent leurs caractères sédimentaires.

Nobiallo un amas de gypse : on ne peut guère douter cependant que ce ne soit là le prolongement des couches du calcaire noirâtre qui, à Varenna, recouvrent le conglomérat, et qui n'y ont point subi les mêmes transformations chimiques.

La partie méridionale du lac de Côme, ainsi que le bras qui porte le nom de lac de Lecco, est comprise en entier dans la grande formation calcaire que les ammonites des carrières de Moltrasio font rapporter à l'époque jurassique. Ce n'est point que les fossiles n'abondent sur plusieurs points des environs du lac : ainsi, j'ai indiqué les lumachelles de la vallée d'Esino ; je peux citer encore le *sasso delle stampe* (*pierre des empreintes*), à l'ouest de Tramezzo, où des sections de grandes bivalves (*isocardia?*), ayant jusqu'à un pied de diamètre, font saillie à la surface du calcaire corrodé par les agents atmosphériques ; une carrière à un quart d'heure à l'est de Bellagio, sur la route de Milan, où l'on reconnaît des *mytilus*, des pholadomyes (?) ; des schistes marneux noirâtres presque entièrement pétris de fragments de bivalves (vénus (?), tellines (?), limes (?)), dans le ravin de la Perlana, à l'O. de Balbiano ; des polypiers lamellifères à Spurano, etc. etc. ; mais aucun de ces fossiles n'a été déterminé spécifiquement, que je sache ; et, dans un mois de courses autour du lac, je n'en ai point trouvé qui fussent susceptibles de l'être [1]. Comme cependant rien dans cet ensemble ne contredit l'indication donnée par les ammonites de Moltrasio (*A. Bucklandi, heterophillus*) et par celle des environs de Côme (*A. Comensis*, De Buch), il est tout à fait naturel de s'en tenir à cette indication.

Le lac de Côme, placé sur la ligne qui joint la vallée de Fassa au lac de Lugano, et tout près de ce dernier, ne pouvait point échapper à l'influence exercée par l'apparition des mélaphyres sur les couches préexistantes. Aussi les calcaires dont je viens de

[1] M. Al. Brongniart, qui indique dans ces calcaires des madrépores, des ammonites, des turbo et des coquilles ressemblant à des isocardes, ajoute n'avoir point trouvé de fossiles assez bien conservés pour être déterminables. (*Sur le gisement des ophilodites.* Annales des mines, t. VI, p. 177. 1821.)

parler sont-ils convertis, sur plusieurs points, en dolomie et en gypse. Cette modification des roches a été plus ou moins parfaite; la dolomie qui en résulte est quelquefois entièrement massive, tandis que sur d'autres points elle conserve sa stratification originaire. A Limonta (à la rive occidentale du lac de Lecco, c'est bien évidemment une continuation des couches calcaires et dolomitiques qu'on voit à la montée de Bellagio à Guel, qui est convertie en un gypse analogue à celui de Bex, de Champs (Isère), etc. Est-ce encore un résultat de la sortie des mélaphyres, que cette quantité de cavernes intérieures dont on a mille indices sur les bords du lac de Côme, et surtout dans les sources intermittentes de la Pliniana du *fiume Latte*, du Lambro (près de Magrelio), etc. ?

J'ai dit que les couches du calcaire noirâtre de Varenna sont dirigées du nord-ouest au sud-est : cette direction se continue à la rive opposée du lac, près de Nobiallo; c'est encore la même direction qui paraît déterminer la forme du lac de Lecco depuis Onno jusqu'à la sortie de l'Adda. D'un autre côté, j'ai dit que les filons verticaux de la Gaeta étaient dirigés N. S.; j'ai retrouvé la même direction dans les dolomies qui forment la pointe de Bellagio, et je l'ai suivie au sud jusqu'à la source du Lambro. On reconnaît encore la direction N. S. dans les couches qui forment le pied de l'escarpement de Gros-Gallia, entre Bellagio et Lezzeno, et dans celles qui bordent le lac entre Menaggio et la Majolica; il suffit d'un coup d'œil sur la carte du lac pour voir combien cette direction est marquée dans la vallée du Lambro et dans les vallées de la Sanegra et du Cocolo (entre les lacs de Côme et de Lugano).

Outre les trois directions que je viens de mentionner, il en est une quatrième qui est surtout prononcée à la partie méridionale du lac de Côme proprement dit. Lorsqu'on se rend de Côme à la villa Pliniana par le sentier si pittoresque situé à mi-côte des montagnes, on trouve d'abord un calcaire gris bleuâtre contenant des rognons et de petits lits de silex noirâtre : les couches en sont dirigées de l'est 20° N. à l'ouest 20° S., plongeant au nord 20° O.; une

demi-heure après, le plongement est au sud 20° E.; il revient bientôt au nord 20° O. et on a plusieurs alternances de ces plongements, tandis que la direction ne s'écarte jamais sensiblement de celle E. 20° N., O. 20° S. A la Pliniana, le calcaire ne contient plus de silex; sa couleur est plus foncée qu'à Côme, et la roche prend tous les caractères du marbre de Varenna (nom que l'on donne dans le pays au calcaire noirâtre exploité près de ce bourg). Les alternances de plongement s'observent bien mieux à la rive même du lac, où les couches paraissent former des ondulations cylindriques dont les arêtes suivent toujours une direction constante. A Torriggia, les couches paraissent un instant horizontales au haut de la courbure d'un de ces plissements, et la même apparence se montre du côté opposé du lac, près de Careno. De Balbiano à Argegno, d'Argegno à Osteno sur le lac de Lugano, en suivant le val d'Intelvi, et au sommet du Monte-Generoso, les calcaires sont dirigés constamment de l'est 20° N. à l'ouest 20° S.

J'ai cru devoir esquisser ainsi les traits géologiques généraux des bords du lac de Côme, afin de faire mieux comprendre la position du dépôt marneux que j'ai annoncé plus haut pouvoir amener à la connaissance des relations de gisement entre les dépôts tertiaires de la Lombardie : je vais passer maintenant à l'examen de ce dépôt.

Vers le milieu du lac et sur sa rive occidentale, on exploite à la Majolica une argile bleuâtre dont on fait des briques ; l'argile, plus ou moins marneuse, y est recouverte par une masse irrégulière de terrain de transport d'une épaisseur très-variable, qui forme la surface du sol au pied des escarpements dolomitiques et calcaires qui s'étendent depuis Menaggio jusqu'à Lenno. L'argile n'est visible que dans les exploitations, et ces exploitations, étant situées à quelques mètres à peine au-dessus du niveau du lac, ne peuvent atteindre la partie inférieure du dépôt marneux, car les travaux seraient bientôt inondés. On ne connaît donc qu'une bien faible épaisseur de ce dépôt; mais on peut au moins y constater la parfaite horizontalité de ses feuillets très-minces,

qui par cela même sont entièrement distincts de la masse diluvienne qui les recouvre. A Villa, près de Lenno (à trois milles au S. de la Majolica), les mêmes argiles marneuses sont exploitées pour faire des briques et des tuiles; les couches inférieures, que l'on exploite de préférence, y recouvrent en stratification discordante les dolomies, qui forment vers l'est le promontoire de Balbianello. Ces couches sont recouvertes par un sable grisâtre faiblement agglutiné; puis on a des couches marneuses bleuâtres alternant avec des sables à peine cimentés par la matière même des couches marneuses. Toutes les couches du dépôt marneux sont assez fortement inclinées : à Villa, leur plongement est entre le nord et le nord-ouest; cependant, l'irrégularité des exploitations m'a empêché de déterminer, d'une manière rigoureuse, la direction des assises. La surface du sol est formée par le terrain de transport que j'ai dit s'étendre au nord jusque vers Menaggio.

A la rive orientale de la partie du lac qui s'avance vers Côme, et à moitié distance entre le bourg de Bellagio et Santo-Giovanni, a existé jadis, au dire des habitants, une briqueterie dont l'emplacement serait compris aujourd'hui dans le beau parc attenant à la villa Melzi. En effet, on reconnaît dans une partie un peu ravinée de ce parc les mêmes marnes et argiles bleues qui sont exploitées aujourd'hui à la Majolica et à Villa. La configuration du sol porte assez à croire que ces marnes occupent, sous le diluvium, tout l'espace compris entre les lacs de Côme et de Lecco, et entre le promontoire dolomitique de Bellagio et les dernières pentes du mont San-Primo.

Dans les trois localités que je viens de citer, la marne bleuâtre et les couches qui l'accompagnent n'ont jamais présenté la moindre trace de restes organiques; M. de la Bêche avait remarqué, il y a quelques années, cette absence complète de fossiles, et les carriers assurent n'en avoir point découvert non plus depuis que le géologue anglais les avait engagés à recueillir ceux qu'ils pourraient trouver.

Il paraît fort difficile, au premier abord, de déterminer l'âge

géologique d'un dépôt qui ne présente que des caractères aussi vagues : on peut cependant, je crois, arriver à quelque chose de positif en examinant les relations des marnes de la Majolica et de Villa avec les dépôts qui les avoisinent.

Il est évident, en effet, que les couches si minces et si régulières de la Majolica et de Villa ont une origine entièrement différente de celle du diluvium alpin qui les recouvre, et qui, dans sa plus grande atténuation, ne présente que des amas non stratifiés de sable à grains très-irréguliers, renfermant toujours des blocs beaucoup plus volumineux. Les blocs erratiques et le diluvium étant constamment supérieurs à nos marnes, il est évident encore que celles-ci sont antérieures à la catastrophe qui a donné lieu au transport de ces blocs.

Le dépôt marneux de Villa étant entièrement enclavé dans des terrains que j'ai dit se rapporter à la formation jurassique, rien ne paraît prouver au premier abord qu'il soit plutôt tertiaire que crétacé; cependant, si l'on réfléchit combien la direction E. 38° N., O. 38° S. qui domine dans les contours du lac de Côme est voisine de la direction moyenne des couches de Superga, on pourra en conclure que l'existence du lac est tout au plus aussi ancienne que les collines de Superga et que les Alpes occidentales; il sera prouvé, dès lors, que le dépôt lacustre de Villa est postérieur à la formation de la mollasse, et que les marnes, que j'ai démontré être antérieures au transport des blocs erratiques, sont contemporaines des marnes bleues subapennines. Il en résultait encore que le sol des Alpes lombardes avait subi une dislocation immédiatement antérieure au dépôt des marnes de l'étage tertiaire supérieur, ou, en d'autres termes, qu'il y a là une différence marquée dans la forme des bassins qui ont été comblés par les deux étages tertiaires supérieurs. J'ai indiqué d'ailleurs, à la partie méridionale du lac de Côme, assez de traces du mouvement qui a donné lieu à la partie orientale des Alpes : c'est sans doute le même mouvement qui a redressé les marnes lacustres à Villa[1].

[1] Je ne me suis proposé dans ce mémoire que d'indiquer la manière d'être des terrains

Quant aux directions N. O., S. E. et N. S. que l'on retrouve dans divers accidents aux environs du lac de Côme, elles tiennent sans doute à des phénomènes antérieurs au soulèvement des Alpes. En admettant le parallélisme des accidents contemporains, on pourrait assez bien les rapporter au système des Apennins et à celui de la Corse et de la Sardaigne de M. Élie de Beaumont.

CONCLUSION.

D'après les considérations contenues dans ce mémoire, je crois qu'on peut résumer de la manière suivante les divers accidents qui ont affecté les terrains postérieurs à la craie dans le bassin N. O. de l'Italie.

1° La formation de la mollasse (qui, d'après ses fossiles, rentre dans le groupe *miocène* de M. Lyell) avait subi un redressement avant le dépôt des marnes bleues (c'est-à-dire du groupe *pliocène ancien* du même auteur), puisqu'on a à Superga et au pied des Apennins des exemples de discordance entre les couches de ces deux terrains.

2° Plus tard, la mollasse et les marnes bleues subirent à la fois les effets du grand mouvement qui a donné aux Alpes leur relief actuel. S'il en est résulté, sur quelques points, des anomalies locales dans la direction des couches de la mollasse, les accidents parallèles aux Alpes orientales sont évidemment les seuls qui ont affecté les marnes subapennines.

3° Les eaux diluviennes qui ont débouché des vallées des Alpes lors de la dernière dislocation de cette chaîne ont démoli en grande partie les couches tertiaires, et les ont recouvertes ailleurs de manière à ne laisser apercevoir aujourd'hui que des lambeaux isolés de ces couches. La masse de l'eau diluvienne a

tertiaires dans le N. O. de l'Italie; je dois ajouter, cependant, que la discordance entre les couches des deux étages tertiaires supérieurs est un fait général dans le midi de l'Europe, que MM. Boblaye et Virlet ont signalé près de Corinthe (*Géologie de la Morée*, p. 215), et le colonel Silvertop dans province de Malaga. (*Edimb. new. phil. Louvre*, t. XV et XVI.)

dû changer brusquement de direction à la rencontre des Apennins; sa force de transport en a été tellement diminuée, qu'une grande partie des détritus qu'elle tenait en suspension mécanique ont pu recouvrir la surface des cailloux arrivés en même temps par les grandes vallées de quelques pouces d'une vase grossière. Si les Apennins n'avaient pas existé lors de cette débâcle, les cailloux se seraient arrêtés seuls à l'ouverture des vallées alpines; les détritus, plus fins, auraient continué vers la Méditerranée, et aujourd'hui les plaines du Piémont et de la Lombardie, un des pays les plus fertiles de l'Europe, ne seraient peut-être qu'une *mer de cailloux* comparable à la plaine caillouteuse de la Crau.

TABLES

DES

PRINCIPALES COQUILLES FOSSILES DES TERRAINS TERTIAIRES

DU NORD-OUEST DE L'ITALIE.

(Ces tables ont été construites surtout d'après les fossiles du musée de Turin, dont M. le professeur Sismonda a bien voulu me communiquer le catalogue. Les espèces du Plaisantin ont été indiquées d'après les Essais géologiques de M. le professeur Cortesi. J'ai ajouté quelques espèces, et j'ai indiqué quelques nouvelles localités que j'ai eu lieu d'observer moi-même dans mes derniers voyages en Italie. Je ne donne cependant point ces tables comme un travail complet. Les collines subapennines sont bien loin encore d'être parfaitement connues sous le rapport paléontologique, et je n'en voudrais pour preuve que les nouvelles découvertes que M. Sismonda y fait chaque jour. J'ai cru cependant qu'il y aurait quelque intérêt à présenter ici l'état actuel, pour ainsi dire, de la conchyliologie fossile tertiaire du nord-ouest de l'Italie.)

ÉTAGE TERTIAIRE MOYEN.

MOLLASSES DES COLLINES DE SUPERGA.

Les espèces marquées d'un astérisque * se retrouvent dans l'étage supérieur.

CONCHIFÈRES.

Teredo navalis, Lamarck.
Cyrena Brongniartii, Basterot.
Cyprina pedemontana, Lam.
Cytheræa ericinoides, Brongniart.
Pectunculus pilosus, Lam.*
——— auritus, Brocchi.
Nucula margaritacea, Lam.*
Avicula hirundo (Mytilus, Lam.).
Avicula radiata, Leach.*
Lima glacialis, Lam.
Pecten arcuatus, Brocc.
——— pusio, Lam.
Ostrea corrugata, Brocc.

MOLLUSQUES.

Hyalæa gibbosa, Bonelli.
Dentalium rectum, Gmelin.

MOLLUSQUES. (Suite.)

Dentalium striolatum; Risso.
——— strangulatum, Deshayes.
——— politum, Lam.
Patella umbella, Lam.
——— saccharina, Lam.
——— plicata, Bonel.
——— sulcata, Borson.
Bulla cylindrica, Lam.
——— lignaria, Linné.*
——— clathrata, Desh.
Achatina priamus, Lam.
Rissoa pusilla, Risso.
Neritina picta, Férussac.
——— compressa, Bonel.
Nerita caronis, Brong.
Natica compressa, Bast.
——— willemetii, Desh.
——— mamilla. Linn.
——— millepunctata, Lam.*
——— helicina, Brocc.*
——— glaucina, Lam.*
Haliotis monetifera, Bonel.
——— ovata, Bonel.
——— tuberculata, Lam.
Tornatella maculosa, Bonel.
Siliquaria anguina, Lam.*
Solarium sulcatum, Lam.
——— umbrosum, Brong.
——— carocollatum, Lam.
Trochus infundibulum, Brocc.
——— turritus, Bonel.
——— gigas, Borson.
——— boscianus, Brong.
——— rudis, Sow.
——— crenulatus, Brocc.
——— striatus, Defr.
——— Amedei, Brong.
——— modulus, Lam.
——— patulus, Brocc.*
——— carinatus, Borson.
——— cinerarius, Brocc.*
——— benettiæ, Sow.*
Trochus cumulans, Brong.
Turritella gigantea, Bonelli.
——— terebellata, Lam.
——— brocchii, Bonel.
——— duplicata, Brocc.
——— cathedralis, Brong.
Cerithium plicatum, Lam.
——— hexagonum, Lam.
——— margaritaceum, Brocc.
——— corrugatum, Brong.
——— multisulcatum, Brogn.
Pleurotoma tuberculosa, Basterot.
——— ramosa, Bast.
——— sinensis, Bonel.
——— cataphracta, Brocc.*
——— oblonga, Brocc.*
——— tornata, Borson.
——— fusoidea, Bonelli.*
——— Brocchii, Bonelli.
——— circulata, Bonelli.
——— obseleta, Bonel.
——— rotata, Brocc.*
——— obtusangula, Brocc.
——— Calliope, Brocc.
——— reticulata, Brocc.*
Fasciolaria Linckii, Basterot.
——— costata, Bonel.
Fusus maxillosus, Bonel.
——— crispus, Borson.
——— muricatus, Bonel.
——— lignarius, Lam.*
——— abbreviatus, Bonel.
——— inflatus, Brocc.
Pyrula carica, Lam.
——— ficoides, Brocc.
——— geometra Borson.*
——— condita, Brong.
——— ficus, Linn.
——— rusticula, Basterot.
Ranella tuberosa, Bonel.
——— marginata, Brocc.
——— lævigata, Lam.

MOLLUSQUES (Suite.)

Ranella tuberculosa, Bonelli.
Murex triqueter, Lam.
——— pyrulatus, Bonel.
——— sublavatus, Basterot.
——— rudis, Borson.
——— plicatus, Brocc.*
——— trunculus, Lam.*
——— maxillosus, Bonel.
——— misellus, Genè.
——— suberinaceus, Basterot.
——— rugosus, Sow.
Triton, gibbosum, Bonelli.
——— anus, Lam.*
——— nodulosum, Borson.*
——— variegatum, Lam.
——— reticulatum, Lam.
——— succinctum, Lam.
——— cancellinum, Desh.
Rostellaria curvirostris, Lam.
——— Brogniartiana, Risso.*
——— tenuirostris, Desh.
——— pes-carbonis, Brong.
Pterocera radix, Brong.
Strombus bonelli, Brong.
——— deflexus, Bonel.
Cassidaria echinophora, Lam.*
——— striatula, Bonel.
——— striata, Bonel.*
Cassis intermedia, Brocc.*
——— rondeletii, Basterot.
——— thesei, Brong.
Oniscia cythara, Sowerby.
——— verrucosa, Bonel.
Purpura plicata, Lam.
——— hæmastoma, Lam.*
Buccinum semistriatum, Brocc.*
——— flexuosum, Brocc.
——— inflatum, Lam.
Nassa caronis, Brong.
Terebra fuscata, Brocc.*
Columbella semicaudata, Bonel.
——— cypræola, Brocc.
Columbella semipunctata, Lam.
——— corrugata, Brocc.
——— planulosa, Bonelli.
Mitra archiepiscopalis, Lam.
——— cornicula, Lam.
Voluta Taurina, Bonel.
——— Siculina, Lam.
——— magorum, Brocc.
——— papillaris, Brocc.
——— rarispina, Lam.
Marginella eburnea, Lam.
——— ovulata, Lam.
——— phaseolus, Brong.
——— oblongata, Bonelli.
Marginella punctilabra, Bonelli.
Cypræa rufa, Lam.*
——— ovulea, Bonel.
——— lyncoides, Brong.
——— annularia, Brong.
——— tabagina, Lam.
——— amygdalum, Brocc.
——— sulcicauda, Bonel.
——— gibbosa, Borson.
Oliva luteola, Lam.
——— hispidula, Lam.*
——— rosacea, Bonel.
——— suturalis, Bonel.
——— picholina, Brong.
Ancillaria glandiformis, Lam. (Anolax, Borson.)
——— inflata, Lam. (Anolax, Borson.)
——— olivula, Lam.
——— subulata, Lam.
Conus antiquus, Lam.
——— clavatus, Lam.
——— Noe, Brocc.*
——— deperditus, Brocc.
——— imperialis, Linn.
——— ponderosus, Brocc.
——— pelagicus, Brocc.*
——— granularis, Borson.
——— parvus, Borson.

MOLLUSQUES. (Suite.)

Conus striatulus, Brocc.*
—— marginatus, Bonelli.*
—— betulinoides, Lam*.
Conus olivarius, Brong.
Nautilus.....

ÉTAGE TERTIAIRE SUPÉRIEUR.

(Dans la table suivante on a cité, comme se trouvant à Asti, toutes les coquilles des collines situées au sud de cette ville jusqu'à la vallée de Belbo. On a de même indiqué à Bielle les coquilles fossiles des collines tertiaires comprises entre la Sesia et la Doire-Baltée. A Castellamonte, celles des collines situées entre la Doire-Baltée et l'Orco; enfin, à Plaisance, celles des collines subapennines au sud de cette ville et celles des collines de Santo-Colombano.)

ANNÉLIDES.

Serpula protensa, Brocc. : *Chieri.*

CIRRIPÈDES.

Balanus sulcatus, Lam. : *Asti, Plaisance.*
—— pustulans, Lam. : *Asti.*
—— miser, Lam. : *Plaisance.*
—— tulipa, Lam. : *Chieri.*
—— tesselatus, Sow. : *Plaisance.*

CONCHIFÈRES.

Solen vagina, Lam. : *Asti.*
—— legumen, Lam. : *Asti, Bielle.*
—— coarctatus, Lam. : *Asti, Bielle.*
—— strigilatus, Lam. : *Asti.*
—— ensis, Lam. : *Asti.*
Panopæa Faujasii, Menard : *Asti, Bielle, Plaisance.*
Lutraria elliptica. Lam. : *Asti, Villanova.*
Mactra triangula, Brocc. : *Asti, Bielle, Plaisance.*
—— stultorum, Lam. : *Asti, Bielle.*
Corbula gibba, Lam. (Tellina, Brocc.) : *Narzole.*
Petricola lamellosa, Lam. : *Asti.*
Tellina complanata, Lam. : *Asti, Bielle.*
Tellina tumida, Brocc. : *Asti, Bielle, Plaisance.*
—— elliptica, Brocc. : *Asti, Plaisance.*
—— callosa, Lam. : *Bielle.*
Lucina circinnata, Brocc. : *Asti.*
—— lupinus, Brocc. : *Asti.*
—— radula, Lam : *Asti.*
—— Jamaicensis, Lam. : *Asti.*
—— callosa, Lam. : *Asti.*
—— lactea, Lam. : *Asti.*
—— lamellosa, Lam. : *Asti.*
—— carinata, Bonelli : *Cherasco.*
—— unguis, Bonel. : *Narzole.*
Cyprina Islandica, Lam. : *Asti, Bielle.*
—— Islandicoides, Lam. : *Asti.*
—— erycina, Lam. : *Asti.*
—— chione, Linn. : *Asti.*
—— lævigata, Lam. : *Asti.*
—— concentria, Brocc. : *Asti.*
—— rugosa, Lam. : *Asti, Bielle, Verrue.*
—— sulcatina, Lam. : *Asti, Bielle.*
—— exoleta, Lam. : *Bielle.*
Venus senilis, Brocc. : *Asti, Fossano.*
—— plicata, Lam. : *Asti.*
—— gallina, Lam. : *Cherasco.*
—— radiata, Lam. : *Bielle.*
—— rotundata, Brocc. : *Bielle.*

CONCHIFÈRES. (Suite.)

Venericardia intermedia, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— pectinata, Brocc.: *Asti.*
Cardita calyculata, Brocc.: *Villanova.*
Cardium hians, Brocc.: *Asti, Bielle, Plaisance.*
——— æolicum, Lam.: *Asti.*
——— oblongum, Brocc. (Sulculum, Lam): *Asti, Plaisance.*
——— striatulum, Brocc.: *Asti, Bielle.*
——— multicostatum, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— edule, Lam.: *Plaisance.*
——— aculeatum, Lam.: *Asti, Bielle.*
——— echinatum, Lam.: *Asti, Bielle.*
——— ciliare, Lam.: *Asti, Bielle.*
——— erinaceum, Lam.: *Asti.*
——— planatum, Lam.: *Asti.*
——— clodiense, Brocc.: *Asti, Bielle, Plaisance.*
Cypricardia coralliophaga, Brocc.: *Plaisance.*
Arca antiquata, Brocc.: *Chieri, Asti, Fossano, Bielle.*
—— mytiloides, Lam.: *Asti, Plaisance.*
—— Noe, Lam.: *Asti, Plaisance.*
—— ovata, Lam.: *Villanova.*
Pectunculus insubricus, Brocc.: *Asti.*
——— pilosus, Lam.: *Asti.*
——— nudicardius, Lam.: *Asti.*
——— violacescens, Lam.: *Castellamonte.*
Nucula margaritacea, Lam.: *Chieri, Asti, Plaisance.*
—— Nicobarica, Lam.: *Chieri, Asti.*
—— nucleus, Brocc.: *Asti.*
—— nitida, Brocc.: *Asti.*
—— minuta, Brocc.: *Asti.*
Nucula rostrata, Lam.: *Asti.*
Chama sinistrorsa, Lam.: *Asti.*
—— gryphoides, Basterot: *Plaisance.*
Mytilus modiolus, Brocc.: *Asti.*
Pinna nobilis, Lam.: *Asti, Plaisance.*
—— tetragona, Brocc.: *Plaisance.*
Perna maxillata, Lam.: *Asti, Villanova, Plaisance.*
Avicula radiata, Leach: *Chieri.*
Lima inflata, Lam. (Ostrea tuberosa, Brocc.): *Asti.*
—— squamosa, Lam.: *Asti.*
Pecten pleuronectes, Lam.: *Chieri, Asti, Cherasco, Narzole, Fossano, Verrua, Plaisance.*
—— varius, Lam. (Ostrea Brocc.): *Chieri, Asti.*
—— laticostatus, Lam. (Ostrea, Brocc.): *Asti.*
—— jacobæus, Lam.: *Asti, Verrua.*
—— scabrellus, Lam. (Ostrea dubia, Brocc.): *Asti.*
—— flabelliformis, Brocc.: *Asti, Cherasco, Fossano, Castellamonte.*
—— striatus, Lam. (Ostrea, Brocc.): *Asti.*
—— pyxidatus, Brocc.: *Cherasco, Plaisance.*
—— sænensis, Lam.: *Bardassano, Verrua.*
Ostrea coraucopiæ, Lam.: *Chieri.*
——— edulis., Linn.: *Asti.*
——— lamellosa, Brocc.: *Asti.*
——— Forskalii, Brocc.: *Asti.*
Hinuites Cortesi, Defr. (Ostrea crispa, Brocc.): *Asti, Plaisance.*
Anomia plicata, Brocc.: *Plaisance.*
Terebratula ampulla, Lam.: *Chieri, Verrua, Plaisance.*

MOLLUSQUES.

Cleodora lanceolata, Desh.: *Asti.*
Dentalium Noe, Lam. (Elephantinum, Brocc): *Bardassano, Cherasco, Fossano, Bielle, Verrue.*
——— circinnatum, Sow.: *Narzole.*
——— fossile, Lam.: *Bielle.*
——— aprinum, Lam.: *Plaisance.*
Fissurella græca, Lam.: *Asti, Villanova.*
Capulus hungaricus, Linn.: *Plaisance.*
——— sulcosus (Nerita, Brocc.): *Villanova.*
Crepidula cochelearis, Basterot: *Bielle.*
——— unguiformis, Bast.: *Plaisance.*
Calyptræa Sinensis, Lam.: *Asti.*
——— muricata, Brocc.: *Plaisance.*
Bulla ampulla, Lam.: *Asti, Bielle.*
—— lignaria, Linn.: *Bielle, Plaisance.*
—— ovulata, Brocc.: *Plaisance.*
—— convoluta, Brocc.: *Plaisance.*
Auricula buccinea, Sow. (Marginella, Brocc.), *Cherasco.*
——— nouv. esp. (voisine de la Buccinea), *Bardassano.*
Bulimus terebellatus. Lam.: *Asti, Plaisance.*
Natica helicina, Brocc.: *Chieri, Asti, Cherasco, Narzole, Bielle.*
—— canrena, Brocc.: *Plaisance.*
—— glaucina, Lam.: *Asti, Villanova, Bielle, Plaisance.*
—— millepunctata, Lam.: *Asti, Bielle.*
—— epiglottina; Lam.: *Asti.*
—— marochiensis, Gmelin.: *Asti, Bielle.*
—— truncatula, Bruguières: *Asti.*
—— ovulata, Lam.: *Asti.*
Sigaretus haliotoides, Lam.: *Asti.*
Stomatia salcosa, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
Siliquaria anguina., Lam.: *Asti, Plaisance.*
Scalaria pumicea, Brocc.: *Bielle, Plaisance.*
——— pseudoscalaris, Brocc.: *Bielle, Plaisance.*
Scalaria cancellata, Brocc.: *Bielle, Plaisance.*
Delphinula solaris, Brocc.: *Plaisance.*
Solarium pseudoperspectivum, Brocc.: *Asti.*
——— canaliculatum, Borson: *Asti.*
——— plicatum, Lam.: *Asti.*
——— millegranatum, Lam.: *Asti.*
Trochus cingulatus, Brocc.: *Asti, Bielle.*
——— agglutinans, Lam.: *Asti.*
——— conulus., Lam.: *Asti.*
——— granulatus, Brocc.: *Asti.*
——— striatus, Lam.: *Asti.*
——— patulus, Brocc.: *Bielle, Plaisance.*
——— magus, Lam.: *Bielle, Plaisance.*
——— conchyliophorus, Linn.: *Plaisance.*
——— benettiæ, Sow.: *Plaisance.*
——— cinenarius, Lam.: *Asti, Bielle.*
——— granosus, Borson: *Asti.*
Turbo rugosus, Lam.: *Asti, Plaisance.*
Turritella vermicularis, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— quadricarinata, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— subangulata, Brocc.: *Cherasco, Plaisance.*
——— acutangula, Brocc.: *Chieri, Asti, Fossano.*
Cerithium doliolum, Brocc.: *Asti.*
——— crenatum, Brocc.: *Asti, Cherasco, Nossano.*
——— alucoides, Brocc: *Asti.*
——— bicinctum, Brocc.: *Fossano.*
——— margaritaceum, Brocc.: *Plaisance.*
——— varicosum, Brocc.: *Plaisance.*
——— vulgatum, Bruguières: *Bielle.*
Pleurotoma contigua, Brocc.: *Chieri, Asti, Cherasco, Narzole, Fossano, Bielle.*
——— dimidiata, Brocc.: *Chieri, Asti, Fossano, Plaisance.*
——— ilatorta, Brocc.: *Asti.*

MOLLUSQUES. (Suite.)

Pleurotoma cataphracta, Brocc.: *Asti, Narzole, Fossano, Bielle, Plaisance.*
——— interrupta, Brocc.: *Asti, Bielle.*
——— oblonga, Brocc.: *Asti, Cherasco, Narzole, Fossano.*
——— rotata, Brocc.: *Asti, Chérasco, Narzole.*
——— reticulata, Brocc.: *Asti.*
——— rustica, Brocc.: *Asti, Bielle.*
——— obtusangula, Brocc.: *Asti.*
——— Brocchii, Bonel: *Bielle.*
——— fusoidea, Bonel: *Bielle.*
Cancellaria spinulosa, Brocc.: *Cherasco, Fossano.*
——— mitræformis, Brocc.: *Cherasco, Plaisance.*
——— trapetium, Borson: *Cherasco.*
——— cancellata, Lam.: *Fossano, Bielle, Castellamonte.*
——— varicosa, Brocc.: *Bielle, Plaisance.*
——— umbilicaris, Brocc.: *Bielle.*
——— piscatoria, Brocc.: *Plaisance.*
——— nodulosa, Lam.: *Bielle.*
——— cassidea, Brocc.: *Plaisance.*
Fusus corneus, Brocc.: *Asti, Bielle.*
——— lignarius, Lam.: *Asti.*
——— fimbriatus, Brocc.: *Asti.*
——— rostratus, Brocc.: *Asti.*
——— scalaris, Brocc.: *Asti.*
——— subulatus, Brocc: *Asti, Cherasco.*
——— longævus, Lam.: *Asti.*
——— longiroster, Brocc.: *Asti, Cherasco.*
——— crispus, Borson: *Asti.*
——— lamellosus, Borson: *Asti.*
——— harpula, Brocc.: *Cherasco.*
——— clavatus, Brocc.: *Fossano, Plaisance.*
Pyrula reticulata, Brocc.: *Asti.*
——— geometra, Borson: *Bielle.*
Ranella lævigata, Lam.: *Bielle.*
——— nodosa, Borson.: *Bielle.*

Murex trunculus, Lam.: *Asti.*
——— cornutus, Lam.: *Asti.*
——— cristatus, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— polymorphus, Brocc.: *Asti.*
——— decussatus, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— saxatilis, Lam.: *Asti, Villanova.*
——— linguabovis, Basterot: *Asti.*
——— erinaceus, Lam.: *Asti.*
——— ramosus, Brocc.: *Asti.*
——— imbricatus, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— scalaris, Brocc.: *Asti.*
——— turritus, Borson: *Asti.*
——— fistulosus, Brocc.: *Asti, Cherasco, Fossano.*
——— scaber, Lam.: *Asti.*
——— fusulus, Lam.: *Asti.*
——— harpula, Brocc.: *Asti.*
——— craticulatus, Brocc.: *Asti.*
——— plicatus, Brocc.: *Asti.*
——— bracteatus, Brocc.: *Plaisance.*
——— pomum, Linn.: *Plaisance.*
Triton heptagonum, Brocc.: *Asti, Plaisance.*
——— distortum, Brocc.: *Asti.*
——— reticulare, Linn: *Asti.*
——— succinctum, Lam.: *Asti.*
——— intermedium, Brocc.: *Asti.*
——— anus, Lam.: *Asti.*
——— pileare, Linn.: *Plaisance.*
——— doliare, Brocc.: *Plaisance.*
——— rana, Brocc.: *Plaisance.*
——— nodulosum, Borson: *Asti, Cherasco, Narzole, Fossano.*
Rostellaria Brongniartiana, Risso: *Chieri, Asti, Cherasco, Fossano.*
——— pes-pelicani, Lam.: *Asti, Fossano, Bielle, Bardassano, Plaisance.*
Strombus Italicus, Bonell. (Fasciatus, Lam.): *Asti.*
Cassidaria echinophora, Lam.: *Asti, Cherasco, Bardassano, Plaisance.*
——— striata, Bonel: *Bielle.*

MOLLUSQUES. (Suite.)

Cassis plicata, LAM.: *Asti.*
——— intermedia, BROCC.: *Asti, Plaisance.*
——— obliquata, BROCC.: *Plaisance.*
——— tuberosa, LAM.: *Asti.*
——— striata, SOW.: *Asti.*
——— areola, BROCC.: *Asti.*
——— testiculus, BORSON: *Asti, Bielle.*
——— Italica, BONEL.: *Bielle.*
——— saburon, BRUG.: *Plaisance.*
Purpura hæmastoma, LAM.: *Castellamonte.*
Buccinum semistriatum, BROCC.: *Chieri, Cherasco, Narzole, Fossano, Bielle.*
——— mitræforme, BROCC.: *Chieri.*
——— corrugatum, BROCC.: *Plaisance.*
——— marginatum, BROCC.: *Asti.*
——— mutabile, LAM.: *Asti, Bielle, Castellamonte.*
——— clathratum, BROCC.: *Asti, Bielle.*
——— asperulum, BROCC.: *Asti.*
——— prismaticum, BROCC.: *Asti, Cherasco.*
——— serratum, BROCC.: *Asti.*
——— musivum, BROCC.: *Asti, Bielle.*
——— polygonum, BROCC.: *Asti, Bielle.*
——— reticulatum, LAM.: *Asti, Bielle.*
——— costulatum, BROCC.: *Asti, Cherasco, Narzole, Fossano.*
——— neriteum, LAM.: *Asti.*
——— gibbosum, LAM.: *Asti.*
——— dolium, BROCC.: *Plaisance.*
——— turbinellus, BROCC.: *Cherasco.*
——— gibbum, BROCC.: *Narzole.*
——— angulatum, BROCC.: *Bielle.*
Nassa scalaris, BORSON: *Bielle.*
——— granularis, BORSON: *Bielle.*
——— serrata, BROCC.: *Plaisance.*
——— puppa, BROCC.: *Plaisance.*
——— conglobata, BROCC.: *Plaisance.*
——— prismatica, BROCC.: *Plaisance.*
Nassa angulata, BROCC.: *Plaisance.*
Terebra cinerea, LAM.: *Asti.*
——— duplicata, LAM.: *Asti, Plaisance, Castellamonte.*
——— fuscata, BROCC.: *Asti, Castellamonte.*
——— strigilata, LAM.: *Asti.*
Mitra pyramidella, BROCC.: *Chieri, Asti.*
——— scrobiculata, BROCC.: *Asti, Plaisance.*
——— striatula, BROCC.: *Asti, Fossano, Plaisance.*
——— fusiformis, BROCC.: *Asti.*
——— elongata, LAM.: *Asti.*
——— cornicula, LAM.: *Asti.*
——— plicatella, LAM.: *Asti, Bardassano, Plaisance.*
——— obsoleta, BROCC.: *Asti.*
Voluta affinis, BROCC.: *Plaisance.*
Ovula passerinalis, LAM.: *Plaisance.*
Cypræa percellus, BROCC.: *Asti.*
——— elongata, BROCC.: *Asti.*
——— coccinella, LAM.: *Asti.*
——— rufa, LAM.: *Asti.*
——— pyrula, LAM.: *Asti.*
——— physis, BROCC.: *Plaisance.*
——— annulus, BROCC.: *Plaisance.*
Oliva hispidula, LAM.: *Bardassano.*
Conus Baldichieri, BORSON: *Asti.*
——— antediluvianus, BRUG.: *Asti, Narzole, Bielle, Plaisance.*
——— deperditus, BROCC.: *Asti, Plaisance.*
——— virginalis, BROCC.: *Asti, Bielle, Plaisance.*
——— Noe, BROCC.: *Plaisance.*
——— betulinoides, LAM.: *Asti.*
——— pelagicus, BROCC.: *Asti, Plaisance.*
——— striatulus, BROCC.: *Asti, Plaisance.*
——— marginatus, BONEL.: *Bielle.*
Nautilus . . . . . *Bardassano.*

MÉMOIRE

SUR

LA BALISTIQUE;

PAR ISID. DIDION,

CHEF D'ESCADRON D'ARTILLERIE.

(PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 17 NOVEMBRE 1845.)

AVANT-PROPOS.

La balistique, ou la science du mouvement des projectiles dans l'air, a été depuis longtemps, et est encore l'objet des recherches des géomètres et des praticiens. Dans quelques circonstances, comme dans le tir de plein fouet, il semble qu'on peut se passer de la connaissance du mouvement des projectiles, et qu'un petit nombre d'expériences doit suffire pour déterminer l'angle de projection qui permet de frapper un objet à une distance donnée; que, de plus, on peut y arriver par quelques tâtonnements, lorsqu'on ne connaît qu'imparfaitement cette distance; mais il n'en est pas de même dans certains cas, comme dans celui du tir plongeant ou tir à ricochet. Pour l'efficacité de ce tir, il ne suffit pas que le mobile effleure la crête intérieure du parapet, le seul objet sur lequel on puisse diriger le projectile, il faut que celui-ci pénètre, en plongeant dans l'ouvrage, sous une inclinaison donnée ou renfermée entre des limites hors desquelles le tir n'a plus d'efficacité.

De savants géomètres et d'habiles praticiens se sont occupés de la balistique; mais ils ne sont pas encore parvenus à des formules représentant toujours avec une exactitude suffisante les résultats de l'expérience. Plusieurs causes y ont contribué : d'une part, l'expression de la résistance de l'air a été basée en partie sur des expériences faites aux petites vitesses et dans des circonstances différentes de celles qui se présentent dans le mouvement des projectiles; de l'autre, elle a été inexactement représentée par un seul terme proportionnel au carré de la vitesse. Aussi, s'est-on trouvé forcé de modifier dans chaque cas particulier le coefficient de cette résistance, sans parvenir, néanmoins, à représenter par des formules les relations données par l'expérience entre les portées et les angles de projection.

Depuis peu de temps, des recherches et des expériences nouvelles ont été entreprises pour déterminer et pour exprimer les lois de la résistance des fluides au mouvement des corps : celles-ci ont amené à représenter plus exactement cette résistance. On a distingué la nature du mouvement et le cas particulier des grandes vitesses des projectiles de l'artillerie; et, au terme proportionnel au carré de la vitesse, on a été amené à ajouter un terme proportionnel au cube de cette même vitesse.

L'expression de la résistance au moyen d'un seul terme, quelque simple qu'elle fût, n'avait cependant pas permis aux plus grands géomètres d'arriver à une équation finie de la trajectoire pour des angles de projection quelconques; si l'on a pu trouver dans cette hypothèse quelques propriétés de cette courbe, et le moyen de la construire par points à l'aide des quadratures, on n'est pas parvenu à en relier les différents éléments, tels que les portées et les angles de projection, par des formules suffisamment exactes.

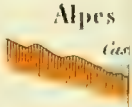
Quand on limite les angles de projection à ceux que permet la construction des affûts des canons et des obusiers, une simplification peut être introduite dans les termes qui renferment l'expression de la résistance de l'air : on arrive alors à une équation finie de la trajection, et l'on peut en déduire des relations di-

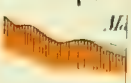
Disposition

DES

TERRAINS T

DANS LE NORD-OUE





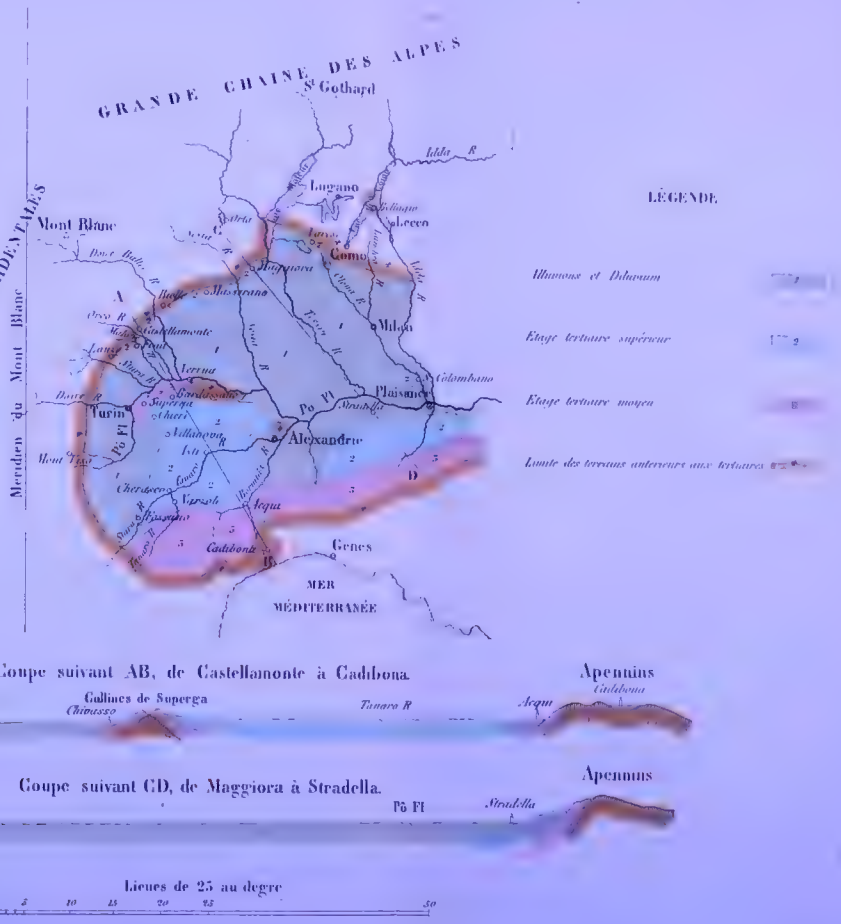
Imprimé en couleur

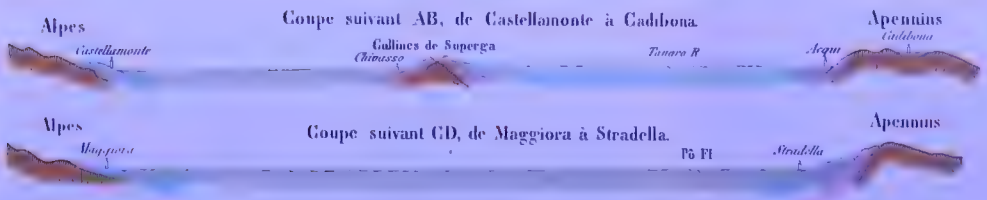
Disposition générale

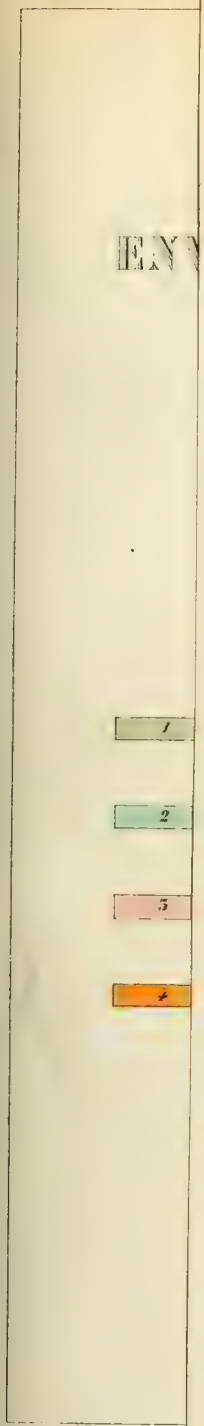
DES

TERRAINS TERTIAIRES

DANS LE NORD-OUEST DE L'ITALIE.

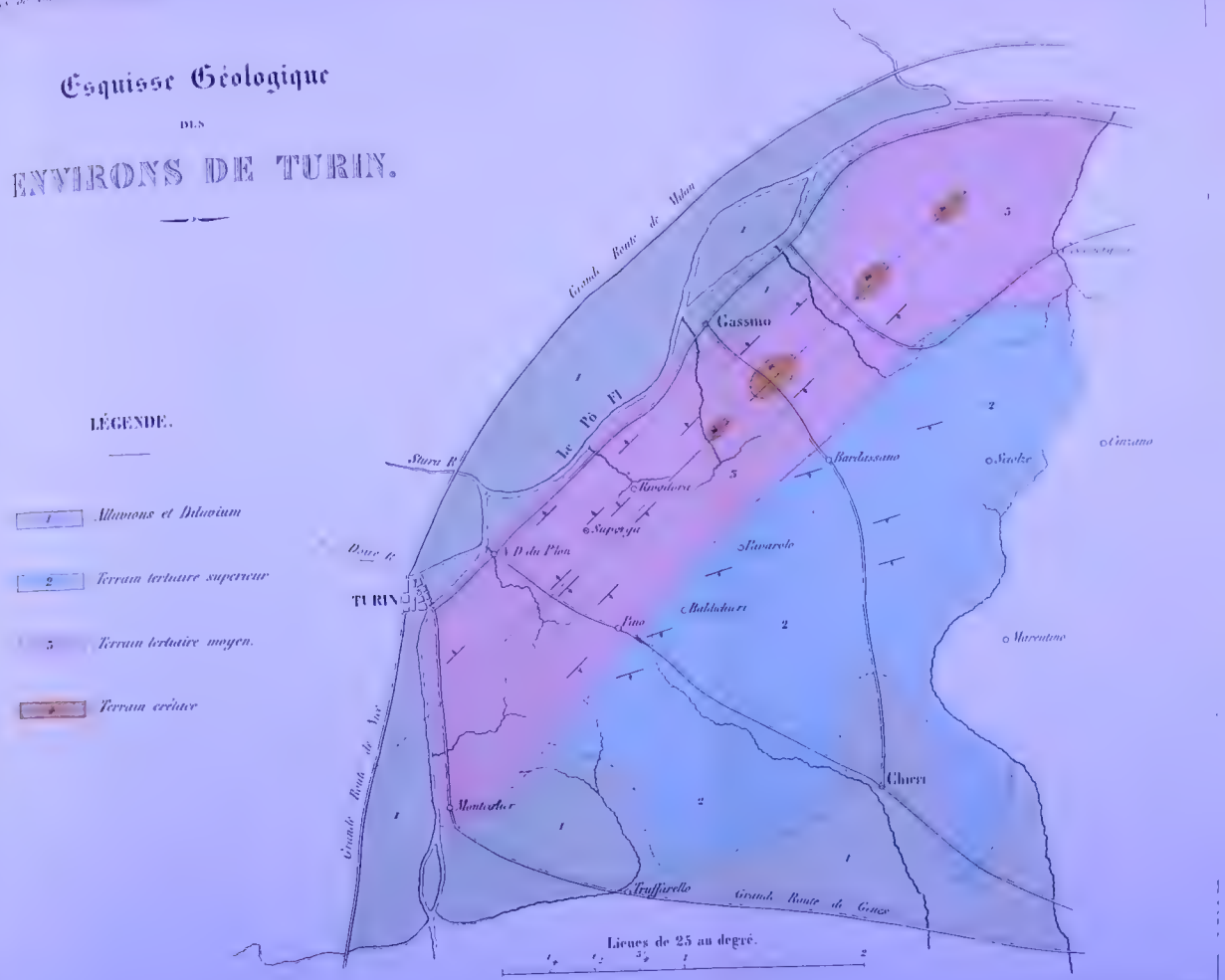






Imprimé en couleurs.

Esquisse Géologique
DES
ENVIRONS DE TURIN.



Lithographie de l'Imprimerie Nationale

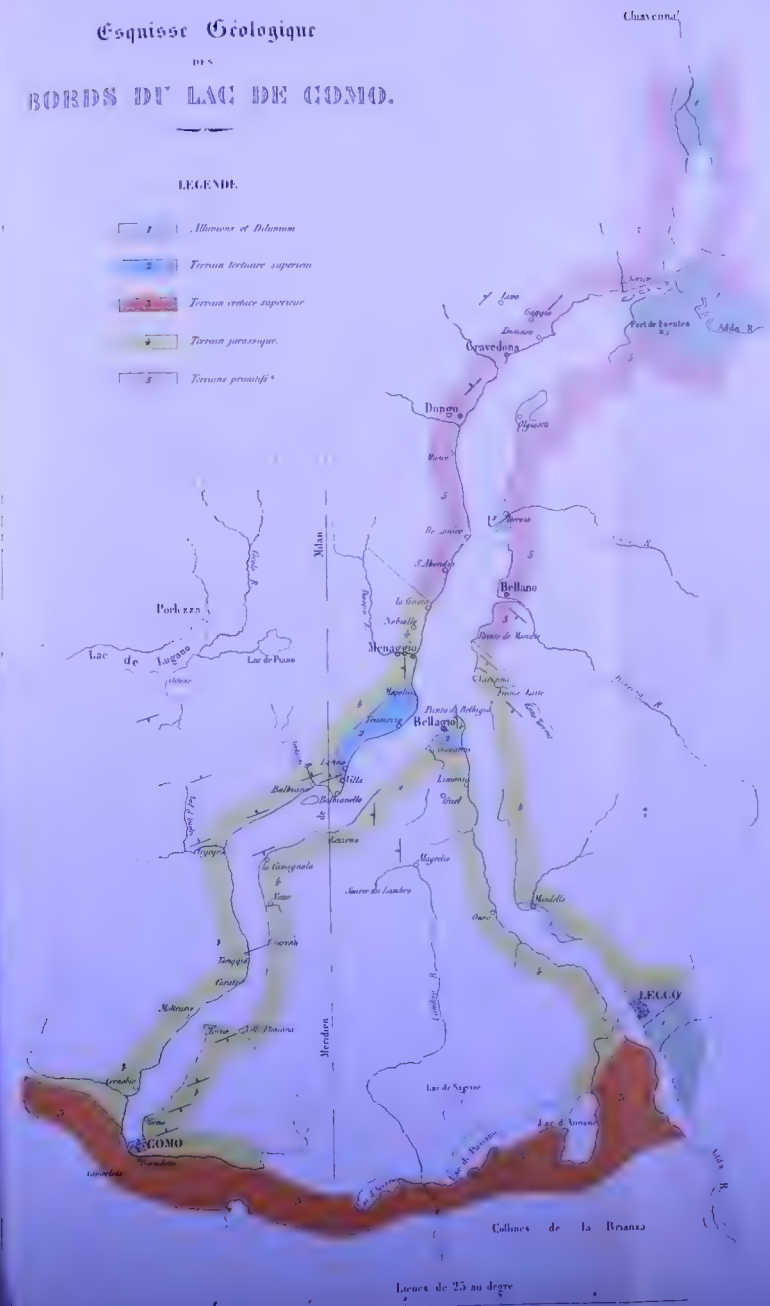
Esquisse Gé

DES

Esquisse Géologique
DES
BORDS DU LAC DE COMO.

LEGENDE.

1 Alluvions et Diluvium
2 Terrain tertiaire supérieur
3 Terrain crétacé supérieur
4 Terrain jurassique.
5 Terrains primitifs



rectes entre les éléments qu'on a à considérer dans le tir des canons et des obusiers.

Cette théorie suffirait dans les cas les plus importants de la pratique, si l'équation de la trajectoire représentait exactement le mouvement du projectile; mais, fondée sur une loi inexacte de la résistance de l'air, elle n'a pas présenté un accord suffisant avec les résultats de l'expérience.

Les formules obtenues dans l'hypothèse des petits angles de projection présentent, dans les applications au tir des bouches à feu, des exponentielles qui compliquent les calculs numériques et les rendent difficiles. Pour éviter cet inconvénient, on s'est contenté d'approximations souvent insuffisantes; de sorte que, même dans le cas du tir avec de gros projectiles, de faibles vitesses et à de courtes distances, cas du tir plongeant, le plus important à étudier et celui où la théorie de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse pouvait être particulièrement applicable, les formules n'ont pas présenté non plus l'exactitude désirable.

Il y avait donc à la fois inexactitude dans les formules du mouvement des projectiles, erreur dans l'expression de la loi de la résistance de l'air qui leur servait de base, et incertitude dans la grandeur des coefficients constants de cette expression. Dans cet état de choses, le désaccord entre les résultats des formules et les résultats de l'expérience ne présentait rien d'étonnant, et il était difficile de reconnaître à quelle cause il devait être plus particulièrement attribué.

L'utilité de nouvelles recherches sur la balistique, basées sur les lois plus exactes de la résistance de l'air, en fonction du carré et du cube de la vitesse du projectile, pour des angles quelconques et pour le cas des angles de projection que permettent les affûts des canons et des obusiers, se fait donc encore sentir, malgré les travaux d'un grand nombre de savants géomètres et d'officiers instruits. Chargé de professer le cours de balistique à l'école d'application, j'ai dû m'en occuper. Mais, si la loi simple de la résis-

tance proportionnelle au carré de la vitesse avait conduit à des solutions dont la complication avait engagé à modifier les formules et à se contenter d'un certain degré d'approximation, n'était-il pas à craindre que les nouvelles formules ne présentassent trop de difficultés dans les applications relatives au service de l'artillerie?

Ayant pu isoler les fonctions par lesquelles les équations de la trajectoire, celles des inclinaisons, de la vitesse et de la durée diffèrent des équations du mouvement dans le vide, les équations se sont trouvées de même forme que dans ce dernier cas; par suite, elles se sont prêtées à la solution très-facile des divers problèmes de balistique.

Les fonctions par lesquelles les formules du mouvement dans le vide et dans l'air diffèrent entre elles, dépendent du produit de la distance du but par le coefficient du carré de la vitesse dans l'hypothèse d'un seul terme pour l'expression de cette résistance; dans l'autre hypothèse, elles dépendent d'une fonction composée de la précédente et du produit de la vitesse, par le rapport des coefficients des deux termes de cette résistance.

Ces fonctions se présentant dans presque tous les problèmes de balistique, le calcul de leur valeur numérique se retrouve dans chaque cas particulier. Pour simplifier les applications au tir des bouches à feu et pour les rendre très-faciles, j'ai calculé des tables de ces fonctions, et je les ai disposées de telle sorte, qu'elles servent également bien pour tous les projectiles et pour une grandeur quelconque des coefficients de la résistance.

Ces fonctions sont dérivées les unes des autres ou dérivent de l'exponentielle, suivant des lois très-simples, et elles peuvent être considérées comme des fonctions générales, ayant une application particulière à la balistique. Au moyen des formules données dans ce mémoire, on résoudra facilement toutes les questions qu'on peut se proposer dans le tir des projectiles; et, au moyen des tables dont on vient de parler, on pourra en avoir la solution numérique avec une grande facilité et avec toute l'exactitude dé-

sirable. Dans le présent mémoire, je donne un extrait de l'une de ces tables pour montrer la facilité des applications numériques.

J'expose d'abord succinctement le résultat des recherches sur les lois de la résistance de l'air en ce qui se rapporte au mouvement des projectiles; j'expose ensuite les lois générales du mouvement de ces mobiles projetés sous un angle et avec une vitesse quelconques, lorsque la résistance de l'air est exprimée par deux termes respectivement proportionnels au carré et au cube de la vitesse du mobile. Je donne le moyen de calculer la trajectoire dans le cas le plus général, en la divisant en plusieurs grands arcs, et les tables particulières qui s'y rapportent; je distingue deux cas : celui du tir de très-gros projectiles, comme les bombes, aux distances habituelles où l'on en fait usage, et animés par suite de vitesses médiocres, et celui des projectiles projetés sous de petits angles au-dessus de l'horizon applicable au tir de plein fouet des canons et des obusiers. Je donne les formules nécessaires à la solution des divers problèmes qu'on peut avoir à résoudre; j'indique ensuite le cas plus particulier du tir à ricochet, qui a lieu sous de petits angles et avec de faibles vitesses, circonstance dans laquelle il est possible de représenter la résistance par un seul terme, à la condition, toutefois, de déterminer le coefficient de la résistance qui convient à chaque cas.

Je présente le résultat de ces recherches avec d'autant plus de confiance, que l'application d'une partie des formules a été confirmée par l'expérience. C'est ainsi qu'appliquées au tir de l'obusier de 22^{cm}, qu'a exécuté, en 1844, la commission des principes du tir de Metz, et en partant des vitesses initiales obtenues au moyen du pendule balistique avec des poudres de même espèce, elles ont fourni les angles de projection qu'on a employés dans le tir, et qu'elles ont présenté un accord très-remarquable avec les résultats directs de l'observation.

A la suite de ce mémoire, j'ai traité de la balistique dans la supposition qui avait été admise jusqu'à ces drniers temps, que la résistance était simplement proportionnelle au carré de la vitesse.

J'ai analysé les travaux des grands géomètres, Euler, Lambert, Tempelhoff, Legendre, Français qui s'en sont occupés, et j'ai indiqué quelques perfectionnements dont leurs méthodes sont encore susceptibles.

Je me propose de donner de plus le tracé général des trajectoires particulièrement applicable au tir des bombes, le tracé des trajectoires des boulets et des obus, et la solution graphique des divers problèmes qu'on peut se proposer.

RÉSISTANCE DE L'AIR AU MOUVEMENT DES PROJECTILES.

I.

La résistance que l'air fait éprouver aux projectiles, lorsqu'ils sont animés des vitesses qu'on leur imprime habituellement, exerce une grande action sur le mouvement de ces mobiles. On le reconnaît facilement en comparant entre eux les effets qu'on devrait obtenir sans cette résistance, et ceux qu'on obtient réellement dans le tir des projectiles; on reconnaît de même que cette action a d'autant plus d'importance que le projectile est d'un plus petit calibre ou d'une moindre densité, et qu'il est lancé avec une plus grande vitesse. Ainsi, une balle de fusil qui, dans le vide, devrait être lancée sous l'angle de 45°, pour donner la plus grande portée, doit l'être, dans l'air, sous l'angle de 25°. Avec la vitesse de 480 mètres par seconde, qui résulte de la charge ordinaire de guerre, la portée, qui serait dans le vide de 18,000 mètres, n'est que de 1000 environ, ou 18 fois moins grande; sous l'angle de 4° 1/2, la portée, qui devrait être de 3674^{m}, n'est que d'environ 600^{m} ou 6 fois moindre. Dans le tir des boulets, le rapport des portées est moins considérable, et pour les calibres de 8, 12, 16 et 24, lancés sous l'angle de 6° avec la vitesse de 485 mètres que la charge ordinaire de guerre imprime au boulet, le rapport des portées dans le vide et dans l'air varie de 3 à 2,5, suivant le ca-

libre. Dans le tir des bombes, l'influence de la résistance de l'air est encore moindre. Sous les angles de 45° et de 30°, la durée du trajet observée dans l'air dépasse celle qui aurait lieu dans le vide d'une faible quantité; enfin, on obtient des différences encore moindres quand on compare le rapport des portées des bombes, résultant de charges de poudre égales et des angles de projection de 45° et de 30°, avec celui des portées qu'on obtiendrait dans le vide, sous les mêmes angles, avec des vitesses égales.

2.

La recherche des lois de la résistance que les fluides opposent au mouvement des corps solides, présente de grandes difficultés, tant sous le point de vue mathématique que sous celui des expériences : aussi, malgré les travaux des plus célèbres géomètres, malgré les nombreuses expériences qui ont été faites anciennement et récemment, la question est loin d'être résolue d'une manière générale, surtout sous le rapport de la forme des corps; mais pour les mobiles employés par l'artillerie, qui sont généralement de forme sphérique, la question est beaucoup plus avancée. Cette question a été traitée, sous le point de vue général, par M. Poncelet. Ce savant géomètre, dans son introduction à la Mécanique industrielle, a groupé dans un ordre remarquable les faits nombreux relatifs à la résistance des fluides au mouvement des corps solides, et y a ajouté des considérations physiques fort importantes; il a ainsi jeté beaucoup de lumière sur cette question difficile.

Dans un mémoire que j'ai adressé à M. le ministre de la guerre le 10 mai 1845, j'ai donné à cette question l'étendue qu'elle comportait pour la balistique en général; ici, je ne m'en occuperai que d'une manière très-succincte, afin d'arriver promptement à l'expression de la résistance qu'éprouvent les projectiles dans l'air dont j'ai besoin pour établir les formules de balistique.

3. CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES.

Des considérations très-simples sur la manière dont les fluides

agissent sur les corps en mouvement[1] font voir que lorsqu'un corps chemine parallèlement à lui-même dans un fluide en repos, et qu'il est animé d'une faible vitesse, la résistance qu'il éprouve à chaque instant est proportionnelle à la densité du fluide, à la superficie de la projection de ce corps sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement et au carré de la vitesse; de façon qu'en représentant par δ, S et V, la densité du fluide, sa projection et la vitesse du mobile, par ϱ la résistance et par g la pesanteur, on aurait l'expression

$$\varrho = k\delta S \frac{V^2}{2g},$$

dans laquelle k est un nombre qui, dans chaque cas, devra être fourni par les données immédiates de l'expérience.

En considérant ensuite que pour des fluides gazeux, comme l'air atmosphérique, qui sont réductibles de volume sous l'influence de la pression, la densité est plus forte en avant du corps et plus faible en arrière que dans l'état d'équilibre du fluide, on voit comment pour de très-grandes vitesses, comme celles des projectiles de l'artillerie, la résistance croît d'une manière un peu plus rapide que le carré de la vitesse; de sorte que, dans l'expression ci-dessus, le coefficient k, ou la densité δ du fluide, devrait être augmenté d'une fraction proportionnelle elle-même à la vitesse, ce qui revient à ajouter un terme proportionnel au cube de cette même vitesse.

4. RÉSISTANCE DE L'AIR AUX FAIBLES VITESSES.

Les expériences de Hutton et celles de Borda, faites avec des appareils de rotation sur des surfaces planes, avaient fait voir que la résistance de l'air était effectivement proportionnelle au carré des vitesses lorsque celles-ci n'étaient pas considérables, et elles avaient porté à croire que cette résistance croissait plus ra-

[1] Introduction à la Mécanique industrielle, par J. V. Poncelet, deuxième édition, page 540.

pidement que la superficie. M. Thibault, par des expériences faites avec des appareils du même genre, fit voir que la résistance qu'éprouvait une même surface diminuait à mesure que sa distance à l'axe augmentait; de sorte qu'en passant à un mouvement de rotation d'un rayon de plus en plus grand, ce qui le rapproche de plus en plus du mouvement rectiligne, la résistance devient de moins en moins grande. Elle ne resterait sensiblement proportionnelle à cette superficie qu'autant que la dimension dans le sens perpendiculaire à l'axe serait proportionnelle à la distance de la surface à ce même axe; il résulte de là qu'en appliquant sans modification au cas du mouvement rectiligne le résultat des expériences faites avec un appareil de rotation, on estimait trop haut la résistance de l'air. Cependant, en se servant des résultats des expériences de M. Thibault sur des surfaces de différentes largeurs, on peut en déduire la résistance qu'éprouverait celle dont la largeur serait négligeable devant le rayon de rotation, et qui se confondrait ainsi avec le mouvement rectiligne.

En opérant avec les mêmes appareils sur des solides de différentes formes, on doit aussi trouver une résistance plus grande que celle qui aurait lieu dans le mouvement rectiligne. C'est ainsi que Hutton avait trouvé 0,594 pour le coefficient k de la résistance de l'air sur une sphère, dans l'expression

$$\varrho = k\delta S \frac{V^2}{2g},$$

tandis que les expériences entreprises par Newton sur la chute verticale dans l'air de globes en verre de même diamètre ont donné, d'après le calcul de Dubuat, $k = 0{,}537$ sous des vitesses de 0^m à 9^m par seconde [1].

Dans des expériences sur le mouvement rectiligne vertical de sphères dans l'eau exécutées à Metz en 1836 [2], on a trouvé que

[1] Introduction à la Mécanique industrielle, par J. V. Poncelet, page 65.

[2] Mémoire présenté au concours pour le grand prix de mathématiques de l'Institut, par MM. Piobert, Morin et Didion.

pour des sphères de $0^m,118$, $0^m,129$, $0^m,148$, 0^m162, le coefficient de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, et rapporté à une section d'un mètre carré, était respectivement 21,2, 21,2, 22,4, 22,9. D'après le résultat de ces expériences, la résistance paraît ne varier que très-peu avec l'étendue des surfaces dans les limites des dimensions des boulets et des obus en usage.

5. RÉSISTANCE DE L'AIR AUX GRANDES VITESSES.

Ce qui précède ne se rapporte qu'à la résistance aux faibles vitesses; lorsqu'il s'agit de mesurer la résistance aux vitesses beaucoup plus grandes, on emploie un procédé particulier. Ce procédé consiste, comme on sait, à mesurer, à deux distances différentes d'une bouche à feu, la vitesse de deux projectiles ayant la même vitesse initiale. En comparant la force vive perdue à l'étendue du chemin parcouru, on déduit la résistance moyenne qu'a éprouvée le projectile animé de la vitesse moyenne entre les deux vitesses observées.

6. RÉSULTATS DE HUTTON.

Hutton, dans les années 1783 à 1790, a fait avec un pendule balistique des expériences de ce genre; elles ont été étendues : pour le boulet de 1 livre, depuis 100^m jusqu'au delà de 600^m par seconde; avec le boulet de 3 livres, depuis la vitesse de 275^m jusqu'à celle de 520^m, et pour le boulet de 6 livres, depuis 365^m jusqu'à 550^m. Hutton en a déduit les résistances correspondantes aux vitesses des projectiles, d'après lesquelles la résistance croîtrait plus rapidement que le carré de la vitesse. Cette résistance, exprimée par le coefficient k de la formule citée plus haut, est approximativement[1] :

Vitesses (m. par sec.).	1	3	5	10	25	50	100	200	300	400	500	600
Valeurs de k.....	0,59	0,61	0,62	0,65	0,67	0,69	0,71	0,77	0,88	0,99	1,04	1,01

[1] Introduction à la Mécanique, etc. page 616.

Les nombres qui représentent les résistances ont été obtenus par des méthodes d'interpolation imparfaite, et ces résultats ne s'accordent pas avec les effets naturels, surtout pour les faibles et pour les grandes vitesses. M. le colonel Piobert a remarqué que, pour les grandes vitesses, le coefficient de la résistance avait été déterminé par des résultats trop faibles; de sorte que l'existence d'un maximum n'est pas démontrée. Quant aux faibles vitesses, le coefficient a été déterminé d'après les résultats obtenus dans le mouvement circulaire; ils sont par cela même trop grands quand on les applique au mouvement rectiligne. Hutton, dans ce cas, ne tenait pas compte de l'influence qui pouvait être due à la grandeur du diamètre des projectiles.

7. FORMULE DE M. LE COLONEL PIOBERT.

M. le colonel Piobert, reprenant les résultats immédiats des expériences de Hutton sur les boulets, et non les résultats portés dans les tableaux des vitesses dites régulières, en a construit une courbe dont les ordonnées représentaient les vitesses successives que possédait le boulet en traversant des couches d'air proportionnelles aux abscisses et il a obtenu des résultats réguliers. Les résultats relatifs au boulet en fonte de 1 livre ou de $0^{m}04996$ de diamètre et exprimés en mesures métriques sont contenus dans le tableau suivant :

Vitesses en mètres...	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
Résistance en kilogr.	0,81	1,95	3,68	6,10	9,35	13,50	18,50	24,60	31,80	40,30	50,00

Ce tableau fait voir que les résistances croissent plus rapidement que les carrés des vitesses, et M. Piobert a reconnu que, par l'addition d'un terme proportionnel au cube des vitesses, on représentait assez bien ces résultats, de façon que le carré de la vitesse devait être remplacé par $V^2 + BV^3$, et que la valeur de $B = 0{,}0017$ satisfaisait assez bien pour toutes les vitesses.

La discussion approfondie et comparative des résultats fournis

directement par les expériences de Robins et de Hutton, sur les projectiles de petit calibre, et par celles de Newton, Desaguiliers, Borda, sur les sphères d'un plus grand diamètre, animées de petites vitesses, a conduit M. Piobert à regarder la résistance comme croissant plus rapidement que l'étendue des surfaces; de sorte que la superficie s du grand cercle devrait être remplacée par le terme $s\sqrt{0{,}012\,s + 0{,}00121}$, le mètre étant l'unité de longueur, et qu'en faisant pour abréger $n = s\sqrt{0{,}012\,s + 0{,}00121}$, en négligeant un terme très-petit indépendant de la vitesse, et qui est tout à fait négligeable quand il s'agit du mouvement des projectiles, on a

$$\varphi = mV^3 + nV^2.$$

Dans cette hypothèse, M. Piobert a trouvé la relation entre les longueurs ou les durées du trajet et les vitesses de projectile dans le mouvement rectiligne, abstraction faite de la pesanteur[1].

8. FORMULE MODIFIÉE.

La formule de M. le colonel Piobert, basée en partie sur le résultat des expériences de Hutton aux petites vitesses avant qu'on eût reconnu l'influence du mouvement circulaire sur la valeur de la résistance, devait par cela même donner des résultats un peu trop forts pour les gros projectiles et pour les faibles vitesses, ainsi que ce savant officier l'a reconnu lui-même[2].

En 1840, en comparant la formule de M. le colonel Piobert au résultat des expériences de la commission des principes du tir, faites en 1839 au moyen du pendule balistique pour déterminer la résistance de l'air au mouvement des projectiles de l'artillerie, j'avais aussi reconnu[3] que cette formule donnait des résultats trop forts pour les gros projectiles de l'artillerie.

[1] Introduction à la Mécanique, par J. V. Poncelet, page 651, et mémoire cité.

[2] *Ibid.* page 620.

[3] *Mémoires sur les vitesses initiales des projectiles*, présentés au comité d'artillerie, septembre 1840.

Les expériences faites par la commission des principes du tir de Metz en 1840, sur le tir des boulets de 8, de 12, de 24 et d'obus de 22^{cm}, tirés à diverses distances sur un pendule balistique avec des vitesses qui ont dépassé celles dont on fait habituellement usage, ne laissent aucun doute sur le fait que la résistance croît plus rapidement que le carré des vitesses. L'ensemble des expériences m'a donné pour expression de la résistance sur les gros projectiles, à la température et à la pression moyenne de l'air durant l'été à la densité 1,174,

$$\varrho = 0{,}024\pi R^2 (1 + 0{,}0023V)V^2.$$

Dans cette expression, le coefficient du carré de la vitesse est diminué comparativement à celui qui a été indiqué plus haut, et le rapport des coefficients est augmenté.

M. le colonel Piobert, en reprenant les expériences de Hutton, faites avec des boulets de 1 livre et de 2 livres, et quelques-unes avec des boulets de 6 livres, a trouvé aussi que la résistance était moyennement mieux représentée par l'expression

$$\varrho = 0{,}030586\pi R^2 (1 + 0.0023V)V^2.$$

Il est très-remarquable que les coefficients du cube et du carré de la vitesse soient exactement dans le même rapport, quoique provenant d'expériences faites en des lieux différents et avec des calibres différents : on peut donc admettre avec sécurité 0,0023 pour ce rapport. Quant au coefficient du carré de la vitesse, il présente une différence qui peut tenir à la grandeur du calibre ou à d'autres circonstances; mais quand il s'agira des gros projectiles de l'artillerie, il nous semble que, sans rien préjuger sur l'influence que peut avoir la dimension du projectile sur ce coefficient[1], en tenant compte, toutefois, de la différence de densité de

[1] D'après des recherches faites postérieurement à la présentation de ce mémoire, j'ai été conduit à prendre, pour la densité moyenne de l'air dans l'année 0.208, le coefficient du carré de la vitesse égal à 0,027, pour des boulets de 0^m, 13 de diamètre, et à le faire varier

l'air, on devra prendre de préférence le coefficient résultant des expériences de Metz, ou un nombre intermédiaire pour les plus petits.

En tous cas, nous devons admettre que la résistance de l'air peut être représentée par la somme de deux termes respectivement proportionnels au carré et au cube de la vitesse du mobile, et que cette résistance sera, en général,

$$\varrho = A\pi R^2 \left(1 + \frac{V}{r}\right) V^2.$$

Pour les recherches analytiques dont nous nous sommes occupés, il nous suffit que cette expression soit admise; mais il est nécessaire d'avoir les valeurs numériques pour les applications. Celles que nous donnons pourraient être modifiées sans que nos formules et nos tables perdissent de leur utilité.

MOUVEMENT DES PROJECTILES SOUS LES GRANDS ANGLES DE PROJECTION.

9. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

La solution générale de la question du mouvement d'un projectile dans l'air a été regardée comme un des plus difficiles problèmes d'analyse. Il a été à plusieurs reprises proposé au concours par les sociétés savantes, et, les géomètres les plus distingués ont essayé de vaincre les difficultés qu'il présente; Euler, Lambert, Bezout, Borda, Tempelhof, Legendre, Français, l'ont attaqué par des méthodes savantes et profondes, dans l'hypothèse de la résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse du mobile; cependant, aucune méthode rigoureuse n'a pu jusqu'ici exprimer une relation finie entre l'angle de projection, la vitesse initiale et l'amplitude du jet; peut-être même ne pourra-t-on jamais résoudre cette question dans toute sa rigueur; aussi l'on a dû recourir à des méthodes d'approximation. Dans les unes, on a rejeté des quantités qui embarrassent le calcul et qui ne sem-

avec le calibre, de manière à représenter le résultat des expériences de Hutton. On s'occupe encore dans l'artillerie d'expériences à ce sujet.

blent pas influer d'une manière sensible sur les résultats; dans les autres, les résultats ont été exprimés par des séries qu'on est dans l'impuissance de remplacer par des expressions finies.

Si les difficultés du problème du mouvement des projectiles dans un milieu résistant ont été aussi grandes lorsqu'on a supposé la résistance simplement proportionnelle au carré de la vitesse, quelles ne devront pas être celles que présenterait ce même problème dans l'hypothèse d'une résistance exprimée par deux termes? On ne peut donc espérer que de le résoudre par approximation.

Dans l'espèce et le degré d'approximation que nous rechercherons, nous aurons toujours en vue les applications utiles, et nous éviterons de compliquer outre mesure les formules, dans le seul but d'embrasser des cas qui ne se rencontrent pas dans l'application. C'est peut-être pour n'avoir pas été assez pénétrés de cette idée que les géomètres distingués qui se sont occupés de balistique, et en particulier Legendre, n'ont pas amené cette science au degré d'utilité qu'elle devrait avoir atteint. Nous considérerons néanmoins le cas le plus général du tir sous de très-grands angles de projection et avec de très-grandes vitesses, quoiqu'on en fasse peu d'application, à cause de l'incertitude d'un tel tir; mais nous nous attacherons plus particulièrement au cas des vitesses modérées, le plus habituellement usitées dans le tir sous les grands angles de projection, et au cas de grandes vitesses sous les petits angles[1].

Dans ces deux cas, il n'est pas possible de représenter la résistance par un seul terme proportionnel au carré de la vitesse, même en déterminant le coefficient de la résistance pour chaque cas particulier, parce que la vitesse est trop variable depuis le point de départ jusqu'au point d'arrivée. Dans le tir sous 45°, par exemple, cette vitesse varie dans un rapport plus grand que celui de 1 à $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou d'environ 10 à 7; par suite, les formules auxquelles

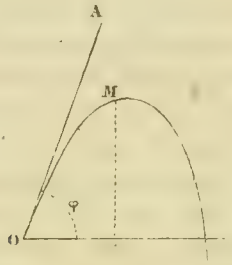
[1] Dans un mémoire adressé au comité de l'artillerie, mai 1844, nous avons déjà traité des lois de la résistance de l'air et du mouvement des projectiles dans le cas des petits angles de projection. Dans un second mémoire, en 1845, nous avons traité le tir sous les grands angles.

sont arrivés les savants géomètres dont nous avons parlé, reposant sur une loi inexacte de la résistance de l'air, ne peuvent pas représenter exactement le mouvement des projectiles. La question analytique, sous ce rapport, présente donc des difficultés nouvelles plus grandes que celles que l'on a déjà surmontées.

10. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA TRAJECTOIRE.

Soit O le point de départ du projectile, V sa vitesse initiale

Fig. 1.



suivant OA, φ l'angle de projection au-dessus du plan horizontal, h la hauteur due à cette vitesse, P le poids du projectile, R son rayon, D sa densité, x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque M de la trajectoire; soit de plus s la longueur de l'arc OM, t le temps employé à le parcourir, v la vitesse au point M, θ l'inclinaison de la tangente à la trajectoire ou de la direction du mouvement du projectile au même point; faisons $p = \frac{dy}{dx}$, on aura $p =$ tang. θ, cos. $\theta = \frac{dx}{ds}$, sin. $\theta = \frac{dy}{ds}$, et $v = \frac{ds}{dt}$; soit encore g la pesanteur, ou la vitesse acquise par un corps après la première seconde de sa chute dans le vide et ϱ la valeur de la résistance de l'air, que nous savons être représentée par une expression de la forme $\varrho = nv^2\left(1 + \frac{v}{r}\right)$, dans laquelle $n = A\pi R^2$ et $A = \frac{k\delta}{2g}$, δ étant la densité de l'air, k et r des coefficients déterminés par l'expérience. $\frac{P}{g}$ étant la masse du projectile, la force accé-

lératrice due à la résistance de l'air sera $\varphi\frac{\delta}{P}$, que nous représenterons par φ'; les composantes horizontales et verticales de cette résistance seront $\varphi'\frac{dx}{ds}$ et $\varphi'\frac{dy}{ds}$.

La direction initiale du projectile étant comprise dans le plan vertical des coordonnées, la pesanteur agissant dans ce plan et aucune autre force que la résistance de l'air n'ayant action sur le projectile, celui-ci ne sortira pas de ce plan; on aura donc pour les deux équations du mouvement, parallèlement à chacun des axes des coordonnées,

$$(a)\quad d\frac{dx}{dt}+\varphi'\frac{dx}{ds}dt=o \quad\text{et}\quad d\frac{dy}{dt}+\varphi'\frac{dy}{ds}dt+gdt=o \quad (b).$$

Observons que si le poids P était celui du mobile mesuré dans le vide, le poids dans l'air serait diminué du poids d'un volume d'air égal à celui du corps ou de $P\frac{\delta}{D}$; par conséquent, le poids P devrait être remplacé par $P\left(1-\frac{\delta}{D}\right)$ et la force accélératrice due à la pesanteur par $g\left(1-\frac{\delta}{D}\right)$; mais, pour les projectiles de l'artillerie, le rapport $\frac{\delta}{D}$ est assez petit pour qu'on puisse le négliger devant l'unité.

Effectuant la différentiation, en regardant dx comme constant, on tire de l'équation (a)

$$\frac{d^2t}{dt^2}-\varphi'\frac{dt}{ds}=0.$$

Observant que $dy=pdx$, et que, par suite, $d^2y=dpdx$, la différentiation de l'équation (b) donnera

$$\frac{dpdx^2}{dt}-\frac{dyd^2t}{dt^2}+\varphi'\frac{dy}{ds}dt+gdt=0.$$

Ajoutant membre à membre à cette équation la précédente multipliée par dy, on aura

$$(1)\qquad \frac{dp.dx}{dt}+gdt=0,\ \text{ou}\ dpdx+gdt^2=0.$$

Cette équation, comme on voit, est indépendante de φ' et subsiste, quelle que soit la relation de la résistance à la vitesse.

En différentiant cette équation, puis en tirant la valeur de d^2t, divisant celle-ci par la valeur de dt^2 tirée de l'équation (1) elle-même, on aura

$$\frac{d^2t}{dt^2} = \frac{d^2p}{2dp.dt}.$$

Soustrayant cette équation de l'équation $\frac{d^2t}{dt^2} - \varphi'\frac{dt}{ds} = 0$, on aura

$$\varphi'\frac{dt}{ds} = \frac{d^2p}{2dp.dt}.$$

Or, en faisant $2c = \frac{P}{ng}$ et en remplaçant v par $\frac{ds}{dt}$, on a

$$\varphi' = \frac{1}{2c}\frac{ds^2}{dt^2}\left(1 + \frac{1}{r}\frac{ds}{dt}\right).$$

L'équation $\varphi'\frac{dt}{ds} = \frac{d^2p}{2dpdt}$ devient donc

$$\frac{1}{2c}\frac{ds}{dt}\left(1 + \frac{1}{r}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2p}{2dpdt}.$$

Tirant de cette équation la valeur de $\frac{ds}{dt}$ et élevant au carré, on aura

$$\frac{ds^2}{dt^2} = r^2\left(\frac{cd^2p}{ds.dp} - 1\right)^2;$$

en substituant à dt^2 sa valeur tirée de l'équation générale $dpdx + gdt^2 = 0$, on aura

$$\left(\frac{cd^2p}{ds.dp} - 1\right)^2 = -\frac{y}{r^2}\frac{ds^2}{dp.dx}.$$

Enfin, remplaçant ds par sa valeur $dx\sqrt{1+p^2}$, puis p par $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$

par $\frac{dy^2}{dx^2}$, $\frac{d^2p}{dx^2}$ par $\frac{dy^2}{dx^2}$, on aura pour l'équation de la trajectoire

$$\left(\frac{c\,d^2p}{dp\sqrt{1+p^2}\,dx} - 1\right)^2 = -\frac{g}{r^2}\frac{(1+p^2)dx}{dp} \text{ ou } \left(c\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right)^2 + \frac{g}{r^2}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Cette équation est trop compliquée pour que les moyens connus d'intégration permettent d'arriver à une expression finie entre x et y.

Si l'on fait $\frac{1}{r} = 0$, ce qui est le cas de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, l'équation précédente devient simplement

$$cd^2p - dpdx\sqrt{1+p^2} = 0. \qquad (2)$$

C'est sur le système des deux équations (1) et (2) qu'ont été fondées jusqu'ici les recherches entreprises pour la solution du problème balistique. Elles n'ont pu conduire, même dans ce cas simple, les grands géomètres Bernouilly, Euler, Lambert, Tempelhof, Français, qu'à des valeurs approximatives ou exprimées par des suites infinies, dont ils ont calculé un certain nombre de termes et qui forceraient dans les applications à des calculs numériques très-pénibles. Ces difficultés n'ont pu être évitées par Borda, Bezout, Legendre et Français, qu'au moyen de formules dont le degré d'approximation a dépendu des complications auxquelles ils ont consenti à s'astreindre. Nous essayerons de suivre une marche différente, et qui nous conduise plus promptement aux résultats que nous cherchons.

11. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'UN ARC DE TRAJECTOIRE.

Reprenons les équations premières (*a*) et (*b*) du mouvement.

$$d\frac{dx}{dt} + \varphi'\frac{dx}{ds}dt = 0 \text{ et } d\frac{dy}{dt} + \varphi'\frac{dy}{ds}dt + gdt = 0.$$

Effectuant la différentiation, en regardant dt comme constant, remplaçant ϱ' par sa valeur $\frac{gnv^2}{P}\left(1+\frac{v}{r}\right)$, et faisant comme précédemment $2c=\frac{P}{ng}$, on aura

$$(3)\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{2c}v^2\left(1+\frac{v}{r}\right)\frac{dx}{ds} \text{ et } \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{2c}v^2\left(1+\frac{v}{r}\right)\frac{dy}{ds}-g.. (4).$$

L'équation (4), par la substitution de la valeur du facteur de $\frac{dx}{ds}$ de l'équation (3), devient

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{ds}{dx}\frac{dy}{ds}=-g+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx};$$

or, on a $dy=pdx$ ou $\frac{dy}{dt}=p\frac{dx}{dt}$, d'où, en différentiant, $\frac{d^2y}{dt^2}=p\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}$ et, par conséquent, en substituant $\frac{d^2y}{dt^2}$ et en observant que $p=\frac{dy}{dx}$, on aura

$$(5)\qquad \frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}=-g.$$

Pour faire disparaître la différentielle du temps et avoir une équation de la trajectoire, reprenons l'équation (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{2c}v^2\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{dx}{ds}.$$

La valeur de $\frac{ds}{dx}$, qui représente le rapport d'un élément de l'arc de la trajectoire à sa projection, est variable d'un point à l'autre de la courbe; mais lorsque l'on ne considérera qu'une certaine étendue de l'arc décrit, on pourra remplacer la valeur variable de $\frac{ds}{dx}$ par sa valeur moyenne dans l'étendue de l'arc, c'est-à-dire par le rapport de l'arc entier s à sa projection x; soit α ce rapport. Puisque la vitesse v est égale à $\frac{ds}{dt}$ ou à $\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}$, on aura aussi $v=\alpha\frac{dx}{dt}$: d'après cela, l'équation d'un arc limité de longueur sera

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\alpha}{2c}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(1+\frac{\alpha}{r}\frac{dx}{dt}\right),$$

et en représentant par v_1 la composante horizontale $\frac{dx}{dt}$ de la vitesse en chaque point, on aura

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{\alpha}{2c} v_1^2 \left(1 + \frac{\alpha}{r} v_1\right);$$

et puisque $\frac{dx}{dt} = v_1$, on aura aussi, en divisant membre à membre,

$$\frac{dv_1}{dx} = -\frac{\alpha}{2c} v_1 \left(1 + \frac{\alpha}{r} v_1\right).$$

Ces équations donnent la valeur de dx et de dt en fonction de v_1, et on peut les intégrer; en effet, on aura par les procédés connus[1]

$$dx = -\frac{2c}{\alpha} \frac{dv_1}{v_1\left(1 + \frac{\alpha}{r} v_1\right)} = -\frac{2c}{\alpha} \left\{ \frac{dv_1}{v_1} - \frac{\alpha}{r} \frac{dv_1}{1 + \frac{\alpha}{r} v_1} \right\},$$

d'où

$$x = -\frac{2c}{\alpha} \left\{ \log. v_1 - \log.\left(1 + \frac{\alpha}{r} v_1\right) \right\} + \text{cons.} = \frac{2c}{\alpha} \log. \frac{1 + \frac{\alpha}{r} v_1}{v_1} + \text{const.}$$

Déterminant la constante par la condition que la vitesse initiale soit V, c'est-à-dire qu'à la fois x soit o et que la valeur de v_1 soit la composante horizontale de cette vitesse ou $V\cos.\varphi$, que nous représenterons par V_1, on aura

$$x = \frac{2c}{\alpha} \log. \frac{V_1\left(1 + \frac{\alpha}{r} v_1\right)}{v_1\left(1 + \frac{\alpha}{r} V_1\right)} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2c}{\alpha} \log. \frac{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{v_1}}{1 + \frac{r}{\alpha}\frac{1}{V_1}},$$

d'où l'on tire la valeur de v_1 ou de $\frac{dx}{dt}$,

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{V_1}{e^{\frac{\alpha x}{2c}}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right) - \frac{\alpha V_1}{r}}$$

[1] Si l'expression de φ contenait d'autres puissances de la vitesse que la deuxième et la troisième, on obtiendrait également celle de dx en fonction rationnelle de v_1 et son intégrale.

élevant cette quantité au carré, et divisant membre à membre avec l'équation (5), on aura pour l'équation d'un arc de la trajectoire

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{V_1^2}\left\{e^{\frac{\alpha x}{2c}}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)-\frac{\alpha V_1}{r}\right\}^2. \tag{6}$$

12. ÉQUATION FINIE D'UN ARC DE LA TRAJECTOIRE.

Faisant passer dx dans le deuxième membre, développant le carré et remplaçant $\frac{g}{V_1^2}$ ou $\frac{g}{V^2\cos^2\varphi}$ par $\frac{1}{2h\cos^2\varphi}$, on aura

$$dp = -\frac{1}{2h\cos^2\varphi}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2 e^{\frac{\alpha x}{c}} - 2e^{\frac{\alpha x}{2c}}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha}{r}V_1 + \frac{\alpha^2}{r^2}V_1^2\right\}dx;$$

intégrant et déterminant la constante par la condition qu'on ait à la fois $x = 0$ et $p = \text{tang. }\varphi$, on aura, puisque $p = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang. }\varphi - \frac{1}{2h\cos^2\varphi}\left\{\frac{c}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-1\right)-\frac{4c}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}\left(e^{\frac{\alpha x}{2c}}-1\right)+\frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}x\right\};$$

faisant passer dx dans le deuxième membre, intégrant et déterminant la constante par la condition que l'on ait à la fois $x = 0$ et $y = 0$, on aura

$$y = x\,\text{tang. }\varphi - \frac{1}{2h\cos^2\varphi}\left\{\frac{c^2}{\alpha^2}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{\alpha x}{c}-1\right)\right.$$
$$\left.-\frac{8c^2}{\alpha^2}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}\left(e^{\frac{\alpha x}{2c}}-\frac{\alpha x}{2c}-1\right)+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}x^2\right\};$$

en mettant cette expression sous la forme

$$y = x\,\text{tang. }\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{\alpha x}{c}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2}-2\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}\frac{e^{\frac{\alpha x}{2c}}-\frac{\alpha x}{2c}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)^2}+\frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}\right\}.$$

En représentant par une même caractéristique F la forme des

fonctions de x, qui multiplient $\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$ et $\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)$, et qui ne diffèrent entre elles qu'en ce que $\frac{\alpha x}{c}$ est remplacé par $\frac{\alpha x}{2c}$, c'est-à-dire écrivant

$$F\left(\frac{\alpha x}{c}\right)=\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}-\frac{\alpha x}{c}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2} \text{ et } F\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)=\frac{e^{\frac{\alpha x}{2c}}-\frac{\alpha x}{2c}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)^2},$$

l'équation de la trajectoire deviendra

$$y=x\,\text{tang.}\varphi-\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2 F\left(\frac{\alpha x}{c}\right)-2\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}F\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)+\frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}\right\}.$$

Telle est l'équation d'un arc de la trajectoire dans l'air lorsque la résistance de ce fluide est exprimée par deux termes proportionnels, l'un au carré, l'autre au cube de la vitesse.

Si l'on compare cette équation à celle de la trajectoire dans le vide, qui est, comme on sait,

$$y=x\,\text{tang.}\varphi-\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi},$$

on verra qu'elle en diffère en ce que le second terme est multiplié par une certaine fonction de x et de V_1 divisés respectivement par les constantes $\frac{c}{\alpha}$ et $\frac{V}{\alpha}$. En représentant cette fonction par $\psi(x, V_1)$, c'est-à-dire en écrivant

$$\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2 F\left(\frac{\alpha x}{c}\right)-2\frac{\alpha V_1}{r}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)F\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)+\frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}=\psi(x, V_1),$$

l'équation de l'arc de la trajectoire deviendra simplement

$$y=x\,\text{tang.}\varphi-\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(x, V_1).$$

13. INCLINAISON, DURÉE, VITESSE.

La valeur de l'inclinaison de la trajectoire en un point quel-

conque s'exprime aussi très-facilement au moyen de la valeur précédente de p, qui n'est autre que tang. θ : on aura donc

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\varphi - \frac{1}{2h\cos^2\varphi}\left\{\frac{c}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2\left(e^{\frac{\alpha x}{c}}-1\right) - \frac{4c}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}\left(e^{\frac{\alpha x}{2c}}-1\right) + \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}x\right\},$$

expression qu'on peut mettre sous la forme

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}-1}{\frac{\alpha x}{c}}\right) - 2\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{2c}}-1}{\frac{\alpha x}{2c}}\right) + \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}\right\}.$$

En représentant par la caractéristique F' les fonctions de x qui entrent dans les deux premiers termes sous la parenthèse, c'est-à-dire en écrivant $\dfrac{e^{\frac{\alpha x}{c}}-1}{\frac{\alpha x}{c}} = \mathrm{F'}\left(\dfrac{\alpha x}{c}\right)$ et $\dfrac{e^{\frac{\alpha x}{2c}}-1}{\frac{\alpha x}{2c}} = \mathrm{F'}\left(\dfrac{\alpha x}{c}\right)$, on aura

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2 \mathrm{F'}\left(\frac{\alpha x}{c}\right) - 2\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}\mathrm{F'}\left(\frac{\alpha x}{2c}\right) + \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}\right\}.$$

Enfin, en remarquant que la quantité comprise entre parenthèses est composée avec $\mathrm{F'}\left(\dfrac{\alpha x}{c}\right)$ comme la fonction ψ qui se trouve dans l'équation de la trajectoire l'est avec $\mathrm{F}\left(\dfrac{\alpha x}{c}\right)$, nous pourrons la désigner par ψ' et écrire

$$\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2 \mathrm{F'}\left(\frac{\alpha x}{c}\right) - 2\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}\mathrm{F'}\left(\frac{\alpha x}{2c}\right) + \frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2}\ \psi' = (x, V_1).$$

L'expression de la tangente en un point quelconque de la trajectoire sera donc simplement

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\,\psi'\,(x, V_1).$$

Dans le vide on aurait, comme on sait,

$$\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}.$$

L'expression de l'inclinaison dans l'air ne diffère donc de celle-ci qu'en ce que l'abaissement angulaire $\frac{x}{2h\cos^2\varphi}$ doit être multiplié par la fonction $\psi'(x, V_1)$.

14. La durée du trajet en fonction de la vitesse du projectile se déduit de l'équation

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{\alpha}{2c} v^2\left(1+\frac{\alpha}{r}v_1\right),$$

d'où l'on tire, par les procédés connus,

$$dt = -\frac{2c}{\alpha}\frac{dv_1}{v_1^2\left(1+\frac{\alpha}{r}v_1\right)} = -\frac{2c}{\alpha}\left\{\frac{dv_1}{v_1^2} - \frac{\alpha}{r}\frac{dv_1}{v_1} + \frac{\alpha^2}{r^2}\frac{dv_1}{1+\frac{\alpha}{r}v_1}\right\};$$

et en intégrant

$$t = \frac{2c}{\alpha}\left\{\frac{1}{v_1} + \frac{\alpha}{r}\log.v_1 - \frac{\alpha}{r}\log.\left(1+\frac{\alpha}{r}v_1\right)\right\} + \text{const.} = \frac{2c}{\alpha}\left\{\frac{1}{v_1} - \frac{\alpha}{r}\log.\frac{1+\frac{\alpha}{r}v_1}{v_1}\right\} + \text{const.}$$

Déterminant la constante par la condition qu'au commencement du mouvement, t soit égal à zéro, et que v_1 soit la composante horizontale de la vitesse initiale ou $V\cos.\varphi = V_1$, on aura

$$t = \frac{2c}{\alpha}\left\{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{V_1} - \frac{\alpha}{r}\log.\frac{V_1\left(1+\frac{\alpha}{r}v_1\right)}{v_1\left(1+\frac{\alpha}{r}V_1\right)}\right\} = \frac{2c}{\alpha}\left\{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{V_1} - \frac{\alpha}{r}\log.\frac{2+\frac{r}{\alpha}\frac{1}{v_1}}{1+\frac{r}{\alpha}\frac{1}{V_1}}\right\},$$

en vertu de la valeur précédente de x, la valeur de t se simplifie et devient

$$t = \frac{2c}{\alpha}\left\{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{V_1}\right\} - \frac{\alpha}{r}x.$$

Si, de plus, on substitue à v_1 sa valeur en fonction de x, on aura pour la valeur de t,

$$t = \frac{2c}{\alpha V_1}\left(1+\frac{\alpha}{r}V_1\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{2c}} - 1\right) - \frac{\alpha}{r}x.$$

On arrive plus directement à cette relation en partant de la valeur de v_1 ou $\frac{dx}{dt}$(4); en la renversant, on obtient

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{V_1} e^{\frac{\alpha x}{2c}} \left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right) - \frac{x}{r};$$

en intégrant et déterminant la constante de façon qu'on ait a la fois $x = o$ et $t = o$, il vient, comme ci-dessus,

$$t = \frac{2c}{\alpha V_1} \left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{2c}} - 1\right) - \frac{\alpha x}{r}.$$

En mettant cette expression sous la forme

$$t = \frac{x}{V_1}\left\{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{e^{\frac{\alpha x}{2c}} - 1}{\frac{\alpha x}{2c}} - \frac{\alpha V_1}{r}\right\},$$

on reconnaîtra que le facteur de $1 + \frac{\alpha V_1}{r}$ est ce que nous avons représenté par la fonction $F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)$, de sorte qu'on aura, en se rappelant que $V_1 = V\cos.\varphi$,

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi}\left\{\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right) F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right) - \frac{\alpha V_1}{r}\right\}.$$

Si l'on compare cette expression de la durée à celle qui aurait lieu dans le vide, qui est, comme son sait, $t = \frac{x}{V\cos\varphi}$, on verra qu'elle n'en diffère qu'en ce que celle-ci doit être multipliée par le facteur entre parenthèses, qui est une fonction particulière de $F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)$ et de $\frac{\alpha V_1}{r}$, que nous représenterons par le caractéristique χ', c'est-à-dire que nous écrirons

$$\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right) F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right) - \frac{\alpha V_1}{r} = \chi'(x_1);$$

d'après cela, l'expression de la durée sera

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi}\chi'(x, V_1).$$

15. Nous avons déjà trouvé pour l'expression de la vitesse

$$v_1 = \frac{V_1}{\left(1+\frac{\alpha}{r}V_1\right)e^{\frac{\alpha x}{2c}} - \frac{\alpha V_1}{r}},$$

et en remarquant que le dénominateur de V_1 est formé avec $e^{\frac{\alpha x}{2c}}$, comme le facteur de $\frac{x}{V\cos\varphi}$, dans l'expression de la durée, l'est avec $F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)$, on verra que l'on peut également le représenter par une caractéristique χ'', en faisant $\left(1+\frac{\alpha}{r}V_1\right)e^{\frac{\alpha x}{2c}} - \frac{\alpha V_1}{r} = \chi''(x, V_1)$, de sorte qu'on aura

$$v_1 = \frac{V_1}{\chi''(x, V_1)};$$

en remarquant de plus que $V_1 = V\cos.\varphi$, et que $v_1 = V\cos.\theta$, on aura pour valeur absolue de la vitesse, en un point quelconque,

$$v = \frac{V}{\chi''(x, V_1)}\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

Dans le vide, on aurait simplement, comme on sait,

$$v = V\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

16. RELATION ENTRE LES FONCTIONS PAR LESQUELLES LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS L'AIR DIFFÈRENT DE CELLES DU MOUVEMENT DANS LE VIDE.

Il y a entre les fonctions par lesquelles les équations du mouvement dans l'air diffèrent de celles du mouvement dans le

vide des relations qu'il est utile de connaître; trois de ces fonctions, en représentant par a la variable, sont les suivantes :

$$e^a,\ \frac{e^a-1}{a} = \mathrm{F}'a \text{ et } \frac{e^a-a-1}{\frac{1}{2}a^2} = \mathrm{F}a.$$

La première est l'exponentielle, dans laquelle e est la base des logarithmes naturels et égal à 2,718281828 ; sa valeur est exprimée par la série convergente

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \text{etc.};$$

la seconde se forme de cette première en retranchant le premier terme du développement et en divisant le reste par le second terme ; elle a pour valeur

$$\mathrm{F}'(a) = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2.3} + \frac{a^3}{2.3.4} + \text{etc.};$$

la troisième se forme également de la première, lorsqu'on en retranche les deux premiers termes du développement, et qu'on divise le reste par le troisième terme : on a alors

$$\mathrm{F}a = 1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{3.4} + \frac{a^3}{3.4.5} + \text{etc.}$$

Il est facile de voir qu'entre $\mathrm{F}a$ et $\mathrm{F}'a$, il y a cette relation $\mathrm{F}a = \frac{\mathrm{F}'a-1}{\frac{1}{2}a}$, analogue à celle-ci $\mathrm{F}'a = \frac{e^a-1}{a}$, laquelle consiste, pour l'une et pour l'autre, à retrancher le premier terme du développement et à diviser le reste par le terme suivant.

Chacune des trois fonctions e^a, $\mathrm{F}'(a)$, $\mathrm{F}(a)$, a l'unité pour premier terme de son développement; les autres termes étant tous positifs, ces fonctions sont toujours plus grandes que l'unité, et elles s'en rapprochent d'autant plus que a est plus petit; elles ne se réduisent à l'unité que quand a est égal à zéro.

Les seconds termes des séries qui expriment les valeurs de ces

trois fonctions sont respectivement a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$; les troisièmes termes se déduisent du deuxième, en augmentant l'exposant du numérateur d'une unité, et en donnant au dénominateur un second facteur égal au précédent, augmenté d'une unité; les quatrièmes termes et les suivants se déduisent des précédents de la même manière. On voit par là que, quelle que soit la valeur de a, hors le cas où cette quantité est nulle, la valeur de $\mathrm{F}'a$ est plus petite que celle de e^a, et que celle de $\mathrm{F}(a)$ est plus petite que celle de $\mathrm{F}'(a)$; enfin, puisque le développement de e^a est toujours une série convergente, les développements de $\mathrm{F}'(a)$ et de $\mathrm{F}(a)$ seront plus rapidement convergents encore.

Dans un certain nombre de cas, ces séries sont assez convergentes pour qu'on puisse se contenter d'un très-petit nombre de termes. Ainsi, pour $\mathrm{F}a$, si $a = \frac{1}{3}$, le second terme de la série est $\frac{1}{9}$, le troisième est égal à $\frac{1}{108}$, le quatrième à $\frac{1}{2620}$, le cinquième à $\frac{1}{57160}$. Un terme aussi petit est toujours négligeable; le quatrième le serait dans la plupart des cas.

e^a est exactement le carré de $e^{\frac{a}{2}}$; mais si $\mathrm{F}'(a)$ et $\mathrm{F}(a)$ ne sont pas exactement les carrés de $\mathrm{F}'\left(\frac{a}{2}\right)$ et de $\mathrm{F}\left(\frac{a}{2}\right)$, ils n'en diffèrent que très-peu. En effet, en faisant le carré des développements de ces fonctions et les retranchant de ceux de fa et de $\mathrm{F}a$, on trouve

$$\mathrm{F}'(a) - \left(\mathrm{F}'\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{48}a^3 + \frac{1}{96}a^3 + \frac{17}{5760}a^4 +, \text{ etc.},$$

et

$$\mathrm{F}a - \left(\mathrm{F}\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{72}a^3 + \frac{1}{180}a^3 + \frac{1}{768}a^4 + \text{ etc.};$$

de sorte que quand a est une petite fraction, ce qui est le cas le plus général, ces différences sont très-petites.

Il existe une semblable analogie relativement aux fonctions

représentées par les caractéristiques χ' et χ'' composées des précédentes et du rapport $\frac{\alpha V_1}{r}$, qui dépend de la vitesse initiale, et que nous représenterons par b.

Si l'on élève au carré $\chi(e, b)$, qui est $(1+b)\,e^{\frac{1}{2}}-b$, on aura :

$$\{\chi''(a,b)\}^2 = \left\{(1+b)e^{\frac{a}{2}}-b\right\}^2 = (1+b)^2 e^a - 2b(1+b)e^{\frac{a}{2}} + b^2.$$

Cette quantité est composée en e^a, comme les fonctions $\psi(a, b)$ le sont avec $F'(a)$ et $F(a)$, de sorte que, vu l'analogie, on peut la représenter par la caractéristique ψ'' et écrire

$$\{\chi''(a,b)\}^2 = \psi''(a,b).$$

Il n'en est pas de même relativement aux fonctions Fa et Fa, parce que $\left(F'\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$ et $\left(F\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$ ne sont pas tout à fait égales à $F'(a)$ et $F(a)$; mais ces quantités ne diffèrent que très-peu entre elles quand a est petit, et l'on a :

$$\psi'(a,b) - \{\chi'(a,b)\}^2 = (1+b)^2\left(\frac{1}{48}a^3 + \frac{1}{96}a^4 + \frac{17}{5760}a^5 + \text{etc.}\right)$$

$$\psi(a,b) - \{\chi(a,b)\}^2 = (1+b)^2\left(\frac{1}{72}a^3 + \frac{1}{180}a^4 + \frac{1}{768}a^5 + \text{etc.}\right)$$

Si la résistance de l'air était supposée proportionnelle au carré de la vitesse, il faudrait faire $\frac{1}{r} = 0$, ce qui donnerait $\varphi' = \frac{1}{2c}v^2$; dans ce cas, les fonctions composées ψ et ψ', χ' et χ'' se réduiraient aux fonctions F, F' et e^a, c'est-à-dire que

$\psi(x, V_1)$ se réduirait à $F\left(\frac{\alpha x}{c}\right)$,

$\psi'(x, V_1)$ à $F'\left(\frac{\alpha x}{c}\right)$,

$\chi'(x, V_1$ à $F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)$

et $\chi'(x, V_1)$ à $e^{\frac{\alpha x}{2c}}$.

et l'on aurait :

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi} F\left(\frac{\alpha x}{c}\right)$$

$$\operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi} F'\left(\frac{\alpha x}{c}\right)$$

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi} F'\frac{\alpha x}{2c} \quad \text{et} \quad v = \frac{V}{e^{\frac{\alpha x}{2c}}} \frac{\cos\varphi}{\cos\theta},$$

A mesure que x est plus petit, c'est-à-dire à mesure que l'on considère des arcs de moindre étendue, ou que c, qui est proportionnel au diamètre et à la densité du projectile, est plus grand, la valeur de $\frac{\alpha x}{c}$ est plus petite, et les valeurs de $F\frac{\alpha x}{c}$, $F'\frac{\alpha x}{c}$, $e^{\frac{\alpha x}{2c}}$, qui, comme on l'a vu, sont de la forme

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

$$F'(a) = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2.3} + \frac{a^3}{2.3.4} + \text{etc.}$$

$$F(a) = 1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{2.3} + \frac{a^3}{2.3.4} + \text{etc.}$$

se rapprochent de l'unité. Il en résulte que l'influence de la résistance de l'air dont ces fonctions tiennent compte va en diminuant de plus en plus, et que le mouvement se rapproche de ce qui aurait lieu dans le vide. Pour ce cas, il faudrait supposer $\varrho' = 0$, et, par conséquent, $\frac{1}{2c} = 0$; alors les fonctions $F\frac{\alpha x}{c}$, $F'\frac{\alpha x}{c}$, $e^{\frac{\alpha x}{2c}}$ deviennent toutes trois égales à l'unité, et on retombe sur les formules du mouvement dans le vide,

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}; \quad \operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}$$

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi} \quad \text{et} \quad v = V\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Ainsi, à mesure que l'on considérera des arcs de moindre éten-

due, ou des projectiles de plus fort calibre ou de plus grande densité, l'arc de la trajectoire se rapprochera de plus en plus d'un arc de parabole.

17. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS L'AIR. — VITESSE.

Nous allons exposer plusieurs propriétés du mouvement des projectiles dans l'air, que l'on peut démontrer sans être arrivé à l'équation finie de la trajectoire.

A mesure que le projectile s'élève dans la branche ascendante, la vitesse diminue, tant par l'effet de la pesanteur que par celui de la résistance de l'air. A partir du sommet, la vitesse va encore en décroissant par l'effet de la résistance, mais la pesanteur commence à agir pour la contre-balancer. Son effet augmente avec l'inclinaison de la direction du mouvement, de sorte que, à une certaine distance du sommet, il compense celui de la résistance de l'air : la vitesse est alors au minimum ; au delà, la vitesse augmente par la prépondérance de l'effet de la pesanteur qui agit suivant des directions de plus en plus rapprochées de celle du mouvement du mobile; mais la vitesse n'augmentera pas indéfiniment, parce que l'effet de la composante de la pesanteur, suivant la direction du mouvement, a pour limite le poids du mobile : la vitesse de celui-ci ne pourra, par conséquent, pas dépasser celle pour laquelle la résistance serait égale au poids du corps dans l'air : cette vitesse sera donc donnée par les équations

$$P\left(1-\frac{\delta}{D}\right)=nv^2\left(1+\frac{v}{r}\right) \quad \text{ou} \quad g\left(1-\frac{\delta}{D}\right)=\frac{1}{2c}v^2\left(1+\frac{v}{r}\right),$$

ou plus simplement, en négligeant la densité de l'air devant celle du projectile, par l'équation

$$g=\frac{1}{2c}v^2\left(1+\frac{v}{r}\right).$$

On voit par là que la limite de la vitesse sera d'autant plus grande

que $2c$, qui est égal à $\frac{P}{ng} = \frac{4}{3}\frac{RD}{Ag}$, sera lui-même plus grand, ou que le projectile sera d'un plus grand diamètre et d'une plus grande densité.

Ce que l'on vient de dire relativement au minimum de la vitesse se déduit aussi de l'équation du mouvement.

En partant de l'équation d'un arc de trajectoire pour lequel on connaît la vitesse initiale V et l'angle de projection φ, la vitesse en un point quelconque aura pour expression (15)

$$v = \frac{V_1}{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right) e^{\frac{\alpha x}{2c}} - \frac{\alpha V_1}{r}} \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

On voit qu'à mesure que le projectile s'élève dans la branche ascendante, x augmente, ainsi que $\cos\theta$; par conséquent, le dénominateur de la valeur de v augmente et la vitesse diminue; mais au delà du sommet, $\cos\theta$ va en diminuant quand x augmente, et il y a un point où l'effet de l'accroissement de x compense l'effet de diminution de $\cos\theta$ et que la vitesse est au minimum. Pour déterminer l'abscisse de ce point, on substituerait dans $\frac{1}{\cos\theta}$, ou dans son égale $\sqrt{1+p^2}$, la valeur de p déduite de l'inclinaison de la trajectoire, qui est

$$p = \operatorname{tang}\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\psi'(x, V_1).$$

On différentierait par rapport à x et on égalerait à zéro; mais l'expression qui en résulterait serait trop compliquée pour qu'il soit utile de la rechercher ici.

18. ASYMPTOTE.

Dans la branche ascendante, la vitesse allant en diminuant par les deux effets réunis de la résistance de l'air et de la pesanteur à mesure que le projectile s'approche du sommet, il s'ensuit que

si l'on considère la trajectoire en deçà du point de départ, la vitesse doit aller en augmentant indéfiniment, à mesure qu'on s'éloigne du sommet; mais l'inclinaison n'augmentera pas indéfiniment.

On fait voir, en effet, que lorsqu'on suppose la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, la branche ascendante a une asymptote dont on peut déterminer facilement l'inclinaison; en outre, cette asymptote s'écarte d'autant plus de la verticale que le coefficient de la résistance de l'air est plus grand. On comprend donc que lorsque la résistance contiendra un second terme proportionnel au cube de la vitesse, il y aura aussi une asymptote, et que celle-ci s'éloignera de la verticale plus que dans le cas précédent. On fait voir encore que, dans cette même hypothèse, la branche descendante a une asymptote verticale qui se trouve à une distance horizontale finie du sommet. Il est facile de voir aussi que, quand la résistance sera augmentée par un terme proportionnel au cube de la vitesse, la direction du mouvement se rapprochera plus rapidement de la verticale, et qu'il y aura de même une asymptote à une distance finie du sommet moindre que dans le premier cas.

19. RAYON DE COURBURE.

L'expression du rayon de courbure est, en regardant dx comme constant:

$$\gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}}$$

Or, la valeur de p ou de tang θ en un point quelconque d'un arc de trajectoire et celle de $\frac{dp}{dx}$, qui ont été données (11 et 13), étant substituées dans la valeur de γ, on aura en un point dont l'abscisse est x:

$$\gamma = \frac{\left\{1 + \left(\operatorname{tang}\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\psi'(x, V_1)\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{g}{V_1^2}\left\{e^{\frac{\alpha x}{2c}}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right) - \frac{\alpha V_1}{r}\right\}^2}.$$

Ce rayon de courbure appartient à un arc d'une trajectoire qui diffère un peu de la véritable en ce que, dans l'expression de la résistance de l'air, on a remplacé le rapport variable $\frac{ds}{dx}$ par le rapport moyen $\frac{s}{x}$ ou α. Mais si l'on suppose l'arc extrêmement petit, auquel cas α devra être remplacé par $\frac{1}{\cos\varphi}$, les deux arcs se confondront, et au point de départ, pour lequel on a $x = 0$, $e^{\frac{\alpha x}{2c}} = 1$, $\psi'(x, V_1) = 1$, on aura simplement:

$$\gamma = (1 + \operatorname{tang}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\frac{V_1^2}{g} = \frac{2h}{\cos\varphi}.$$

Ce rayon est ainsi indépendant de la résistance de l'air : il ne dépend que de la vitesse et de l'inclinaison au point donné [1]; il appartient aussi à la parabole, qui est ainsi osculatrice à la véritable trajectoire. Du côté de la branche ascendante, où la vitesse va en croissant jusqu'à devenir infinie, le rayon de courbure, étant proportionnel à h, serait infini, ce qui est la propriété de l'asymptote; du côté de la branche descendante, où φ va en augmentant jusqu'à devenir un angle droit, tang φ devient infini : γ est donc infini aussi. Entre ces deux limites, il doit y avoir un point où le rayon de courbure est un minimum; pour connaître ce point, il faudrait considérer l'arc qui comprend les portions voisines du sommet et pour lequel φ et V devraient être déterminés, prendre la différentielle par rapport à x et l'égaler à zéro. On aurait ainsi une relation qui servirait à déterminer x, mais cette expression serait trop compliquée; d'ailleurs, la valeur de φ étant petite, l'arc de trajectoire approchée s'éloignerait très-peu de la trajec-

[1] Ce résultat pourrait être obtenu directement *a priori*, soit par des considérations géométriques, soit comme conséquence de l'équation (5).

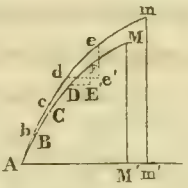
toire exacte ; il en serait de même de la position du point cherché [1].

20. RAPPORT D'UN ARC A SA PROJECTION.

Dans l'équation que nous avons obtenue pour représenter un arc de la trajectoire, est entré le rapport α de l'arc à sa projection pour remplacer, dans l'expression de la résistance de l'air, le rapport moyen ds à dx; cherchons ce rapport.

Considérons un arc AM commençant sous l'inclinaison φ et

FIG. 2.



terminé sous l'angle φ' ; comparons cet arc à celui d'une parabole Am, qui appartiendrait au mouvement dans le vide, commençant et finissant sous les mêmes inclinaisons; choisissons sur l'un et sur l'autre des points rapprochés B, C, D,... b, c, d... où les inclinaisons soient respectivement les mêmes: nous aurons ainsi décomposé les deux arcs en éléments AB, BC', CD... Ab, bc, cd... commençant et finissant sous les mêmes inclinaisons et ayant respectivement la même inclinaison moyenne. Le rapport entre deux petits arcs correspondants, tels que DE, de et leurs projections DE', de', sera sensiblement le même. A l'origine les arcs élémentaires de la parabole et de la trajectoire auront des longueurs égales, à l'autre extrémité les arcs de parabole auront un peu plus d'étendue; mais la différence sera très-faible, et d'autant plus faible que la résistance de l'air se fera moins sentir. Les rapports entre les arcs élémentaires et leurs projections étant respectivement les mêmes, il y aura donc, à très-peu près, éga-

[1] Nous indiquerons, dans un autre travail, un tracé de la trajectoire qui donne le minimum de vitesse et le minimum du rayon de courbure.

lité de rapport entre les sommes de ces éléments ou entre les arcs AM, Am et leurs projections AM', Am'. Cherchons ce rapport dans la parabole.

L'équation de cette courbe et celle de l'inclinaison en un point quelconque étant

$$y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi} \quad \text{et} \quad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi},$$

la longueur d'un arc s sera

$$s = \int ds = \int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

d'où, en observant que $dp = -\frac{dx}{2h\cos^2\varphi}$, on aura :

$$s = 2h\cos^2\varphi\int\sqrt{1+p^2}\,dp.$$

En intégrant cette quantité, on trouvera par les procédés connus,

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{2}\left\{p\sqrt{1+p^2} + \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right\} + \text{const.}$$

Cette expression peut prendre une autre forme, en remarquant que $p = \operatorname{tang}\theta$, que $\sqrt{1+p^2} = \operatorname{séc}\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, enfin que $p + \sqrt{1+p^2} = \operatorname{tang}\theta + \operatorname{séc}\theta = \frac{\sin\theta+1}{\cos\theta} = \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)$.

On aura ainsi, en prenant l'intégrale de façon qu'elle soit nulle pour $p = 0$, c'est-à-dire en comptant l'arc, à partir du sommet,

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \log\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{tang}\theta.\operatorname{séc}\theta + \log.\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right\}.$$

Désignant, pour simplifier, par la caractéristique ξ la fonction de θ, c'est-à-dire écrivant

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \log\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right) = \xi(\theta),$$

il en résultera que la longueur d'un arc compris entre les points où les inclinaisons sont φ et θ, sera

$$s = 2h\cos^2\varphi \left\{ \xi(\varphi) - \xi(\theta) \right\},$$

et pour le rapport cherché de s à x, observant que, d'après l'équation de la parabole $x = (\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta')\, 2h\cos^2\varphi$, on aura

$$\alpha \text{ ou } \frac{s}{x} = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\theta}.$$

On trouvera de la même manière:

$$\frac{s}{y} = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\frac{1}{2}(\operatorname{tang}^2\varphi - \operatorname{tang}^2\theta)} = \frac{\frac{s}{x}}{\frac{1}{2}(\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\theta)}.$$

Lorsque l'on considérera un arc compris entre le point de départ et le sommet, il faudra faire $\theta = 0$, ce qui donnera $\xi(\theta) = 0$, et l'on aura simplement

$$\frac{s}{x} = \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi}\,\xi(\varphi);$$

ce rapport, désigné par a, deviendra

$$a = \tfrac{1}{2}\sec\varphi + \tfrac{1}{2}\cot\varphi \log(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Nous donnons ici une table des valeurs de α, pour des intervalles de 5°, de 10° et de 15°; nous y joignons celle des valeurs de $\xi(\varphi)$ calculées par Euler[1], et celle des valeurs de a calculées par Bezout[2].

[1] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1753.
[2] *Cours de mathématiques*, année 1788.

TABLE DES VALEURS DE $\xi(\varphi)$ ET DE a DE DEGRÉS EN DEGRÉS, DEPUIS 0° JUSQU'À 90°, ET DES VALEURS DE α POUR DES ARCS DE 5°, DE 10° ET DE 15°, DEPUIS 0° JUSQU'À 60°.

$$\xi(\varphi) = \tfrac{1}{2}\,\text{TANG}\,\varphi\,\text{SÉC}\,\varphi + \tfrac{1}{2}\,\text{LOG}\,(\text{TANG}\,\varphi + \text{SÉC}\,\varphi).$$

φ.	$\xi\varphi$.	φ.	$\xi\varphi$.
0	0.0000000	45	1.1477934
1	0.0174559	46	1.1984896
2	0.0349278	47	1.2520116
3	0.0524318	48	1.3086253
4	0.0699837	49	1 3686303
5	0.0876001	50	1.4323614
6	0.1052974	51	1.5001970
7	0.1230926	52	1.5725657
8	0.1410022	53	1.6499519
9	0.1590442	54	1.7329189
10	0.1772365	55	1.8220670
11	0.1955976	56	1.9181512
12	0.2141464	57	2.0219938
13	0.2329030	58	2.1345596
14	0.2518877	59	2.2569691
15	0.2711218	60	2.3903296
16	0.2906277	61	2.536776
17	0.3104288	62	2.697518
18	0.3305495	63	2.874904
19	0.3510153	64	3.071501
20	0.3718537	65	3.290396
21	0.3930932	66	3.535320
22	0.4147637	67	3.810834
23	0.4368974	68	4.122549
24	0.4595290	69	4.477441
25	0.4826944	70	4.884250
26	0.5064324	71	5.354075
27	0.5307845	72	5.901161
28	0.5557952	73	6.544048
29	0.5815120	74	7.307220
30	0.6079863	75	8.223570
31	0.6352732	76	9.338073
32	0.6634325	77	10.71366
33	0.6925287	78	12.44041
34	0.7226311	79	14.65110
35	0.7538161	80	17.54793
36	0.7861656	81	21.45123
37	0.8197699	82	26.89318
38	0.8547266	83	34.81136
39	0.8911439	84	46.93522
40	0.9291380	85	67.12291
41	0.9688398	86	104.1815
42	1.0103900	87	184.1162
43	1.0539469	88	412.2915
44	1.0996840	89	1643.690
45	1.1477934	90	Infini.

$$a = \frac{\xi\varphi}{\text{TANG}\,\varphi} = \tfrac{1}{2}\,\text{SÉC}\,\varphi + \tfrac{1}{2}\,\text{COS}\,\varphi\,\text{LOG TANG}\,(45° + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

φ.	a.	φ.	a.
0	1.00000	45	1.14777
1	1.00005	46	1.15741
2	1.00020	47	1.16752
3	1.00045	48	1.17826
4	1.00081	49	1.18973
5	1.00127	50	1.20189
6	1.00184	51	1.21483
7	1.00251	52	1.22862
8	1.00328	53	1.24333
9	1.00417	54	1.25903
10	1.00516	55	1.27583
11	1.00626	56	1.29381
12	1.00748	57	1.31310
13	1.00881	58	1.33382
14	1.00912	59	1.35612
15	1.01184	60	1.38017
16	1.01354	61	1.40616
17	1.01536	62	1.43429
18	1.01732	63	1.46484
19	1.01942	64	1.49807
20	1.02165	65	1.53433
21	1.02404	66	1.57402
22	1.02657	67	1.61759
23	1.02926	68	1.66562
24	1.03212	69	1.71872
25	1.03514	70	1.77772
26	1.03834	71	1.84355
27	1.04172	72	1.91740
28	1.04530	73	2.00071
29	1.04907	74	2.09531
30	1.05306	75	2.20349
31	1.05727	76	2.32824
32	1.06171	77	2.47344
33	1.06640	78	2.64428
34	1.07134	79	2.84788
35	1.07596	80	3.09418
36	1.08206	81	3.29753
37	1.08787	82	3.77960
38	1.09400	83	4.27430
39	1.10001	84	4.93833
40	1.10730	85	5.87383
41	1.11452	86	7.28508
42	1.12215	87	9.90478
43	1.13022	88	14.39754
44	1.13875	89	28.69102
45	1.14777	90	Infini.

$$\alpha = \frac{\xi(\varphi) - \xi(\theta)}{\text{TANG}\,\varphi - \text{TANG}\,\theta}$$

de φ à θ.	α.
ARCS DE 5°.	
60 à 55	1.87047
55 à 50	1.64854
50 à 45	1.48403
45 à 40	1.35895
40 à 35	1.26229
35 à 30	1.18698
30 à 25	1.12832
25 à 20	1.08309
20 à 15	1.04904
15 à 10	1.02470
10 à 5	1.00898
5 à 0	1.00127
ARCS DE 10°.	
60 à 50	1.77304
50 à 40	1.42781
40 à 30	1.22694
30 à 20	1.10663
20 à 10	1.03718
10 à 0	1.00516
ARCS DE 15°.	
60 à 45	1.69734
45 à 30	1.27720
30 à 15	1.08873
15 à 0	1.01184

21. CHOIX DES POINTS DE DIVISION D'UNE TRAJECTOIRE EN PLUSIEURS PARTIES.

Si l'on examine les valeurs de α, on verra que quand les angles sont très-petits, comme de 0° à 5°, le rapport de l'arc à sa projection ne dépasse l'unité que de $\frac{1}{770}$ environ; que, pour un angle de 10° à 0°, l'arc ne surpasse sa projection que de $\frac{1}{200}$ environ, et qu'enfin pour des angles de 15°, limite des angles de tir des canons et des obusiers, l'arc ne surpasse sa projection que de 0,0118 ou $\frac{1}{85}$ environ.

Le rapport variable $\frac{ds}{dx}$ n'est remplacé par sa valeur moyenne $\frac{s}{x}$ que dans les termes qui tiennent compte de la résistance de l'air, puisqu'il n'y entre que comme diviseur de c et comme diviseur de r. L'erreur que l'on commet par cette substitution ne peut donc affecter que l'influence attribuée au milieu résistant; elle est du même genre que toutes les causes qui font varier la résistance de l'air, telle que sa densité, et, sous ce rapport, on peut voir que, même en négligeant entièrement la valeur de α dans le tir sous l'angle de 15°, c'est comme si c était augmenté de $\frac{1}{85}$ de sa valeur, ou si la pression barométrique de l'air était réduite d'une pareille fraction, c'est-à-dire de 8 à 9 millimètres de hauteur de mercure; c'est une quantité qu'on néglige habituellement dans les applications.

On ne pourrait plus négliger la valeur de l'inclinaison de la trajectoire dans les arcs plus grands; mais il sera permis, comme nous l'avons fait, de remplacer la valeur variable de $\frac{ds}{dx}$ par sa valeur moyenne $\frac{s}{x}$.

Pour faire voir l'étendue des erreurs que l'on commet, comparons cette moyenne avec les valeurs extrêmes, sur des arcs de différentes grandeurs et de différentes inclinaisons, en remarquant qu'aux extrémités $\frac{ds}{dx}$ n'est autre que la sécante trigonométrique des angles sous lesquels ils se terminent.

Cette comparaison est établie dans le tableau suivant, depuis 0° jusqu'à 60° : 1° pour des arcs de 5 en 5 degrés; 2° pour des arcs de 10° en 10°; 3° pour des arcs de 15° en 15°; 4° pour des arcs entiers variant par 5 degrés.

TABLEAU DU RAPPORT DES ARCS DE PARABOLE À LEURS PROJECTIONS.

ÉTENDUE des arcs.	ARCS.	$\frac{ds}{dx}$ ou sécantes trigonométriques.	RAPPORT $\frac{s}{x}$ des arcs à leurs projections.	DIFFÉRENCE du rapport moyen $\frac{s}{x}$ aux valeurs extr. $\frac{ds}{dx}$ en moins.	DIFFÉRENCE du rapport moyen $\frac{s}{x}$ aux valeurs extr. $\frac{ds}{dx}$ en plus.	ÉTENDUE des arcs.	ARCS.	$\frac{ds}{dx}$ ou sécantes trigonométriques.	RAPPORT $\frac{s}{x}$ des arcs à leurs projections.	DIFFÉRENCE du rapport moyen $\frac{s}{x}$ aux valeurs extr. $\frac{ds}{dx}$ en moins.	DIFFÉRENCE du rapport moyen $\frac{s}{x}$ aux valeurs extr. $\frac{ds}{dx}$ en plus.	ÉTENDUE des arcs depuis 0°.	RAPPORT $\frac{s}{x}$ des arcs à leurs projections.	DIFFÉRENCE du rapport moyen $\frac{s}{x}$ aux valeurs extr. $\frac{ds}{dx}$ en moins.	DIFFÉRENCE du rapport moyen $\frac{s}{x}$ aux valeurs extr. $\frac{ds}{dx}$ en plus.
	deg. 60	2.0000					deg. 60	2.0000					deg. 60	1.38017	3/10	2/5
			1.8705	1/16	1/14				1.7730	1/9	1/7					
	55	1.7454					50	1.5557					55	1.27583	1/4	1/4
			1.6485	1/18	1/17				1.4278	1/12	1/11					
	50	1.5557					40	1.3054					50	1.20189	1/4	1/5
			1.4840	1/22	1/20	de			1.2269	1/17	1/16					
	45	1.4142				10	30	1.1547					45	1.14777	2/11	1/7
			1.3589	1/25	1/24	degrés.			1.1066	1/24	1/25					
de	40	1.3054					20	1.0641					40	1.10730	1/7	1/9
			1.2623	1/31	1/29				1.0372	1/40	1/46					
	35	1.2208					10	1.0154					35	1.07596	1/9	1/13
			1.1870	1/36	1/35				1.0052	1/100	1/196					
5	30	1.1547					0	1.0000					30	1.05306	1/12	1/19
			1.1283	1/44	1/42											
	25	1.1034											25	1.03514	1/16	1/28
			1.0831	1/54	1/55											
degrés.	20	1.0641					60	2.0000					20	1.02165	1/25	1/46
			1.0490	1/70	1/76				1.6973	1/7	1/5					
	15	1.0353				de	45	1.4142					15	1.01184	1/44	1/85
			1.0247	1/98	1/109				1.2772	1/11	1/10					
	10	1.0154				15	30	1.1547					10	1.00516	1/100	1/196
			1.0090	1/159	1/193	degrés.			1.0887	1/18	1/19					
	5	1.0038					15	1.0353					5	1.00127	1/402	1/788
			1.0013	1/402	1/788				1.0118	1/44	1/85					
	0	1.0000					0	1.0000					0	1.00000	0	0

D'après l'inspection des nombres contenus dans ce tableau, on voit que la différence entre la valeur moyenne de $\frac{ds}{dx}$ pour des arcs de même étendue diffère d'autant moins des valeurs extrêmes, que l'inclinaison par rapport à l'horizontale est plus petite. On voit aussi que, pour que les différences restent égales, les arcs doivent avoir d'autant moins d'étendue, qu'ils s'écartent davan-

tage de l'horizontale : ainsi cette différence sera de 1/25 pour les arcs de 0° à 20°, de 20° à 30°, de 40° à 45°; elle sera de 1/17 pour les arcs de 0° à 25°, pour ceux de 15 à 30°, de 30° à 40° et de 50° à 55°; enfin, elle serait de, 1/10 environ pour les angles de 0° à 30°, de 30° à 45°, de 55° à 60°; elle n'est encore que de 1/6 environ pour l'arc de 0° à 45°. Ces quantités ne sont que les différences les plus grandes et elles se rapportent aux extrémités de l'arc; mais comme, vers le milieu de chaque arc la différence est nulle, il s'ensuit que la différence de $\frac{s}{x}$ à $\frac{ds}{dx}$ n'est moyennement que la moitié des fractions que nous avons indiquées.

Si l'on remarque de plus que ces différences entre la valeur moyenne et les valeurs extrêmes de $\frac{ds}{dx}$ sont d'abord en moins et ensuite en plus, on verra qu'on prend au commencement une résistance trop faible et à la fin une résistance trop forte, et qu'on altère l'arc d'abord dans un sens, puis dans l'autre; mais comme la valeur moyenne est la même, on voit que, tant qu'on reste dans de certaines limites, les erreurs partielles se compenseront, à peu de chose près, sur l'arc tout entier.

Cependant, comme à la partie inférieure des arcs, dans la branche ascendante, la vitesse est plus grande qu'à la partie supérieure, c'est comme si on prenait la résistance trop faible; la même chose se présentant dans la branche descendante, il s'ensuit qu'en réalité les portées seront un peu trop grandes. On remarquera aussi que la formule de la portion qui comprend l'angle 0° est commune à la branche ascendante et à la branche descendante, de sorte qu'elle comprend un nombre de degrés double de celui qui est indiqué par les angles limites.

Lorsque les vitesses initiales ne seront pas considérables, et que les projectiles seront de fort calibre et de grande densité, comme dans le tir ordinaire des bombes, l'angle de projection ne dépasse pas habituellement 45°, ni les portées 1000 à 1200 mètres, l'influence de la résistance de l'air sera assez faible pour qu'on puisse embrasser toute la trajectoire dans une seule formule,

en prenant la valeur convenable de α; dans ce cas, le plus grand écart de la valeur de $\frac{ds}{dx}$, relativement au rapport moyen, est de 2/11 en moins au commencement du trajet et vers le point de chute, et de 1/7 en plus vers le sommet de la trajectoire. La simplification ayant pour effet de rendre la résistance trop faible au point de départ et vers le point de chute, et trop forte au sommet, il en résultera une trajectoire qui passera au-dessus de la véritable, à partir du point de départ, et qui passera ensuite au-dessous dans la partie supérieure; elle s'en rapprochera dans la branche descendante, de façon que, vers le point de chute, il n'y aura qu'une faible différence. En résumé, l'étendue des arcs que l'on pourra embrasser dépendra du degré de précision qu'on voudra obtenir. Pour le tir habituel sous 45°, en particulier, lorsqu'on voudra une précision extrêmement grande et que, dans aucun point, le rapport moyen de l'arc à sa projection ne s'écarte du rapport exact de plus de 1/25, les arcs devront être pris ainsi qu'il suit : de 45° à 40°, de 40° à 35°, de 35° à 30°, de 30° à 20° et de 20° à 0°, ce qui fera 9 arcs distincts; et lorsqu'on voudra que la différence entre le rapport moyen et le rapport exact ne soit que de 1/16, les arcs seront divisés ainsi qu'il suit : de 45° à 35°, de 35° à 25°, de 25° à 0°, ce qui fera 5 arcs distincts. Lorsqu'on voudra une grande précision et que les rapports ne diffèrent que de 1/12, on embrassera les arcs de 45° à 30° et de 30° à 0°, ce qui fera 3 arcs distincts. Enfin, lorsqu'on admettra des différences de 1/6, on pourra embrasser la trajectoire dans un seul arc de 45°: ce sera le cas du tir habituel des bombes avec des vitesses médiocres. On peut reconnaître le degré d'approximation qu'on obtient dans un cas donné par le calcul de la trajectoire en la considérant comme un seul arc, puis la décomposant en 3 arcs, puis en 9 arcs, et calculant chaque arc séparément, comme on va le dire.

22. VALEUR DE LA PROJECTION D'UN ARC EN FONCTION DES INCLINAISONS EXTRÊMES.

Dans la manière d'opérer que l'on vient d'indiquer, on divise la trajectoire en plusieurs arcs, en se donnant l'inclinaison aux deux extrémités de chacun d'eux; on en déduit immédiatement la valeur du rapport α: la projection x de cet arc sera déterminée par la relation

$$\frac{x}{2h\cos^2\varphi}\psi'(x, V_1) = \tan\varphi - \tan\theta.$$

Mais x se trouvant dans la fonction $\psi'(x, V_1)$ en exponentielle en même temps qu'à la première puissance, on ne peut l'en déduire que par approximation, soit par plusieurs essais successifs, soit en développant la fonction en série et revenant à la valeur de x par le retour des suites; la première manière présentera beaucoup de facilité en disposant ainsi l'équation :

$$\frac{\alpha x}{c}\psi'(x, V_1) = (\tan\varphi - \tan\theta)\, 2h\cos^2\varphi\frac{\alpha}{c}.$$

Connaissant α d'après les angles φ et θ, prenant la valeur numérique du second membre, qui, à l'exception du facteur $\frac{\alpha}{c}$, n'est autre que la valeur qu'on aurait pour x dans le vide, et déterminant $\frac{\alpha V_1}{r}$, on prendra plusieurs valeurs successives de $\frac{\alpha x}{c}$, d'où l'on déduira pour chacune d'elles les valeurs correspondantes de la fonction $\psi'(x, V_1)$; on en fera le produit, et lorsqu'on aura deux produits rapprochés qui comprendront les valeurs du second membre, la valeur exacte de $\frac{\alpha x}{c}$ s'obtiendra par les parties proportionnelles entre les différences.

Cette opération devient très-facile au moyen d'une table calculée de la fonction ψ' pour des valeurs de $\frac{\alpha x}{c}$, $\frac{\alpha V_1}{r}$ [1].

[1] J'ai donné ces tables dans mon mémoire sur la balistique, adressé au ministre de la

Pour obtenir la valeur de x en série, développons dans le deuxième membre la fonction ψ et les valeurs de $F'\left(\frac{\alpha x}{c}\right)$, $F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right)$; faisons $(\tang\varphi - \tang\theta)\,2h\cos^2\varphi = x'$, qui serait, comme on l'a dit, l'abscisse dans le vide; représentons, pour abréger, $\frac{\alpha V_1}{r}$ par b, nous aurons

$$\frac{\alpha x'}{c} = \frac{\alpha x}{c} + \frac{1}{2}(1+b)\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2 + \frac{1}{2.3}(1+b)\left(1-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^3$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}(1+b)\left(1+\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^4 + \frac{1}{2.3.4.5}(1+b)\left(1+\frac{7}{8}b\right)\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^5$$
$$+ \frac{1}{2.3.4.5.6}(1+b)\left(1+\frac{15}{16}b\right)\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^6, + \text{etc.}, + \text{etc.};$$

de là, par les formules connues du retour des suites, on trouvera la valeur de $\frac{\alpha x}{c}$ en fonction de $\frac{\alpha x'}{c}$, puis celle de x comme il suit :

$$x = x' - \frac{\alpha x'}{c}\frac{1+b}{2}\left(1 - \frac{4+5b}{6}\frac{\alpha x'}{c} + \frac{24+63.b+40.b^2}{48}\left(\frac{\alpha x'}{c}\right)^2\right.$$
$$\left. - \frac{192+713b+1140b^2+520b^3}{480}\left(\frac{\alpha x'}{c}\right)^3 + \text{etc.}\right).$$

Si l'on supposait la résistance simplement proportionnelle au carré de la vitesse, alors $\frac{1}{r}$ et, par conséquent, $\frac{\alpha V_1}{r}$ ou b, seraient égaux à zéro, et l'on aurait :

$$x = x' - \frac{\alpha x'}{2c}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\alpha x'}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha x'}{c}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{\alpha x'}{c}\right)^3 + \text{etc.}\right).$$

Cette expression sera d'autant plus convergente que $\frac{\alpha x'}{c}$ sera plus petit. Il en sera de même de la formule précédente parce qu'en général, dans l'application, la valeur de b ou $\frac{\alpha V_1}{r}$ sera plus petite que l'unité. On sera d'ailleurs toujours le maître de consi-

guerre en mai 1844; elles seront comprises, ainsi que beaucoup d'autres, dans un traité dont la publication a été jugée utile par le comité de l'artillerie. Nous en donnons plus loin un extrait.

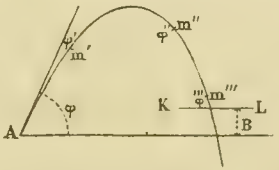
dérer des arcs assez petits pour que la fraction $\frac{\alpha x'}{c}$ le soit assez elle-même et qu'elle rende la série suffisamment convergente; mais, dans presque tous les cas, au moyen des tables des valeurs de $\psi'(x, V_1)$, la méthode par différence que nous avons indiquée en premier lieu sera beaucoup plus rapide.

23. CALCUL DES ARCS.

Maintenant, montrons comment on devra se servir des diverses formules pour résoudre le problème de la trajectoire dans une application donnée.

Supposons qu'on connaisse l'angle de projection φ et la vitesse initiale V dont est animé un projectile de diamètre et de poids connus, pour lequel on connaît ainsi la valeur de c. Si la valeur de φ est de 45° et que l'on veuille obtenir une grande précision,

Fig. 3.



on divisera la trajectoire en trois arcs; on les choisira ainsi: le premier, de 45° à 30° de la branche ascendante; le second, de 30° de la branche ascendante jusqu'à 30° de la branche descendante; le troisième, de 30° à 45° et au point de chute. On opérera de la manière suivante:

1° On déterminera les valeurs de α, qui seront pour le premier et le troisième arc

$$\alpha = \frac{\xi(45°) - \xi(30°)}{\text{tang } 45° - \text{tang } 30°} = 1,2772 \text{ et pour le 2e, } \alpha'' = \frac{\xi(30°)}{\text{tang } 30°} = 1.0531.$$

2° Dans l'équation

$$\text{tang } \theta = \text{tang } \varphi - \frac{x}{2h \cos^2 \varphi} \psi'(x, V_1),$$

on posera $\varphi = 45°$, $\theta = 30°$, $V_1 = V \cos \varphi$, $2h \cos^2 \varphi = \frac{V_1^2}{g}$, et on

déterminera la valeur de x, qui y satisfait : ce sera l'abscisse x' de l'extrémité du premier arc.

3° Au moyen de x' et de la formule

$$y' = x' \operatorname{tang} \varphi - \frac{x'^2}{4h\cos^2\varphi}\,\psi(x', V_1),$$

on déterminera la valeur de y', ou l'ordonnée du point m'.

4° On aura la composante horizontale V_1' de la vitesse du projectile à l'extrémité m' de l'arc, au moyen de la formule

$$V_1' = \frac{V_1}{\chi''(x', V_1)}.$$

5° On aura la durée du trajet par la formule

$$t' = \frac{x'}{V_1}\,\chi'(x', V_1).$$

Le premier arc Am' est ainsi complétement déterminé.

Pour déterminer le deuxième arc $m'm''$ on opérera absolument de la même manière, en faisant $\varphi = 30°$, $\theta = -30°$, et en remplaçant V_1 par la valeur de V_1'. On obtiendra ainsi les coordonnées x'', y'', du point de la branche descendante de la trajectoire où l'inclinaison est $\varphi'' = -30°$; on en déduira ensuite la composante horizontale de la vitesse V_1'' et la durée t''.

Pour déterminer le troisième arc $m''m'''$, on fera $\varphi = -30°$ et $\theta = -45°$, et au moyen de la nouvelle valeur V_1'', on aura, ainsi que précédemment, les coordonnées x''' et y''' du point de la branche descendante de la trajectoire où l'inclinaison est de 45° (y''' sera négative). On déterminera aussi la valeur de V_1''' et la durée t'''.

Ce dernier point m''' sera toujours plus élevé que le point de départ; et si l'on veut obtenir le point de chute sur un plan KL situé à une certaine hauteur B au-dessus du point de départ, on devra encore faire une dernière opération.

24.

L'élévation du dernier point au-dessus du plan de chute est égale à $y' + y'' + y''' - B$. Cette quantité pourra être positive

ou négative : si elle est négative, c'est que le point de chute est plus élevé que le dernier point m'''; il fait donc partie du dernier arc, et il faudra faire $y = y' + y'' - B$ dans l'équation $y = x\tang\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(x, V_1)$ qui s'y rapporte, et déterminer la valeur de x qui y satisfait. On pourra trouver la valeur de x soit en série, par le moyen du retour des suites, comme on va le dire, soit au moyen des tables des fonctions ψ et des parties proportionnelles, comme on l'a indiqué plus haut; on trouvera par les formules précédentes les valeurs de v, θ et t qui y correspondent.

Si $y' + y'' + y''' - B$ est positif, le point de chute sera situé en dehors du troisième arc; s'il doit être peu éloigné de m''', on le regardera comme sur le prolongement de ce troisième arc et on le calculera comme on vient de le dire; mais s'il doit en être très-éloigné, on estimera approximativement, d'après la grandeur de la différence entre les deux hauteurs, quel devra être l'angle de chute sur ce plan; soit φ^{IV} cette valeur approche, on déterminera la valeur de α''', qui est $\alpha''' = \frac{\xi\varphi^{IV} - \xi 45^\circ}{\tang\varphi^{IV} - \tang 45^\circ}$, et l'équation de ce nouvel arc sera donnée par la relation

$$y = x\tang\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(x\, V_1),$$

dans laquelle on fera $\varphi = \varphi'''$, $V_1 = V_1'''$, $2h\cos^2\varphi = \frac{V_1'''^2}{g}$.

On déterminera x au moyen des tables et des parties proportionnelles en essayant plusieurs valeurs successives de $\frac{\alpha x}{c}$, ou par le retour des suites; dans ce dernier cas, en faisant pour abréger $\frac{4\alpha h}{c}\sin\varphi\cos\varphi$, ou $\frac{2\alpha h}{c}\sin 2\varphi = m$, on trouvera

$$x = \frac{y}{\tang\varphi}\left[1 + \frac{y}{4h\sin^2\varphi} + \left\{2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right)\right\}\frac{y^2}{(4h\sin^2\varphi)^2}\right.$$
$$+ \left\{5 + \frac{5}{3}m\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right) + \frac{m^2}{12}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha V_1}{r}\right)\right\}\frac{y^3}{(4h\sin^2\varphi)^3}$$
$$\left. + \left\{14 - 7m\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right) + \frac{m^2}{18}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right)^2\left(5 + \frac{3}{2}\frac{\alpha V_1}{r}\right) + \frac{m^3}{60}\left(1 + \frac{\alpha V_1}{r}\right)\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\alpha V_1}{r}\right)\right\}\frac{y^4}{(4h\sin^2\varphi)^4} + \text{etc.}\right]$$

Tant que y sera petit et h assez grand, cette formule sera convergente et facile à calculer; on devra faire attention que, dans le cas dont il s'agit, y est négatif, de sorte que les termes où il entre à la première et à la troisième puissance sont négatifs; il en est de même quant à m, lorsque, comme ici, φ est négatif.

Connaissant ainsi cette dernière valeur de x, que nous désignerons par x^{IV}, on aura comme précédemment la valeur de l'angle final de l'arc, lequel sera ici l'angle de chute, ainsi que la vitesse finale et la durée t^{IV} du parcours de l'arc. On aura enfin, pour la portée totale,

$$X = x' + x'' + x''' + x^{IV},$$

et la durée totale,

$$T = t' + t'' + t''' + t^{IV}.$$

25. TRAJECTOIRE DES BOMBES CONSIDÉRÉE COMME UN SEUL ARC.

Dans les circonstances ordinaires du tir des projectiles, la solution sera beaucoup plus facile que celle que l'on vient de donner, et l'on obtiendra une précision suffisante, en considérant la trajectoire comme un seul arc. Tel est le cas du tir des bombes aux distances habituelles; il permet d'arriver très-facilement à des relations en termes finis entre les différentes quantités que l'on doit calculer.

Lorsque l'on considère la trajectoire comme un seul arc, celui-ci se termine, en général, sous un angle différent de l'angle de départ; la différence sera ordinairement assez faible, particulièrement si le point de chute est un peu élevé au-dessus du point de départ. La valeur de α dépendra donc de la distance et de la hauteur de ce point. Cependant, on pourra déduire α de l'angle de départ au moyen de la table des valeurs de $\frac{\xi\varphi}{\text{tang}\varphi}$ (article 20); mais il sera mieux de prendre pour φ une valeur moyenne entre l'angle de projection connu et l'angle de chute présumé ou déterminé par une première approximation.

26. SOLUTION DES DIVERS PROBLÈMES.

Portées. Si l'on connaît la vitesse et l'angle de projection d'un projectile dans l'air, on peut déterminer sa portée sur un plan horizontal élevée d'une quantité quelconque B au-dessus de la bouche à feu.

Soit V la vitesse initiale, φ l'angle de projection; après avoir déterminé α, r et c, on aura $\frac{\alpha V_1}{r}$. La portée cherchée x sera déterminée par la relation $B = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(x, V_1)$. On obtiendra facilement au moyen de la table des valeurs de ψ, en la mettant sous la forme $\frac{c}{\alpha}\operatorname{tang}\varphi . \frac{\alpha x}{c} - \frac{c^2}{4h\alpha^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\alpha x}{c}\right)^2 \psi(x, V_1) = B$, et essayant successivement plusieurs valeurs de $\frac{\alpha x}{c}$ prises dans les tables.

Le développement de x en série, qui a été donné (art. 24), ne peut servir immédiatement ici, parce qu'il se rapporte à la branche sur laquelle est placée l'origine des coordonnées, et qu'il ne donnerait, dans le cas actuel, que le point où le projectile traverse le plan proposé en s'élevant au-dessus de lui, et non pas le point de chute. Il faut d'abord déterminer la projection horizontale de l'arc, qui se termine sous une inclinaison égale à l'angle de projection, mais de signe contraire, au moyen de l'équation déjà donnée (art. 22), qui deviendra alors $\frac{\alpha x}{c}\psi(x, V_1) = 2h\frac{\alpha}{c}\sin 2\varphi$.

Connaissant x, on calculera l'ordonnée y; si elle était égale à B, le problème serait résolu; si elle est plus grande ou plus petite d'une quantité B', on déterminera la distance horizontale qui sépare ce point du point de chute, au moyen de la valeur de x en série (art. 24), où y sera négatif et égal à B'.

Si le point de chute doit être à hauteur de la bouche à feu,

l'expression de x devient plus simple : en effet, l'équation de la trajectoire étant

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\,\psi(x, V_1),$$

on aura la portée sur un plan horizontal en faisant $y = 0$, ce qui donne deux valeurs, dont l'une, qui est $x = 0$, peut être négligée parce qu'elle se rapporte au point de départ; quant à l'autre, en divisant par x et en remarquant que $4h\operatorname{tang}\varphi\cos^2\varphi = 2h\sin 2\varphi$, et appelant X la portée cherchée, α étant calculé d'après la valeur de φ, on aura

$$2h\sin 2\varphi = X\,\psi(X, V^1).$$

En opérant comme précédemment par le moyen du retour des suites, et en nommant X′ la quantité $2h\sin 2\varphi$, ou la portée dans le vide, et faisant $\frac{\alpha V_1}{r} = b$, on aura

$$X = X'\left[1 - \frac{1+b}{3}\frac{\alpha X'}{c} + \frac{10+23b+13b^2}{72}\left(\frac{\alpha X'}{c}\right)^2 - \frac{136+513b+627b^2+250b^3}{2160}\left(\frac{\alpha X'}{c}\right)^3 + \frac{772+4141b+8052b^2+6778b^3+2095b^4}{25920}\left(\frac{\alpha X'}{c}\right)^4 + \text{etc.}\right]$$

Dans le cas ordinaire du tir des bombes, où ces formules sont applicables, la quantité b ou $\frac{\alpha V_1}{r}$ sera une petite fraction, qui ne dépassera pas $\frac{1}{3}$, de sorte que les puissances supérieures à l'unité iront en décroissant rapidement; comme en même temps $\frac{\alpha X'}{c}$ sera plus petit que l'unité, il en résultera que la série sera assez rapidement convergente pour qu'on puisse se contenter des termes que nous donnons. Mais, en général, il sera plus facile de résoudre l'équation en X au moyen des tables des fonctions ψ et des parties proportionnelles, en mettant pour cela l'équation sous la forme

$$2h\frac{\alpha}{c}\sin 2\varphi = \frac{\alpha X}{c}\,\psi(x, V_1).$$

La solution se réduira, comme on l'a déjà dit, à la multiplication de quelques valeurs de $\frac{\alpha X}{c}$ par les fonctions ψ correspondantes, et à opérer ensuite par des différences comme avec les tables ordinaires. Les premiers termes du développement ci-dessus donneront toujours au besoin une valeur très-approchée qui servira de point de départ.

Ayant la portée X, on aura l'inclinaison et la vitesse au point de chute ainsi que la durée du trajet, par les formules données plus haut.

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\psi'(x, V_1); \quad v = \frac{V}{\chi''(x, V_1)}\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$$

$$\text{et } T = \frac{X}{V\cos\varphi}\psi'(x, V_1).$$

La valeur absolue de θ, qu'on trouvera par la première de ces deux formules, où l'angle de chute nécessairement négatif, sera toujours plus grande que φ, et comme c'est d'après cette valeur seule qu'on a calculé α, il s'ensuit que cette quantité sera un peu trop petite; il sera donc convenable de la prendre un peu plus grande à l'avance, et relative à une valeur moyenne entre l'angle de projection et la valeur présumée de l'angle de chute.

27. VITESSE INITIALE.

Si l'on veut déterminer la vitesse initiale que doit posséder un projectile pour être projeté à une distance donnée X sur un plan horizontal, il faudra tirer la valeur de V de l'équation

$$2h\sin 2\varphi = X\psi(X, V_1),$$

mettant $\frac{V^2}{2g}$ à la place de h et $2\operatorname{tang}\varphi\cos^2\varphi$ à la place de $\sin 2\varphi$, se rappelant que $V_1 = V\cos\varphi$, on aura

$$\frac{\alpha^2 V_1^2}{r^2} = \frac{\alpha^2 g X}{2r^2\operatorname{tang}\varphi}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2 F\left(\frac{\alpha X}{c}\right) - 2\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}F\left(\frac{\alpha X}{2c}\right) + \left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2\right\},$$

d'où, en faisant pour simplifier

$$\frac{2r^2 \operatorname{tang}\varphi}{\alpha^2 gX} = Q,\ F\left(\frac{\alpha X}{c}\right) - F\left(\frac{\alpha X}{2c}\right) = N,\ \text{et}\ F\left(\frac{\alpha X}{c}\right) - 2F\left(\frac{\alpha X}{2c}\right) + 1 = M,$$

on aura

$$V = \frac{r}{\alpha \cos\varphi}\left(\frac{N}{Q-M} + \sqrt{\frac{F\left(\frac{\alpha X}{c}\right)}{Q-M} + \left(\frac{N}{Q-M}\right)^2}\right).$$

La vitesse devant être positive, on prendra le signe plus devant le radical.

On pourra déterminer la valeur de V plus facilement, en mettant la relation qui la donne sous la forme

$$\frac{\left(\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2}{\psi(x, V_1)} = \frac{\alpha^2 gX}{2r^2 \operatorname{tang}\varphi}$$

et en essayant plusieurs valeurs de $\frac{\alpha V_1}{r}$ prises dans les tables de $\psi(x, V_1)$[1].

Dans le cas où les valeurs X sont peu considérables, avec de gros projectiles, pour lesquels la valeur de c est très-grande, la fraction $\frac{\alpha X}{c}$ sera petite, et on pourra, en ne commettant que des erreurs négligeables, remplacer (voir article 16) la fonction $\psi(x, V_1)$ par $\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right) F\frac{\alpha X}{2c} - \frac{\alpha V_1}{r}\right\}^2$.

Par cette seule substitution, l'équation de la trajectoire deviendra simplement, en remplaçant h par $\frac{V^2}{2g}$,

$$y = x \operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\varphi}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right) F\left(\frac{\alpha x}{2c}\right) - \frac{\alpha V_1}{r}\right\}^2.$$

[1] J'ai calculé des tables des valeurs de $\frac{\alpha V_1}{c}\psi(x, V_1)$ et de $\frac{\frac{\alpha V_1}{r}}{\sqrt{\psi(x, V_1)}}$ qui, dans ces problèmes, permettent d'obtenir immédiatement $\frac{\alpha x}{c}$ ou $\frac{\alpha V_1}{r}$, et de là x ou V.

En faisant dans cette équation $y = 0$, divisant par x et appelant X la portée horizontale et V′ la vitesse correspondante à cette portée dans le vide, et qui est $V' = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}}$, on aura simplement

$$V = V' \frac{F\left(\frac{\alpha X}{2c}\right)}{1 - \left(F\left(\frac{\alpha X}{2c}\right) - 1\right)\frac{\alpha V'}{r}\cos\varphi}.$$

Si l'on supposait la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, il faudrait faire $\frac{1}{r} = 0$; alors la vitesse cherchée se réduirait à $V = V'F\left(\frac{\alpha X}{2c}\right)$. On voit aussi que le premier facteur V′ donne la solution du problème lorsque la résistance de l'air est supposée nulle, que le facteur $F\left(\frac{\alpha X}{2c}\right)$ tient compte du terme proportionnel au carré de la vitesse, et le dénominateur du terme proportionnel au cube de cette vitesse dans l'expression de la résistance de l'air.

L'angle de projection étant donné, on peut trouver la vitesse que doit avoir un projectile pour passer par un point dont la position est donnée relativement au point de départ, soit a la distance horizontale et b la hauteur du but : ce point appartenant à la trajectoire, on devra avoir

$$b = a \operatorname{tang}\varphi - \frac{a^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(x, V_1).$$

Divisant les deux membres par a, représentant par ε l'angle sous lequel le point à battre est vu de la bouche à feu, on aura $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{b}{a}$, et remplaçant $h^2\cos\varphi$ par $\frac{V_1^2}{2g}$, on aura

$$\frac{2^2V_1^2}{r^2} = \frac{\alpha^2 ga}{2r^2(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varepsilon)}\left\{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)^2 F\left(\frac{\alpha a}{c}\right) - 2\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)\frac{\alpha V_1}{r}F\left(\frac{\alpha a}{2c}\right) + \left(\frac{\alpha V_1}{c}\right)^2\right\},$$

d'où, en faisant pour simplifier

$$\frac{2r^2}{g\alpha a^2}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varepsilon) = q,\ F\left(\frac{\alpha a}{c}\right) - F\left(\frac{\alpha a}{2c}\right) = N \text{ et } F\left(\frac{\alpha a}{c}\right) - 2F\left(\frac{\alpha a}{2c}\right) + 1 = M,$$

on aura, en observant que la vitesse est nécessairement positive, et ne prenant que le signe plus devant le radical,

$$V = \frac{r}{\alpha \cos\varphi}\left(\frac{N}{q-M} + \sqrt{\frac{F\left(\frac{\alpha a}{c}\right)}{q-M} + \left(\frac{N}{q-M}\right)^2}\right).$$

On pourra aussi avoir V comme précédemment, dans le cas où la portée sera peu considérable; la fraction $\frac{\alpha a}{c}$ sera alors assez faible pour qu'on puisse remplacer $\psi(x, V_1)$ par $\left(\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right) F\frac{\alpha x}{2c} - \frac{\alpha V_1}{r}\right)^2$. L'équation qui doit donner V ne contenant cette quantité qu'à la 1re puissance et en représentant par V′ la vitesse $\sqrt{\frac{ag}{2\cos^2\varphi(\tang\varphi - \tang\varepsilon)}}$, qu'on obtiendrait dans le vide, on aura simplement

$$V = V' \frac{F\left(\frac{\alpha a}{2c}\right)}{1 - \left(F\left(\frac{\alpha a}{2c}\right) - 1\right)\frac{\alpha V' \cos\varphi}{r}}.$$

En remarquant que $\cos^2\varphi\,(\tang\varphi - \tang\varepsilon) = \frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon}(\sin\varphi\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varphi) = \sin(\varphi-\varepsilon)\frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon}$, la valeur de V′ sera plus simplement $V' = \sqrt{\frac{ag}{2\sin(\varphi-\varepsilon)}\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}}$.

Si on suppose $b = o$, alors $\tang\varepsilon = o$, et la valeur de V′ devient $V' = \sqrt{\frac{ag}{\sin 2\varphi}}$, comme lorsqu'on considère la portée sur un plan horizontal.

28. ANGLE DE PROJECTION.

Si la vitesse est donnée et qu'on ait à rechercher au contraire l'angle de projection, la solution offrira plus de difficultés; la valeur de α est une fonction de l'angle de projection trop com-

pliquée pour qu'on puisse obtenir des formules directes d'une utilité réelle, et d'ailleurs on n'a pas besoin de cette solution pour le tir des bombes. Si ce cas se présentait, il faudrait déterminer approximativement l'angle de projection φ, déterminer de même α et V_1 qui entrent dans la fonction ψ; cette fonction étant ainsi déterminée d'une manière approchée, l'on aura, pour le cas où le but est élevé au-dessus du point de départ, en remplaçant $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ par $1 + \operatorname{tang}^2\varphi$, à résoudre l'équation

$$b = a \operatorname{tang}\varphi - \frac{a^2\psi(x, V_1)}{4h}(1 + \operatorname{tang}^2\varphi),$$

d'où l'on tirera, pour la valeur de $\operatorname{tang}\varphi$,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2}{a}\frac{h}{\psi(a, V_1)} \pm \sqrt{\frac{h}{\psi(a, V_1)}\left(\frac{h}{\psi(a, V_1)} - b\right) - \frac{a^2}{4}}.$$

Cette formule ne diffère de celle qui aurait lieu dans le vide qu'en ce que h est remplacé par $\frac{h}{\psi(a, V_1)}$. Les valeurs de α et celle de $\cos\varphi$ qui entrent dans la fonction ψ sont différentes, suivant qu'on prend le signe plus ou le signe moins, et elles ne doivent pas être confondues : l'une appartient à un angle plus petit que celui qui donnerait le maximum de portée, l'autre à un angle plus grand. La recherche de ces deux angles doit être faite séparément.

Si le point à battre est à hauteur du point de projection, en faisant $y = o$ dans l'équation de la trajectoire, observant que $4 \operatorname{tang}\varphi \cos^2\varphi = 2 \sin 2\varphi$, on aura simplement

$$\sin 2\varphi = \frac{X}{2h}\psi(X, V_1).$$

Cette équation donne deux valeurs qui doivent être, comme dans le cas précédent, calculées séparément l'une de l'autre.

Deux autres problèmes peuvent être proposés, savoir : déterminer l'angle de projection et la vitesse initiale d'un projectile qui doit passer, soit par un point donné, la trajectoire faisant en

ce point un angle déterminé, soit par deux points donnés : cette application n'a pas d'utilité dans le cas du tir des bombes, mais elle en a beaucoup dans le cas du tir en plongeant; nous en parlerons plus loin.

29. DE L'ANGLE DE PLUS GRANDE PORTÉE.

On sait que, sans la résistance de l'air, l'angle de projection de 45° est celui sous lequel des projectiles animés de la même vitesse initiale donnent les plus grandes portées. Il n'en est plus ainsi lorsque le projectile se meut dans un milieu résistant, et il est facile de voir que, dans ce cas, l'angle de portée maximum doit être plus petit que 45°.

En effet, la propriété essentielle du maximum d'une fonction quelconque, c'est que, pour des différences très-petites, soit en moins dans la variable, la fonction n'éprouve que des variations extrêmement petites et toutes dans le même sens; il en est ainsi pour l'équation des portées sur un plan horizontal dans le vide, qui est $X = 2h \sin 2\varphi = 4h \sin \varphi \cos \varphi$; mais, dans le cas où le milieu oppose une certaine résistance au mouvement du projectile, on voit, par l'équation $X\psi(x, V_1) = 2h \sin 2\varphi$, que, pour un angle un peu plus grand que 45°, deux causes contribuent à la diminution de la portée : d'abord la diminution de $\sin 2\varphi$, la même qui diminue la portée dans le vide, et ensuite l'accroissement de α dans $\psi(x, V_1)$, ou l'effet de la résistance sur un arc de plus grande étendue; au contraire, pour un angle au-dessous de 45°, la valeur de $\sin 2\varphi$ va effectivement en diminuant, mais la diminution de l'angle de projection, et par suite de α, produit une diminution dans $\psi(x, V_1)$, ou dans l'effet dû au milieu. Cette cause agissant dans un sens contraire à la première, l'on voit qu'il y aura un certain angle plus petit que 45° pour lequel les deux effets contraires se contre-balanceront; cet angle sera celui qui donnera la portée maximum. On voit aussi que cet angle devra être d'autant plus petit, que la résistance du milieu se fera plus fortement

sentir. Ainsi, dans un milieu résistant, l'angle de portée maximum est au-dessous de 45°, et il s'en écarte d'autant plus, que la résistance du milieu est plus considérable, que la vitesse initiale est plus grande ou que le diamètre et la densité du projectile sont plus petits.

Pour obtenir une relation qui donnerait la portée maximum, il faudrait prendre la différentielle de la portée relativement à l'angle de projection et l'égaler à zéro; mais l'équation $2h\sin 2\varphi = X\psi\,(x, V_1)$, qui donnerait la portée, contient l'angle φ d'une manière très-compliquée ; il serait difficile de l'employer à calculer la valeur de φ. Le moyen le plus facile est encore de calculer pour un projectile donné, et pour une vitesse initiale aussi donnée, 4 ou 5 valeurs de X correspondantes à autant de valeurs de φ, en choisissant celles-ci les unes au-dessus, les autres au-dessous de celles qui doivent donner la portée maximum. La comparaison de ces portées indiquerait l'angle cherché avec toute l'approximation dont on a besoin dans les applications. On devrait faire un semblable calcul pour une série de vitesses différentes et pour chaque espèce de projectile.

MOUVEMENT DES PROJECTILES SOUS LES PETITS ANGLES DE PROJECTION.

30. SIMPLIFICATION.

Les formules auxquelles nous sommes arrivés dans le cas d'un angle de projection quelconque au-dessus de l'horizon peuvent être simplifiées quand on les applique au tir des canons et des obusiers; l'on obtient dans ce cas une solution facile des problèmes que l'on peut avoir à résoudre.

On ne fait pas usage, dans le service de l'artillerie, du tir des boulets et des obus sous de très-grands angles de projection, particulièrement avec de grandes vitesses, parce que, aux grandes distances où porteraient les projectiles, l'irrégularité du tir produite par diverses causes déviatrices ôterait à ce tir l'efficacité né-

cessaire. Les affûts à rouages ne pourraient pas d'ailleurs résister aux effets du recul : aussi les affûts ne permettent-ils pas un tir très-élevé. Ce n'est même que par des dispositions particulières qu'on peut tirer sous des angles de 15° à 16° au-dessus de l'horizon. On peut donc regarder cette inclinaison comme une limite du tir des canons et des obusiers sur leurs affûts, et celle de 12° comme la limite dans les cas ordinaires.

Sous les faibles inclinaisons, le rapport de l'arc de la trajectoire à sa projection diffère très-peu de l'unité : la valeur de ce rapport, donné par les formules dont il a été parlé (21), ne dépasse l'unité que de 0,00127 ou $\frac{1}{788}$ sous l'angle de 5°, de 0,00516 ou 1/194 sous l'angle de 10°, de 0,00745 ou $\frac{1}{135}$ sous celui de 12°, et enfin de 0,01184 ou $\frac{1}{85}$ sous celui de 15°. Ces quantités sont très-petites; et comme elles n'influent que sur les termes qui tiennent compte de la résistance de l'air, elles pourront être généralement négligées, et plus particulièrement avec les faibles vitesses et les gros projectiles. On se fera une idée exacte de leur degré d'importance, en remarquant qu'en remplaçant par l'unité le rapport α de l'arc à sa projection, qui n'entre que comme diviseur des coefficients c et r relatifs à la résistance de l'air, c'est comme si l'on prenait cette résistance plus petite dans le rapport de α à l'unité, ou comme si la densité de l'air était réduite dans le même rapport, ou la pression barométrique diminuée de 1, 4, 6 ou 9 millimètres de hauteur de mercure, quantités qu'on néglige, la plus part du temps, dans les applications. On pourra donc négliger ces différences dans les formules avec d'autant plus de raison, que ce n'est, en général, que sous les plus petits de ces angles qu'on tire avec de grandes vitesses, et que l'on ne s'approche de la limite supérieure que dans le tir à feu plongeant, qui s'exécute avec les plus lourds projectiles et avec de petites vitesses, cas où l'influence de la résistance de l'air est la moindre.

Cela posé, si nous faisons $\alpha = 1$ dans les formules générales auxquelles nous sommes arrivés, nous aurons, en conservant les mêmes notations que précédemment, pour l'équation de la trajectoire, pour l'expression de l'inclinaison, pour la durée du trajet et pour la vitesse,

$$y = x\tan\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(x, V_1)$$

$$\tan\theta = \tan\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\psi'(x, V_1)$$

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi}\chi'(x, V_1)$$

$$\text{et } v_1 = V_1\frac{1}{\chi''(x, V_1)} \text{ ou } v = \frac{V}{\chi''(x, V_1)}\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

31. SOLUTION DES DIVERS PROBLÈMES. — LE BUT ÉTANT À HAUTEUR DE LA BOUCHE À FEU.

Proposons-nous de résoudre, au moyen de ces formules, les divers problèmes relatifs au tir des boulets et des obus. Supposons d'abord le but à hauteur de la bouche à feu; appelant X la portée horizontale, faisant $y = 0$ dans l'équation de la trajectoire, et divisant ensuite par X, on aura l'équation

$$2h\sin 2\varphi = X\psi(x, V_1).$$

Cette équation se déduirait également de la solution générale déjà obtenue (25), en y faisant $\alpha = 1$. De cette relation, l'on pourra déterminer une de ces trois choses : la vitesse V, l'angle de projection φ ou la portée X, lorsque les deux autres seront connues.

VITESSE.

La vitesse V sera, d'après ce qu'on a vu (20),

$$V = \frac{r}{\cos\varphi}\left(\frac{N}{Q-M}\right) + \sqrt{\frac{F\frac{X}{c}}{Q-M} + \left(\frac{N}{Q-M}\right)^2},$$

dans laquelle on a fait, pour simplifier,

$$\frac{2r^2 \operatorname{tang.}\varphi}{gX} = Q, \quad F\frac{X}{c} - F\frac{X}{2c} = N \text{ et } F\frac{X}{c} - 2F\frac{X}{2c} + 1 = M.$$

Dans le cas où les valeurs de $\frac{X}{c}$ sont peu considérables, et où l'on pourra remplacer $\psi(x, V_1)$ par $\left\{\left(1 + \frac{V_1}{r}\right) F\frac{X}{2c} - \frac{V_1}{r}\right\}^2$, on aura plus simplement en faisant $V' = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\varphi}}$ (26),

$$V = V' \frac{F\left(\frac{X}{2c}\right)}{1 - \left(F\frac{X}{2c} - 1\right)\frac{V' \cos\varphi}{r}}.$$

ANGLE DE PROJECTION.

Si l'on cherche la valeur de l'angle de projection, on remarquera que, quoique cet angle entre dans la valeur de V_1 ou $V\cos\varphi$, et, par conséquent, dans la fonction ψ, vu que $\cos\varphi$ ne peut pas s'écarter beaucoup de l'unité, puisque les angles de projection sont supposés petits, on pourrait le regarder comme égal à l'unité, sans erreur notable; en tout cas, on pourra lui supposer une valeur approchée, et admettre que la valeur de $\psi(x, V_1)$ est déterminée: alors on aura simplement

$$\sin 2\varphi = \frac{X}{2h}\psi(x, V_1).$$

PORTÉE.

Si la portée est l'inconnue, on cherchera, au moyen de plusieurs substitutions successives et des parties proportionnelles, la valeur de $\frac{X}{c}$ qui satisfait à l'équation mise sous la forme

$$\frac{2h \sin 2\varphi}{c} = \frac{X}{c}\psi(x, V_1)$$

ou bien par le développement en série déjà donné (25), et dans lequel il n'y a qu'à faire $\alpha = 1$, $X' = 2h\sin 2\varphi$, $\frac{V_1}{r} = b$; on aura pour cette valeur

$$X = X'\left[1 + \frac{1+b}{3}\frac{X'}{c} + \frac{10+23b+13b^2}{72}\left(\frac{X'}{c}\right)^2 - \frac{136+513b+627b^2+250b^3}{2160}\left(\frac{X'}{c}\right)^3 + \frac{772+4141b+8056b^2+6778b^3+2095b^4}{25920}\left(\frac{X'}{c}\right)^4 + \text{etc.}\right].$$

32. LE BUT N'ÉTANT PAS À HAUTEUR DE LA BOUCHE À FEU. — VITESSE INITIALE.

Si le but n'est pas à hauteur de la bouche à feu, soit a sa distance horizontale, et b son élévation au-dessus du centre de la bouche à feu. En faisant $\frac{b}{a} = \text{tang}\,\varepsilon$, on aura, comme dans le cas général (21), en supposant seulement $\alpha = 1$, et faisant $\frac{2r^2}{ga}(\text{tang}\,\varphi - \text{tang.}\,\varepsilon) = q$, $Fa - F\frac{a}{2} = N$, $F\frac{a}{c} - 2F\frac{a}{2c} + 1 = M$, on aura

$$V = \frac{r}{\cos\varphi}\left(\frac{N}{q-M} + \sqrt{\frac{F\frac{a}{c}}{q-M} + \left(\frac{N}{q-M}\right)^2}\right),$$

et dans le cas où $\frac{a}{c}$ serait peu considérable, en faisant

$$V' = \sqrt{\frac{ag}{2\cos^2\varphi(\text{tang.}\,\varphi - \text{tang.}\,\varepsilon)}},$$

on aurait plus simplement

$$V = V'\frac{F\frac{a}{2c}}{1 - \left(F\frac{a}{2c} - 1\right)\frac{V}{r}\cos\varphi}.$$

ANGLE DE PROJECTION.

Les coordonnées a et b, appartenant à un point de la trajec-

toire, devront satisfaire à l'équation de cette courbe, qui, en remplaçant $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ par $1 + \operatorname{tang}^2\varphi$, deviendra

$$b = a\operatorname{tang}^2\varphi - \frac{a^2\psi(a, V_1)^2}{4h}(1 + \operatorname{tang}^2\varphi),$$

d'où en faisant

$$\frac{h}{\psi(x, V_1)} = h'$$

on aura

$$\operatorname{tang}^2\varphi - \frac{4h'}{a}\operatorname{tang}\varphi + \frac{4h'b}{a^2} + 1 = 0.$$

Cette équation donne pour φ deux valeurs; mais la plus petite seule devant être admise, puisque le tir n'a lieu que sous de petits angles de projection, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2}{a}\left(h' - \sqrt{h'(h'-b) - \frac{a^2}{4}}\right).$$

Cette équation ne diffère de celle qui aurait lieu dans le vide qu'en ce que h est remplacé par $h' = \frac{h}{\psi(a, V_1)}$. Cette solution suppose qu'on peut déterminer $\psi(a, V_1)$, quoique V_1, qui est égal à $V\cos\varphi$, contienne l'inconnue; mais, comme on l'a déjà fait observer, on suppose l'angle de projection petit : par conséquent, on peut, dans $V\cos\varphi$, remplacer $\cos\varphi$ par l'unité ou par une valeur approchée.

33. VITESSE ET ANGLE DE PROJECTION D'UN PROJECTILE QUI DOIT PASSER PAR DEUX POINTS DONNÉS.

Deux problèmes qui ont une importance particulière dans le tir plongeant des canons et des obusiers, peuvent être résolus; ce sont les suivants:

Trouver la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par deux points donnés.

Soient a et b les distances horizontale et verticale de l'un des points de la bouche à feu, a' et b' celles de l'autre point; V et φ la vitesse et l'angle cherché.

Puisque la trajectoire doit passer par le point dont les coordonnées sont a et b, on aura

$$b = a \operatorname{tang} \varphi - \frac{a^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(a, V_1),$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varphi - \frac{b}{a} = \frac{a}{4h\cos^2\varphi}\psi(a, V_1);$$

de même, puisque le second point doit se trouver sur la trajectoire, on aura

$$\operatorname{tang} \varphi - \frac{b'}{a'} = \frac{a'}{4h\cos^2\varphi}\psi(a, V_1),$$

Retranchant ces équations membre à membre, on aura

$$\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} = \frac{a'\psi(a', V_1) - a\psi(a, V_1)}{4h\cos^2\varphi};$$

d'où, en observant que $2gh = V^2$ et que $V\cos\varphi = V_1$,

$$\frac{V_1^2}{r^2} = \frac{ag}{2r^2}\,\frac{a'\psi(a', V_1) - a\psi(a, V_1)}{\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}}.$$

Mettant à la place des fonctions ψ leurs développements, ordonnant par rapport à $\frac{V_1}{r}$, on aura une équation du second degré en $\frac{V_1}{r}$; en donnant à M, N, les mêmes significations que précédemment, à M', N', les valeurs analogues par rapport à a' et b',

et faisant $q' = \frac{2r^2}{g}\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)$, on aura, en ne conservant que la valeur positive,

$$\frac{V_1}{r} = \frac{a'N' - aN}{q' - (a'M' - aM)} + \sqrt{\frac{a'F\left(\frac{a'}{c}\right) - aF\left(\frac{a}{c}\right)}{q' - (a'M' - aM)} + \left(\frac{a'N' - aN}{q' - (a'M' - aM)}\right)^2}.$$

Connaissant $\frac{V_1}{r}$, on pourra déterminer les valeurs de la fonction $\psi(a, V_1)$ et celle de $\psi(a', V_1)$; alors en divisant l'une par l'autre les équations premières, on aura:

$$\frac{\text{tang}\,\varphi - \frac{b}{a}}{\text{tang}\,\varphi - \frac{b'}{a'}} = \frac{a}{a'}\frac{\psi(a, V)}{\psi(a', V_1)}.$$

d'où l'on tire pour la valeur de tang φ,

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{a'\psi(a', V_1).\frac{b}{a} - a\psi(a', V_1).\frac{b'}{a'}}{a'\psi(a', V_1). - a\psi(a, V_1)}.$$

Connaissant par ce moyen la valeur de φ, on aura celle de V, qui est égale à $\frac{V_1}{r}.\frac{r}{\cos\varphi}$.

34. VITESSE ET ANGLE DE PROJECTION D'UN PROJECTILE QUI DOIT PASSER PAR UN POINT DONNÉ SOUS UNE INCLINAISON DÉTERMINÉE.

Trouver la vitesse initiale et l'angle de projection d'un projectile qui doit passer par un point donné sous une inclinaison déterminée.

Soient a et b les distances horizontale et verticale du point donné, et θ l'inclinaison que doit avoir la trajectoire en ce point.

La trajectoire devant passer par le point dont les coordonnées sont a et b, on devra avoir:

$$b = a\,\text{tang}\,\varphi - \frac{a^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(a, V_1),$$

d'où, en faisant $\frac{b}{a} = \text{tang } \varepsilon$,

$$\text{tang } \varphi - \text{tang } \varepsilon = \frac{a}{4h\cos^2\varphi}\,\psi(a, V_1).$$

L'inclinaison de la trajectoire au point donné devant être θ, on devra avoir:

$$\text{tang } \varphi - \text{tang } \theta = \frac{a}{2h\cos^2\varphi}\,\psi'(a, V_1);$$

retranchant ces deux équations membre à membre, on aura:

$$\text{tang } \varepsilon - \text{tang } \theta = \frac{a}{4h\cos^2\varphi}\left\{2\psi'(a, V') - \psi(a, V)\right\};$$

remplaçant $h\cos^2\varphi$ par $\frac{V_1^2}{2g}$, multipliant les deux membres par r^2, remplaçant les fonctions ψ et ψ' par leurs développements, ordonnant par rapport à $\frac{V_1}{r}$, on aura une équation du 2e degré, de laquelle on retirera la valeur de $\frac{V_1}{r}$; faisant, pour simplifier, $F'\left(\frac{a}{c}\right) - 2F'\left(\frac{a}{2c}\right) + 1 = m$, $F'\left(\frac{a}{c}\right) - F'\left(\frac{a}{c2}\right) = n$, conservant à M et N les valeurs qu'elles avaient dans les problèmes précédents, et faisant $q'' = \frac{2r^2}{ga}(\text{tang } \varepsilon - \text{tang } \theta)$, on aura, en ne conservant que la valeur positive,

$$\frac{V_1}{r} = \frac{2n - N}{q'' - (2m - M)} + \sqrt{\frac{2F'\left(\frac{a}{c}\right) - F\left(\frac{a}{c}\right)}{q'' - (2m - M)} + \left(\frac{2n - N}{q'' - (2m - M)}\right)^2}.$$

Au moyen de cette valeur, on pourra calculer $\psi(a, V_1)$ et $\psi'(a, V_1)$. En divisant les deux premières équations membre à membre, on aura:

$$\frac{\text{tang } \varphi - \text{tang } \theta}{\text{tang } \varphi - \text{tang } \varepsilon} = \frac{2\psi'(a V_1)}{\psi(a V_1)},$$

d'où l'on tirera pour la valeur de tang φ,

$$\text{tang } \varphi = \frac{2\psi'(a, V_1)\ \text{tang } \varepsilon - \psi(a, V_1)\ \text{tang } \theta}{2\psi'(a, V_1) - \psi(a, V_1)}.$$

Connaissant par ce moyen la valeur de φ, on aura celle de V, qui est égale à $\frac{V_1}{r}\cdot\frac{r}{\cos\varphi}$[1].

35.

Lorsque l'on connaît d'une manière approximative la valeur de V et de φ, on pourra obtenir des valeurs très-approchées des fonctions $\psi(a, V_1)$ et de $\psi'(a, V_1)$ et résoudre plus facilement ces deux derniers problèmes. La valeur de φ s'obtiendra immédiatement au moyen des dernières équations, qui donneront tang φ. On tirera la valeur de h en retranchant les uns des autres, comme on l'a fait, les membres des deux équations de condition et on retirera la valeur de h, qui sera respectivement, pour le premier et pour le deuxième problème,

$$h=\frac{a'\psi(a', V_1)-a\psi(a, V_1)}{4\left(\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}\right)\cos^2\varphi} \text{ et } h=\frac{2a\psi'(a, V_1)-a\psi(a, V_1)}{4(\tang\varepsilon-\tang\theta)\cos^2\varphi}.$$

On peut encore, après avoir déterminé φ calculer h par la condition que le projectile partant sous l'angle de projection φ passe par le point dont les coordonnées sont a et b, ce qui donne

$$b=a\tang\varphi-\frac{a^2}{4h\cos^2\varphi}\psi(a, V_1),$$

d'où, en divisant par a, et remarquant que $\frac{b}{a}=\tang\varepsilon$, et par des transformations successives, on tire:

$$h=\frac{a}{4(\tang\varphi-\tang\varepsilon)\cos^2\varphi}\psi(a, V_1)=\frac{a\psi(a, V_1)}{4(\sin\varphi\cos\varepsilon-\sin\varepsilon\cos\varphi)\frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon}}$$

$$h=\frac{a}{4\sin(\varphi-\varepsilon)}\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\psi(a, V_1) \text{ et } V=\sqrt{\frac{ag}{2\sin(\varphi-\varepsilon)}\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\psi(a, V_1)}.$$

[1] On n'avait pas encore donné, même en supposant, ce qui est plus simple, que la résistance de l'air est exprimée par un seul terme proportionnel au carré de la vitesse, la solution de cette question, la plus importante du tir plongeant. L'équation de la trajectoire et

Dans les problèmes qui viennent d'être résolus, on aura l'inclinaison de la trajectoire en un point quelconque situé à une distance x de la bouche à feu, et en particulier pour le point d'arrivée, la durée du trajet et la vitesse persistante par les formules déjà données :

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\psi'(x, V_1),\quad t = \frac{x}{V\cos\varphi}\chi'(x, V_1);$$

$$v = \frac{V}{\chi''(x, V_1)}\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Dans le tir sous les très-petits angles de projection, pour le point de chute ou pour des points peu élevés au-dessus de la bouche à feu, $\cos\varphi$ et $\cos\theta$ diffèrent très-peu de l'unité, et l'on a sans erreur sensible,

$$v = \frac{V}{\chi''(x, V_1)}.$$

36. MOUVEMENT RECTILIGNE DES PROJECTILES.

L'action de la résistance de l'air s'exerçant toujours dans la direction même du mouvement du projectile ne peut changer cette direction. La pesanteur seule produit cet effet. On obtiendra les formules du mouvement dans l'air, sans tenir compte de la pesanteur, en partant des formules générales que nous avons obtenues et en y faisant $g=0$. L'équation de la trajectoire, après qu'on y aura remplacé h par sa valeur $\frac{V^2}{2g}$ et remarqué qu'en faisant $g=0$ le second terme disparaît, deviendra

$$y = x\operatorname{tang}\varphi,$$

qui est l'équation d'une ligne droite, laquelle est ici la ligne de projection elle-même.

La formule de l'inclinaison donnerait aussi $\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi$. Les

celle de l'inclinaison n'ont pas permis aux divers auteurs qui ont traité de la balistique de retirer les inconnues des deux équations de condition.

valeurs de t et de v en fonction de x seront données par les deux équations

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi}\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)F'\left(\frac{\alpha x}{2c}\right) - \frac{\alpha V'}{r}\Big) \quad \text{et} \quad v = \frac{V}{\left(1+\frac{\alpha V_1}{r}\right)e^{\frac{\alpha x}{2c}} - \frac{\alpha V_1}{r}}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Mais, comme dans ce cas le rapport de l'arc à sa projection est égal à $\frac{1}{\cos\varphi}$, on verra que αV_1 est égal à V, et que αx ou $\frac{x}{\cos\varphi}$ est le chemin parcouru suivant la ligne de projection; on pourra compter les longueurs suivant cette ligne, en continuant de les représenter par x, ce qui revient à faire $\varphi = 0$; remarquant aussi que $\cos\theta = \cos\varphi$, on aura simplement pour le mouvement rectiligne,

$$t = \frac{x}{V}\left\{\left(1+\frac{V}{r}\right)F'\left(\frac{x}{2c}\right) - \frac{V}{r}\right\} = \frac{x'}{V}(x, V_1) \text{ et } v = \frac{V}{\left(1+\frac{V}{r}\right)e^{\frac{x}{2c}} - \frac{V}{r}} = \frac{V}{\chi''(x, V)}.$$

En tirant de la deuxième équation, la valeur de x en fonction de v on aura :

$$e^{\frac{x}{2c}} = \frac{V}{v}\,\frac{\left(1+\frac{v}{r}\right)}{\left(1+\frac{V}{r}\right)} \quad \text{et} \quad x = 2c\log\frac{V\left(1+\frac{v}{r}\right)}{v\left(1+\frac{V}{r}\right)}.$$

On pourrait tirer de ces équations la valeur de t en fonction de v; mais on peut la déduire directement de celle qu'on a déjà donnée (14), en y faisant $\alpha = 1$ et remplaçant V_1 par V et v_1 par v; on aura alors

$$t = 2c\left\{\frac{1}{v} - \frac{1}{V} - \frac{1}{r}\log\frac{V\left(1+\frac{v}{r}\right)}{v\left(1+\frac{V}{r}\right)}\right\}.$$

[1] M. le colonel Piobert était déjà arrivé à ces deux expressions dans un mémoire présenté au concours, pour le grand prix de mathématiques de l'Institut, par MM. Piobert, Morin et Didion en 1837.

La valeur de l'étendue du trajet en fonction de la durée résultera de la première des équations précédentes,

$$t=\frac{x}{V}\left\{\left(1+\frac{V}{r}\right)F'\left(\frac{x}{2c}\right)-\frac{V}{r}\right\}.$$

Mais elle ne peut être déduite que par approximation, au moyen de la substitution de valeurs successives de x et de $\frac{x}{2c}$ et des parties proportionnelles, en mettant l'équation sous la forme

$$\frac{tV}{2c}=\frac{x}{2c}\chi'(x, V).$$

Cette opération sera rendue très-facile, au moyen de tables calculées des valeurs de x, (x, V).

Pour obtenir x en série, mettant pour $F'\left(\frac{x}{2c}\right)$ son développement, et prenant la valeur de $\frac{x}{2c}$ par le retour des suites, on trouvera, en remplaçant, pour abréger, $\frac{V}{r}$ par b,

$$x=tV\left(1-\frac{1+b}{2}\frac{tV}{2c}+\frac{2+5.b+3.b^2}{2.3}\left(\frac{tV}{2c}\right)^2-\frac{6+26.b+35.b^2+15.b^3}{2.3.4}\left(\frac{tV}{2c}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{24+154b+340b^2+315b^3+105b^4}{2.3.4.5}\left(\frac{tV}{2c}\right)^4-\text{etc.}\right).$$

Connaissant x, on trouvera la vitesse au moyen de la seconde des équations ci-dessus.

On s'est assuré, par des applications numériques, que, dans les limites de l'emploi ordinaire des projectiles, cette formule est assez convergente pour que le nombre de termes donnés ci-dessus soit suffisant.

36 *bis*. RELATION ENTRE LES LONGUEURS ET LES DURÉES DES TRAJETS DE DEUX PROJECTILES DIFFÉRENTS.

Dans les formules qui donnent x en fonction de la vitesse

$$x = 2c \log. \frac{V\left(1+\frac{v}{r}\right)}{v\left(1+\frac{V}{r}\right)} \text{ et } t = 2c \left\{ \frac{1}{v} - \frac{1}{V} - \frac{1}{r} \log. \frac{V\left(1+\frac{v}{r}\right)}{v\left(1+\frac{V}{r}\right)} \right\},$$

les valeurs de x et de t sont proportionnelles au produit de $2c$, qui dépend du diamètre et de la densité du projectile et d'une certaine fonction de la vitesse au commencement et à la fin du trajet que l'on considère.

Soient deux projectiles dont les demi-diamètres soient respectivement R et R′, et les densités D et D′, on aura

$$2c = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D}{A\pi R^2} = \frac{4}{3}\frac{RD}{Ag} \text{ et } 2c' = \frac{4}{3}\frac{R'D'}{Ag}.$$

Si ces projectiles partent avec la vitesse commune V, lorsque leur vitesse sera réduite à v, ils auront parcouru des trajets dont les longueurs respectives x et x' seront

$$x = 2c \log. \frac{V\left(1+\frac{v}{r}\right)}{v\left(1+\frac{V}{r}\right)} \text{ et } x' = 2c' \log. \frac{V\left(1+\frac{v}{r}\right)}{v\left(1+\frac{V}{r}\right)};$$

le rapport de ces deux longueurs sera

$$\frac{x}{x'} = \frac{2c}{2c'} \text{ ou } \frac{x}{x'} = \frac{RD}{R'D'}\,1.$$

Si t et t' sont les durées de ces trajets, on aura également

$$\frac{t}{t'} = \frac{2c}{2c'} = \frac{RD}{R'D'},$$

M. le colonel Piobert avait déjà appliqué ce principe, en 1835, dans ses leçons aux élèves de l'École d'application sur le projet de bouche à feu

d'où l'on déduit ce théorème important : lorsque deux projectiles différents partent avec la même vitesse et arrivent avec des vitesses égales, les longueurs et les durées des trajets sont proportionnelles au produit des diamètres des projectiles par leurs densités.

Si les densités sont les mêmes, comme lorsqu'il s'agit de boulets de même matière, les longueurs et les durées des trajets sont proportionnelles aux diamètres. Si les diamètres sont les mêmes, comme lorsqu'il s'agit de boulets et d'obus du même calibre, les longueurs et les durées des trajets sont proportionnelles aux densités.

Ce théorème fait voir immédiatement l'avantage que présente, sous le rapport des vitesses à diverses distances, la grandeur des diamètres ou des densités des projectiles. La vitesse des petits projectiles est promptement diminuée, à moins qu'ils n'aient une grande densité, comme celle du plomb des balles de fusil; et on n'emploie les projectiles creux en fonte, dont la densité varie de moitié à deux tiers de celle de ce métal, que sous le diamètre des plus gros boulets.

On peut démontrer directement ce théorème sans passer par les formules du mouvement des projectiles, et on voit qu'il est indépendant de l'expression de la résistance en fonction de la vitesse, pourvu que cette résistance soit proportionnelle à la superficie d'un grand cercle du projectile.

En effet, considérons un projectile animé de la vitesse initiale V, et soient V_1, V_2, V_3... les vitesses qu'il conserve après avoir parcouru des trajets élémentaires successifs et très-petits e_1, e_2, e_3; si p est le poids de ce projectile, R son rayon et D sa densité, la force vive perdue durant le trajet e_1, en passant de la vitesse V à la vitesse V_1, sera

$$\frac{p}{q}(V^2 - V_1^2).$$

Ces deux vitesses étant très-peu différentes l'une de l'autre, la

résistance n'a pas sensiblement varié durant le trajet, et elle pourra être représentée par la résistance φ_1, qui correspond à la vitesse moyenne $\frac{V+V_1}{2}$; en désignant par la caractéristique f la fonction de la vitesse qui représente la résistance, de telle sorte que celle-ci soit exprimée par $\pi R^2 f\left(\frac{V+V_1}{2}\right)$, la quantité de travail consommée pendant le trajet e_1 sera $e_1\pi R^2 f\left(\frac{V+V_1}{2}\right)$, par conséquent, en vertu du principe des forces vives, on aura :

$$\frac{p}{g}(V^2-V_1^2) = 2\pi R^2 e_1 f\left(\frac{V+V_1}{2}\right);$$

de là on tire, en remplaçant p par $\frac{4}{3}\pi R^3 D$,

$$e_1 = RD\ \frac{2}{3g}\ \frac{V^2-V_1^2}{f\left(\frac{V+V_1}{2}\right)}.$$

Si l'on suppose un second projectile de rayon R′ et de densité D′ partant avec la même vitesse initiale v, il arrivera à la vitesse v_1, après avoir parcouru un trajet élémentaire e'_1, qui aura pour expression

$$e'_1 = R'D'\ \frac{2}{3g}\ \frac{V^2-V_1^2}{f\left(\frac{V+V_1}{2}\right)};$$

de ces deux équations, on tire, puisque la fonction de V et de V_1 est la même,

$$\frac{e'_1}{e_1} = \frac{R'D}{RD} \text{ ou } e'_1 = e_1\frac{R'D'}{RD}.$$

Il est évident que, pour les trajets élémentaires suivants, on aurait également

$$e'_2 = e_2\frac{R'D'}{RD},\ e'_3 = e_3\frac{R'D'}{RD},\ e'_4 = e_4\frac{R'D'}{RD},$$

et ainsi des autres ; en faisant la somme membre à membre, on aura

$$e_1' + e_2' + e_3' + e_4' + \text{etc.} = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + \text{etc.})\frac{R'D'}{RD}.$$

En appelant E la somme des trajets élémentaires $e + e_2 + e_3 + e_4 + \text{etc.}$, c'est-à-dire l'étendue entière du trajet d'un projectile lorsque sa vitesse V sera réduite à v; nommant de même E' la somme des trajets élémentaires $e_1' + e_2' + e_3' + e_4' + \text{etc.}$, ou l'étendue entière du trajet d'un autre projectile lorsque sa vitesse V sera réduite à la vitesse v, on aura

$$E' = E\frac{R'D'}{RD} \text{ ou } \frac{E'}{E} = \frac{R'D'}{RD}.$$

Par conséquent, le rapport de l'étendue des trajets de deux projectiles est égal à celui des produits des diamètres par les densités.

Quant au rapport des durées des trajets, on remarquera que les trajets élémentaires e_1 et e_1' étant parcourus avec la même vitesse moyenne $\frac{V+V'}{2}$, les durées élémentaires t_1 et t_1' seront proportionnelles aux longueurs de ces mêmes trajets, ou aux rapports des produits des diamètres par les densités ; de sorte qu'on aura

$$\frac{t_1'}{t_1} = \frac{e_1'}{e_1} = \frac{R'D'}{RD} \text{ d'où } t_1' = t_1\frac{R'D'}{RD}.$$

On aura de même pour les durées élémentaires suivantes :

$$t_2' = t_2.\frac{R'D'}{RD}; t_3' = t_3.\frac{R'D'}{RD}. \ldots \text{ et ainsi des autres.}$$

De sorte qu'en appelant T' et T les durées totales des trajets pour passer de la vitesse V à la vitesse v, on aura

$$T' = T\frac{R'D'}{RD} \text{ ou } \frac{T'}{T} = \frac{R'D'}{RD}.$$

Par conséquent aussi, le rapport des durées des trajets des deux projectiles est égal à celui des produits des calibres par les densités.

Si l'on connaît pour un projectile l'étendue et la durée du trajet qu'il parcourt pour passer d'une vitesse donnée à une série de vitesses différentes suffisamment rapprochées et décroissant pour plus de simplicité par quantités égales entre elles, on aura les longueurs et les durées pour un autre projectile quelconque, en multipliant les premières par le rapport des produits des calibres par les densités ou par le rapport $\frac{2c'}{2c}$. On trouvera, au moyen des différences et des parties proportionnelles, ce qui se rapporte aux vitesses comprises entre les nombres de la table. On obtiendrait plus de facilité dans les applications, trop simples pour qu'il soit nécessaire de les détailler ici; en calculant une table pour une valeur de $2c$ exprimée par le nombre 1000, on la rendrait ainsi indépendante du coefficient du carré de la vitesse dans l'expression de la résistance de l'air; mais elle dépendrait encore du rapport de ce coefficient à celui du cube de la vitesse. En conservant A pour coefficient du premier terme de l'expression de la résistance de l'air, on devra avoir

$$\frac{4}{3}\frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{A}g} = 2c = 1000^{\mathrm{m}}.$$

Cette table étant calculée pour une valeur déterminée de $\frac{1}{r}$, il faudra, dans le cas d'une autre valeur, regarder les nombres qui représentent les vitesses comme augmentés dans le rapport de la nouvelle valeur de r à celle des tables; de cette façon, le rapport $\frac{\mathrm{V}}{r}$ restera le même, et la valeur de x, qui est

$$x = 2c \log. \frac{1 + \frac{r}{v}}{1 + \frac{r}{\mathrm{V}}},$$

ne dépend évidemment que du rapport $\frac{v}{r}$ et $\frac{\mathrm{V}}{r}$.

Dans la valeur de t, qui est $t = 2c\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V}\right) - \frac{x}{r}$

$= \frac{2c}{r}\left(\frac{r}{v} - \frac{r}{V} - \log.\frac{1+\frac{r}{v}}{1+\frac{r}{V}}\right)$, le second facteur ne dépend que du rapport $\frac{r}{v}$ et $\frac{r}{V}$; mais le premier facteur variant en raison inverse de r, on voit que la table des durées relatives à $2c = 1000^m$ et à $\frac{1}{r}$ ne pourra servir pour une autre valeur supposée égale à $\frac{1}{r'}$, qu'à la condition de regarder la quantité $2c$ comme ayant varié aussi dans le même rapport que r, et qu'elle a pour valeur $2c = 1000\frac{r'}{r}$.

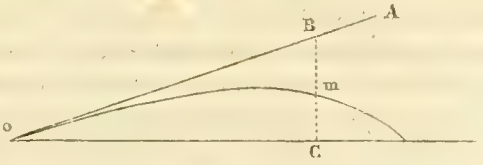
37. APPLICATION AU TIR À GRANDES VITESSES SOUS DE TRÈS-PETITS ANGLES DE PROJECTION.

Tant que les portées ne sont pas très-considérables, que le projectile est animé d'une grande vitesse et que, par suite, l'angle de projection est très-petit, la trajectoire est très-allongée dans le sens horizontal, et son inclinaison au-dessus ou au-dessous de l'horizon est toujours très-petite; on peut donc, entre certaines limites, sans erreur sensible, négliger la composante verticale de la résistance de l'air. La composante horizontale sera alors la seule force qui agira suivant cette direction, et la pesanteur, la seule force verticale. Dans cette hypothèse, ces deux forces seront indépendantes l'une de l'autre; la première sera considérée comme dans le mouvement rectiligne, la seconde comme si la résistance de l'air n'existait pas.

Cela posé, soit φ l'angle de projection du mobile, V la vitesse initiale, x et y les coordonnés d'un point quelconque de la trajectoire, et v la vitesse du projectile en ce point; faisant

V cos $\varphi = V_1$, et conservant à c et à r les mêmes valeurs que

Fig. 4.



précédemment. Sans l'action de la pesanteur, le projectile se serait mû suivant la direction initiale OA; par conséquent, après avoir parcouru une longueur OB, dont la projection horizontale est x, il se sera élevé de $BC = x \text{ tang } \varphi$; mais, pendant la durée t du trajet, l'action de la pesanteur aura fait abaisser le projectile de Bm égal à $\frac{1}{2} gt^2$, et, par conséquent, la hauteur mC ou y au-dessus de l'horizontale sera $y = x \text{ tang } \varphi - \frac{1}{2} gt^2$; or, V_1 étant la vitesse initiale du mobile suivant la ligne horizontale, on aura

$$t = \frac{x}{V_1} \chi'(x, V_1),$$

et, par conséquent, pour l'équation de la trajectoire, en faisant $V^2 = 2gh$,

$$y = x \text{ tang } \varphi - \frac{x^2}{4h \cos^2 \varphi} \chi'(x, V_1),$$

En comparant cette équation à l'équation exacte, on voit qu'elle en diffère en ce que la fonction $\psi(x, V_1)$ est remplacée par la fonction $\{\chi'(x, V_1)\}^2$. Elle s'en éloigne plus que celle que l'on obtiendrait en remplaçant $\psi(x, V_1)$ par $\chi(x, V_1)^2$. Comme on l'a déjà fait, cette méthode n'a d'ailleurs que l'avantage de se prêter facilement à la construction par points, lorsqu'on a la loi du mouvement rectiligne, indépendamment de la pesanteur ; mais au moyen des tables numériques des fonctions $\psi(x, V_1)$ que nous avons calculées, la première formule est à la fois plus facile et plus exacte.

La manière dont Lombard a traité le mouvement des boulets [1] dans l'air revient à celle-ci; mais cet auteur supposait la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, et il ne prenait que les deux premiers termes du développement de l'exponentielle, de sorte que la formule comporte trois causes d'erreurs; on ne doit donc pas s'étonner que, dans les applications qu'on en a faites, on ait trouvé des désaccords très-considérables avec l'expérience.

38. TABLES DES FONCTIONS e^a, $F'(a)$, $F(a)$ ET $\psi(a, b)$, $\psi'(a, b)$.

Pour faciliter les applications numériques de nos formules, nous avons calculé des tables des fonctions e^a, $F'(a)$, $F(a)$; nous leur avons donné toute l'étendue et le degré de précision que comporte et que demande l'application au tir des bouches à feu et des armes à feu portatives. Nous les avons disposées de manière qu'elles soient indépendantes des dimensions et de la nature des projectiles, ainsi que de la grandeur des coefficients de la résistance de l'air. Pour cela, nous avons pris pour variable le rapport a de la distance x au nombre c qui dépend du diamètre et de la densité du projectile, et nous l'avons fait varier de centième en centième d'unité, depuis 0.00 jusqu'à 3.00; ensuite de 0.05 en 0.05 depuis 3.00 jusqu'à 6.00, et calculé ces trois fonctions avec 4 décimales exactes et leurs différences. Les valeurs de e^a ne sont autres que les nombres correspondants aux logarithmes naturels; les tables de ces logarithmes existent à la vérité dans les recueils ordinaires, mais comme elles contiennent les logarithmes pour les nombres croissant par unité, elles ne sont pas directement applicables au cas qui nous occupe et pour lequel on a presque toujours à considérer des nombres plus petits que l'unité. Cette table servira aussi à calculer les logarithmes naturels qui se présentent dans les applications de la balistique.

Les tables des valeurs de $F'(a)$ et $F(a)$, qui, vu leur mode commun de génération, peuvent être regardées comme des fonctions

[1] *Traité du mouvement des projectiles appliqué au tir des bouches à feu*, p. 109 et suivantes.

générales ayant une application particulière à la balistique, ont été également calculées dans la même étendue. On a conservé 4 décimales exactes [1]. Nous rapportons dans ce travail un extrait de ces tables pour les valeurs de a de 0.05 en 0.05, depuis 0.00 jusqu'à 1.50 seulement.

Les tables de la fonction $\psi(a, b)$ sont à deux variables; la première $\frac{x}{c}$ ou a croît de centième en centième depuis $a = 0.00$ jusqu'à $a = 1.50$ et de 0.05 en 0.05 depuis $a = 1.50$ jusqu'à $a = 3.00$; dans toute cette étendue $\frac{V_1}{r}$ ou b croît de 0.05 en 0.05 depuis $b = 0$ jusqu'à $b = 1.30$. Cette table s'étend ainsi au tir à toutes les distances et aux plus grandes vitesses dont on fait usage avec les projectiles qu'on emploie à la guerre.

Pour les valeurs de a et de b, qui ne tombent pas sur celles des tables, on les calcule au moyen des différences relatives à a et de celles relatives à b, qui sont écrites dans des colonnes distinctes. Par leur moyen, on pourra calculer les termes intermédiaires à un ou deux dix millièmes d'unité près depuis $a = 0.00$ jusqu'à $a = 1.50$ et à un millième d'unité au delà. Nous donnons un extrait de cette table pour les valeurs de a, de 0.05 en 0.05 depuis $a = 0.00$, jusqu'à $a = 1.50$ et pour celles de b jusqu'à 1.00, avec trois décimales seulement.

Nous n'avons pas eu besoin de calculer de tables spéciales pour

[1] En calculant les tables de la fonction $F'(a) = \frac{e^a - 1}{a}$, j'ignorais l'existence de celles que Véga donne dans son Traité de mathématique en langue allemande; je n'en ai eu connaissance que par M. Terquem, l'érudit bibliothécaire du dépôt central de l'artillerie. En comparant ces tables avec les miennes, calculées avec 5 décimales, j'ai trouvé quelques différences d'une unité sur le quatrième chiffre et provenant d'une unité seulement sur la 5e décimale. J'ai pu reconnaître que l'erreur était du côté des tables de Véga. Il en a été de même pour trois nombres qui différaient de plus d'une unité sur la 5e décimale; ces valeurs sont $a = 2{,}34$, $a = 2{,}67$, $a = 2{,}99$, pour lesquelles Véga donne respectivement $F'(a) = 4.0090$, $F'(a) = 5.0336$, $F'(a) = 6{,}3162$: pour ces valeurs, ma table porte $a = 4.0091$, $a = 5.0337$, $a = 6{,}3163$. J'ai recommencé le calcul avec des tables de logarithmes à 7 décimales et j'ai trouvé 4,00908, 5,03370, 6,31628, ce qui fait voir que l'erreur était du côté de Véga. Une dernière erreur plus considérable existe pour $a = 2.80$; Véga donne $F'a = 5{,}5059$, tandis que la valeur exacte est 5.51594. Une erreur aussi grande est étonnante; les différences entre les termes consécutifs auraient dû la faire découvrir.

les valeurs de $\psi'(a, b)$; nous avons pu y suppléer par celles de la fonction $\psi(a, b)$. La première étant exprimée en $F'(a)$ de la même manière que l'autre en $F(a)$, il en résulte que quand ces dernières quantités sont égales entre elles, pour deux valeurs particulières a et a', c'est à-dire pour lesquelles $F(a) = F'(a')$, les fonctions $\psi(a, b)$ et $\psi'(a', b)$ ne diffèrent que par celles de $F\left(\frac{a}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{a'}{2}\right)$, toujours très-rapprochées l'une de l'autre, et l'on a simplement

$$\psi'(a', b) - \psi(a, b) = 2(1 + b)\, b \left(F\left(\frac{a}{2}\right) - F'\left(\frac{a'}{2}\right)\right).$$

L'application numérique fait voir que cette différence est très-petite tant que les valeurs de a et de b sont peu considérables, mais qu'elle n'est pas toujours négligeable. Pour en tenir compte dans tous les cas, nous avons, pour chacune des valeurs de a de la table des fonctions $\psi(a, b)$, calculé la différence $2\left(F'\frac{a'}{2} - F\frac{a}{2}\right)$, de sorte qu'en multipliant cette différence par le produit $(1 + b)\, b$ relatif à chaque valeur particulière de b, on aura la correction, toujours négative, à faire subir aux nombres de la table calculés précédemment, avec l'attention de chercher les valeurs de $a = \frac{x}{c}$ dans la colonne des valeurs de a' pour lesquelles $F'(a') = F(a)$.

Le calcul des valeurs de la fonction $\chi'(a, b) = (1 + b)\, F'a - b$ et de $\chi''(a, b) = (1 + b)\, e^a - b$ est facile et se réduit à une simple multiplication au moyen de la table des valeurs de $F'(a)$ et de e^a. En effet, en mettant les fonctions χ' et χ'' respectivement sous la forme

$$F'a + (F'a - 1)\, b \text{ et } e^a + (e^a - 1)\, b,$$

et après avoir cherché dans la table les valeurs de $F'(a)$ ou e^a, il suffira de retrancher l'unité de ces quantités, ce qui donnera presque toujours un nombre moindre que l'unité, et de multiplier le reste par b, qui ne dépassera jamais 1.30 dans l'application au tir des bouches à feu.

Nous avons donné à la table des valeurs de $\chi''(a, b)$ la même étendue qu'aux précédentes; elle fournit, sans correction, les valeurs de $\chi'(a', b)$ pour les valeurs de a' telles que $F'(a') = e^a$. Nous en donnnons un extrait avec trois décimales, de 0.05 en 0.05 depuis 0.00 jusqu'à $a = 1.50$ et $b = 1.30$.

CIRCONSTANCES DANS LESQUELLES LA RÉSISTANCE DE L'AIR PEUT ÊTRE REPRÉSENTÉE PAR UN SEUL TERME PROPORTIONNEL AU CARRÉ DE LA VITESSE, ET FORMULES QUI S'Y RAPPORTENT.

39.

Nous avons fait voir (28 à 34) que lorsque l'angle de projection d'un mobile au-dessus de l'horizon n'était pas plus grand que celui que permet le tir des canons et des obusiers, on arrivait à une solution facile des divers problèmes qu'on peut se proposer sur le tir de ces bouches à feu, dans le cas où la résistance de l'air était exprimée par deux termes respectivement proportionnels au cube et au carré de la vitesse. Ces mêmes formules se simplifient beaucoup dans l'hypothèse où la résistance est exprimée par un seul terme proportionnel au carré de la vitesse; examinons d'abord les cas où cette supposition pourrait être admise.

Lorsque le projectile lancé sous un petit angle de projection n'a pas un grand trajet à parcourir, que sa vitesse initiale n'est pas considérable, et qu'en même temps il n'est ni de faible calibre ni de faible densité, il en résulte que sa vitesse diminue peu du commencement du trajet à la fin. Dans ce cas, il est permis de simplifier l'expression de la résistance de l'air et de la réduire à un seul terme proportionnel au carré de la vitesse.

Dans l'expression générale de la résistance de l'air $\varrho = A\pi R^2 v^2 \left(1 + \frac{v}{r}\right)$, la valeur de $\frac{1}{r}$ est une très-petite fraction, de sorte que si v n'est pas grand, le rapport $\frac{v}{r}$ ne sera qu'une petite fraction de l'unité; et si en même temps il varie peu du commencement à la fin du trajet, on pourra, sans grande erreur, remplacer sa

valeur variable d'un instant à l'autre par une valeur moyenne regardée comme constante.

Les circonstances de fort calibre, de faible vitesse et de distances peu considérables se trouvent particulièrement réunies dans le tir plongeant ou tir à ricochet; ce tir ne s'exécute qu'avec les boulets ou les obus des plus forts calibres, avec des vitesses assez petites pour que le projectile soit dans sa branche descendante lorsqu'il arrive vers le point à battre et à des distances de la bouche à feu limitées à la fois par les circonstances du service et pour éviter les trop grandes déviations. Dans ce cas, le rapport $\frac{x}{2c}$ ne sera qu'une petite fraction, et le rapport de la vitesse initiale V à la vitesse d'arrivée v', qui, d'après l'expression exacte de la force accélératrice de la résistance de l'air $\varrho' = \frac{v^2}{2c}\left(1 + \frac{v}{r}\right)$, est $\frac{V}{v'} = \left(1 + \frac{V_1}{r}\right) e^{\frac{x}{2c}} - \frac{V_1}{r}$, sera peu différent de l'unité, de sorte que $\left(1 + \frac{v}{r}\right)$, dans l'expression de la résistance de l'air, peut être remplacé par sa valeur moyenne $1 + \frac{1}{r}\frac{V + v'}{2}$; et, en faisant $A' = A\left(1 + \frac{1}{r}\frac{V + v'}{2}\right)$, la résistance de l'air aura pour expression $\varrho = A'\pi R^2 v^2$. La valeur de A', comme celle de v', et dans certains cas celle de V, devront être déterminées au moins approximativement avant l'application des formules.

Soit, pour exemple, un boulet de 24 lancé avec une vitesse initiale de $120^{m,s}$, à une distance de 350^m. En prenant $A = 0.027$, $\frac{1}{r} = 0.0023$ pour la résistance de l'air, $12^{k},01$ pour le poids du boulet, $2R = 0^m,1485$ pour son diamètre, $g = 9^m,809$, on aura $2c = 2674^m$; $\frac{x}{2c} = 0.1139$ et $v' = 104^m,0$; les valeurs extrêmes de $\left(1 + \frac{v}{r}\right)$ seront 1.276 et 1.238; elles diffèrent de leur valeur moyenne 1.257, l'une et l'autre de 0.019 ou $\frac{1}{66}$ de celle-ci en plus ou en moins; cette faible différence dans l'expression de la

résistance de l'air ne peut apporter dans la forme de la trajectoire et dans les relations des divers éléments que des erreurs négligeables; on peut donc, dans des circonstances semblables, remplacer l'expression binôme de la résistance par l'expression monôme, supposer celle-ci proportionnelle au carré de la vitesse, et déterminer le coefficient de cette résistance d'après la vitesse moyenne, qui devra être connue au moins approximativement. Dans l'exemple cité, on aurait $A' = A\ 1{,}257$, et, par conséquent, $\varrho = 0.03395\ \pi R^2 v^2$ et $2c' = \frac{2c}{1.257} = 2127^{m},3$, et, en général, pour l'expression de la résistance de l'air $\varrho = A'\pi R^2 v^2$, et, pour la force retardatrice $\varrho' = \frac{v^2}{2c'}$, en faisant $2c' = \frac{P}{gA'\pi R^2}$.

La quantité c' est ici la hauteur due à la vitesse à laquelle la résistance qu'éprouverait le projectile dans l'air serait égale à son poids; car si u est cette vitesse, on devra avoir $A'\pi R' u^2 = P$, ce qui donne $u^2 = 2gc'$. Cela posé, et en suivant la même marche que précédemment, on arriverait à l'équation de la trajectoire, à l'inclinaison de cette courbe en un point quelconque, à la durée du trajet et à la vitesse de projectile, et ensuite à la solution des divers problèmes que l'on peut se proposer pour l'espèce de tir auquel l'hypothèse que nous avons faite s'applique. Mais il est plus simple de déduire ces solutions des résultats auxquels nous sommes déjà arrivés; il suffira, en effet, de supposer partout $\frac{1}{r} = 0$, alors les fonctions composées $\psi(x, V_1)$, et $\psi'(x, V_1)$, se réduisent respectivement à $F\left(\frac{x}{c'}\right)$ et $F'\left(\frac{x}{c'}\right)$; les fonctions $\chi'(x, V_1)$, et $\chi''(x, V_1)$, se réduisent à $F'\left(\frac{x}{2c'}\right)$ et $e^{\frac{x}{2c'}}$; la valeur de c' sera calculée pour le cas auquel on applique les formules.

40.

D'après cela, on trouve pour l'équation de la trajectoire l'inclinaison, la durée et la vitesse du projectile, en conservant les

mêmes notations que précédemment, mais en accentuant la valeur de c pour la distinguer.

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi} F\left(\frac{x}{c'}\right); \quad \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi} F'\left(\frac{x}{c'}\right)$$

$$t = \frac{x}{V\cos\varphi} F'\left(\frac{x}{2c'}\right) \text{ et } v = V\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{1}{c\frac{x}{2c'}}.$$

Cette équation de la trajectoire et ces autres valeurs sont au fond les mêmes que celles auxquelles sont arrivés les divers auteurs[1] qui se sont occupés de balistique; seulement, celles que nous donnons sont beaucoup plus simples, par suite de l'introduction des fonctions F et F', qui tiennent compte de la résistance de l'air.

La solution des divers problèmes que l'on peut avoir à résoudre s'obtiendra de même en faisant, comme on va le voir, $\frac{1}{r} = 0$ dans les résultats que nous avons déjà obtenus.

41. SOLUTION DES DIVERS PROBLÈMES ENTRE LES PORTÉES, LES VITESSES INITIALES ET LES ANGLES DE PROJECTION.

Lorsque le but est à hauteur de la bouche à feu, on a $x = 0$; appelant X la portée horizontale, l'équation de la trajectoire, après avoir divisé par X, deviendra

$$0 = \operatorname{tang}\varphi - \frac{X}{4h\cos^2\varphi} F\left(\frac{X}{c'}\right),$$

d'où l'on tire

$$\sin 2\varphi = \frac{X}{2h} F\left(\frac{X}{c'}\right), \quad h = \frac{X}{2\sin 2\varphi} F\left(\frac{X}{c'}\right) \text{ ou } V^2 = \frac{gX}{\sin 2\varphi} F\left(\frac{X}{c'}\right).$$

Quant à la valeur de X, on peut l'obtenir par approximation : 1° en recherchant par plusieurs essais la valeur de $\frac{X}{c'}$,

[1] Bezout, *Cours de mécanique*, n° 520; Poisson, *Cours de mécanique*, t. I; Persy, *Cours de balistique*, lithographie de l'École d'application, Metz, 1833; d'Obenheim et divers auteurs, *Aide-mémoire d'artillerie*, 1844, p. 641.

qui satisfait à l'équation mise sous la forme $\frac{X}{c'} F\frac{X}{c'} = 2h \sin 2\varphi$, ce qui est facile au moyen de tables des fonctions F (a) et des parties proportionnelles; 2° en développant cette fonction au moyen du retour des suites, ce qui donnera, en appelant X′ la portée dans le vide, qui est $X' = 2h \sin 2\varphi$,

$$X = X'\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{X'}{c'} + \frac{5}{36}\left(\frac{X'}{c'}\right)^2 - \frac{17}{270}\left(\frac{X'}{c'}\right)^3 + \frac{193}{6480}\left(\frac{X'}{c'}\right)^4 + \frac{521}{45360}\left(\frac{X'}{c'}\right)^5 + \text{etc.}\right\}.$$

On arrive à une expression simple des coordonnées du sommet de la trajectoire; en les appelant x' et y', observant que ce point appartient à la trajectoire et que l'inclinaison est nulle, on aura, en remplaçant les fonctions F et F′ par leurs expressions en $e^{\frac{x}{c}}$, les deux équations,

$$y' = x' \operatorname{tang}\varphi - \frac{c'^2}{2h\cos^2\varphi}\left\{e^{\frac{x'}{c'}} - \frac{x'}{c'} - 1\right\} \text{ et } 0 = \operatorname{tang}\varphi - \frac{c'}{2h\cos^2\varphi}\left(e^{\frac{x'}{c'}} - 1\right)$$

d'où l'on tire :

$$x' = c' \log\left(1 + \frac{h}{c'}\sin 2\varphi\right) \text{ et } y' = x'\left(\operatorname{tang}\varphi + \frac{c'}{2h\cos^2\varphi}\right) - c' \operatorname{tang}\varphi.$$

Lorsque le point à battre n'est pas à hauteur de la bouche à feu, a et b étant les coordonnées de ce point, on a

$$b = a \operatorname{tang}\varphi - \frac{a^2}{4h\cos^2\varphi} F\left(\frac{a}{c'}\right);$$

en faisant $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}\varepsilon$, on aura, si la vitesse initiale est l'inconnue,

$$h = \frac{a}{4\cos^2\varphi\,(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varepsilon)} F\left(\frac{a}{c'}\right) \text{ ou } V = \sqrt{\frac{ag}{2\cos^2\varphi\,(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varepsilon)} F\left(\frac{a}{c'}\right)}$$

et par des transformations connues,

$$h = \frac{a}{4\sin(\varphi - \varepsilon)} \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi} F\left(\frac{a}{c'}\right) \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{\frac{ag}{2\sin(\varphi - \varepsilon)} \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi} F\left(\frac{a}{c'}\right)}$$

Si l'angle de projection φ est l'inconnue, on aura deux valeurs dont la plus petite seule peut être admise; en faisant $\frac{h}{\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right)} = h'$, elle sera :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2h'}{a} - \frac{2}{a}\sqrt{h'\left(h'-b\right) - \frac{a^2}{4}}.$$

Lorsque la trajectoire doit passer par deux points donnés dont les coordonnées sont a et b, a' et b', et qu'on demande la vitesse et l'angle de projection, la solution est très-simple; car des deux équations qui doivent exister en même temps,

$$b = a\operatorname{tang}\varphi - \frac{a^2}{4h\cos^2\varphi}\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right), \quad b' = a'\operatorname{tang}\varphi - \frac{a'^2}{4h\cos^2\varphi}\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right),$$

ou

$$\operatorname{tang}\varphi - \frac{b}{a} = \frac{a\,\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right)}{4h\cos^2\varphi}, \qquad \operatorname{tang}\varphi - \frac{b'}{a'} = \frac{a'\mathrm{F}\left(\frac{a'}{c'}\right)}{4h\cos^2\varphi},$$

en divisant l'une par l'autre, on aura :

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi - \frac{b}{a}}{\operatorname{tang}\varphi - \frac{b'}{a'}} = \frac{a}{a'}\,\frac{\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{a'}{c'}\right)}; \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a\,\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right)\cdot\frac{b}{a'} - a'\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right)\cdot\frac{b}{a}}{a\,\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right) - a'\mathrm{F}\left(\frac{a'}{c'}\right)}.$$

Connaissant φ, on tirera des mêmes équations

$$\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} = \frac{a'\mathrm{F}\frac{a'}{c'} - a\,\mathrm{F}\frac{a}{c'}}{4h\cos^2\varphi}; \quad \text{d'où} \quad h = \frac{a'\mathrm{F}\frac{a'}{c'} - a\,\mathrm{F}\frac{a}{c}}{4\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)\cos^2\varphi}, \quad \text{puis} \quad \mathrm{V} = \sqrt{2gh}.$$

Si la trajectoire doit passer par un point donné dont les coordonnées sont a et b, et faire en ce point un angle θ avec l'horizon, on aura les deux équations

$$b = a\operatorname{tang}\varphi - \frac{a^2}{4h\cos^2\varphi}\mathrm{F}\left(\frac{a}{c'}\right) \text{ et } \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{a}{2h\cos^2\varphi}\mathrm{F}'\left(\frac{a}{c'}\right).$$

ou, en faisant $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} \varepsilon$,

$$\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{a\,F\left(\frac{a}{c'}\right)}{4h\cos^2\varphi} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \theta = \frac{a\,F'\frac{a}{c'}}{2h\cos^2\varphi}$$

divisant membre à membre, on aura

$$\frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \theta}{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varepsilon} = \frac{2F'\left(\frac{a}{c'}\right)}{F\left(\frac{a}{c'}\right)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{2F'\left(\frac{a}{c'}\right)\operatorname{tang} \varepsilon - F\left(\frac{a}{c'}\right)\operatorname{tang} \theta}{2F'\left(\frac{a}{c'}\right) - F\left(\frac{a}{c'}\right)}$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\operatorname{tang} \varepsilon - \operatorname{tang} \theta = \frac{a}{4h\cos^2\varphi}\left(2F'\left(\frac{a}{c'}\right) - F\left(\frac{a}{c'}\right)\right) \text{ et } h = \frac{a}{4\cos^2\varphi}\,\frac{2F'\frac{a}{c'} - F\frac{a}{c'}}{\operatorname{tang} \varepsilon - \operatorname{tang} \theta}.$$

Dans chacun de ces problèmes on déterminera la durée et la vitesse du projectile par les valeurs de t et de v, qui ont été données plus haut.

42.

La solution des principaux problèmes qu'on peut se proposer dans le tir plongeant se trouve ainsi très-facile dans l'hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse du projectile; mais on doit, comme on l'a dit, déterminer la valeur de c' pour chaque cas particulier, ce qui force à déterminer, quand elles ne sont pas connues, la vitesse initiale et la longueur du trajet, d'où dépend la vitesse moyenne qui entre dans la valeur de $A' = A\left(1 + \frac{V+v}{2r}\right)$ et, par suite, dans celle de c'. Cette méthode n'est pas sans inconvénients, à cause des opérations préliminaires qu'elle exige; et il est préférable, dans tous les cas, d'employer les formules directes, qui sont plus exactes et qui n'entraînent à aucun calcul préparatoire.

La méthode que nous avons indiquée pour le cas des petites vitesses des gros projectiles et des courtes distances ne pourrait être appliquée sans des erreurs notables lorsque ces circonstances ne sont pas réunies; tel est le cas du tir des boulets aux grandes distances et avec les vitesses qu'on leur imprime ordinairement; la vitesse du projectile varie trop rapidement, et le terme proportionnel au cube de la vitesse a une trop grande influence pour qu'il puisse être remplacé par une valeur moyenne. Ainsi, un boulet de 24, ayant $0^m,1485$ de diamètre et pesant $12^k,01$, animé d'une vitesse initiale de $500^{m:s}$, conserverait, d'après la loi de résistance de l'air que nous avons admise, aux distances de 500^m, $1\,000^m$, $1\,500^m$, $2\,000^m$, des vitesses de 360^m, 270^m, 212^m, 169^m; la valeur du coefficient $1+\frac{V+v}{2r}$ serait respectivement 1,988, 1,882, 1,818, 1,768, et celle de A', qui doit multiplier $\pi R^2 v^2$, devrait être respectivement aussi 0,0537, 0,0502, 0,0491, 0,0472. Il résulte de cette diminution, que si on voulait chercher les vitesses initiales qui, sous des angles observés, ont donné les portées de 500^m, $1\,000^m$, $1\,500^m$, $2\,000^m$, et qu'on adoptât le coefficient qui satisferait à l'observation de la portée de 500^m et qui donnerait une certaine vitesse, on trouverait pour les autres des vitesses plus grandes. En effet, en observant que ce coefficient devrait être plus petit pour les distances plus grandes, on voit que cela revient à supposer la résistance de l'air trop grande; par conséquent, on trouverait des vitesses initiales d'autant plus grandes que les portées dont on les déduirait seraient plus considérables [1]. On voit ainsi que les formules que nous avons données en premier lieu présentent dans tous les cas plus d'exactitude et plus de simplicité.

[1] C'est ce qui est arrivé presque constamment, et notamment dans les expériences d'artillerie exécutées à Gavre de 1830 à 1840, par ordre de M. le ministre de la marine. C'est à à tort qu'on en a conclu que les vitesses d'un boulet lancé avec des charges égales de poudre augmentaient avec l'angle de projection.

I. Table des valeurs

de e^a; $F'(a) = \frac{e^a - 1}{a}$; $F(a) = 2\frac{F'(a) - 1}{a}$; $e = 2.71828$.

a.	e^a.	$F'(a)$.	$F(a)$.	a.	e^a.	$F'(a)$.	$F(a)$.	a.	e^a.	$F'(a)$.	$F(a)$.
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.50	1.6487	1.2974	1.1898	1.00	2.7183	1.7183	1.4365
0.01	1.0100	1.0050	1.0033	0.51	1.6653	1.3045	1.1941	1.01	2.7456	1.7283	1.4421
0.02	1.0202	1.0101	1.0067	0.52	1.6820	1.3116	1.1985	1.02	2.7732	1.7384	1.4478
0.03	1.0304	1.0152	1.0101	0.53	1.6989	1.3187	1.2028	1.03	2.8010	1.7486	1.4535
0.04	1.0408	1.0203	1.0135	0.54	1.7160	1.3259	1.2072	1.04	2.8292	1.7589	1.4597
0.05	1.0513	1.0254	1.0169	0.55	1.7333	1.3332	1.2116	1.05	2.8577	1.7692	1.4650
0.06	1.0618	1.0306	1.0203	0.56	1.7507	1.3405	1.2160	1.06	2.8864	1.7796	1.4708
0.07	1.0725	1.0358	1.0238	0.57	1.7683	1.3478	1.2205	1.07	2.9154	1.7901	1.4767
0.08	1.0833	1.0411	1.0272	0.58	1.7860	1.3552	1.2250	1.08	2.9447	1.8006	1.4826
0.09	1.0942	1.0464	1.0307	0.59	1.8040	1.3627	1.2295	1.09	2.9743	1.8113	1.4885
0.10	1.1052	1.0517	1.0342	0.60	1.8221	1.3702	1.2340	1.10	3.0042	1.8220	1.4944
0.11	1.1163	1.0571	1.0377	0.61	1.8404	1.3778	1.2386	1.11	3.0343	1.8328	1.5004
0.12	1.1275	1.0625	1.0413	0.62	1.8589	1.3854	1.2431	1.12	3.0648	1.8436	1.5064
0.13	1.1388	1.0679	1.0448	0.63	1.8776	1.3930	1.2477	1.13	3.0956	1.8546	1.5124
0.14	1.1503	1.0734	1.0484	0.64	1.8965	1.4007	1.2524	1.14	3.1268	1.8656	1.5185
0.15	1.1618	1.0789	1.0520	0.65	1.9155	1.4085	1.2570	1.15	3.1582	1.8767	1.5246
0.16	1.1735	1.0844	1.0556	0.66	1.9347	1.4163	1.2617	1.16	3.1899	1.8879	1.5308
0.17	1.1853	1.0900	1.0592	0.67	1.9542	1.4242	1.2664	1.17	3.2220	1.8991	1.5370
0.18	1.1972	1.0956	1.0629	0.68	1.9738	1.4322	1.2711	1.18	3.2544	1.9105	1.5432
0.19	1.2093	1.1013	1.0665	0.69	1.9937	1.4402	1.2758	1.19	3.2871	1.9219	1.5494
0.20	1.2214	1.1070	1.0702	0.70	2.0138	1.4482	1.2806	1.20	3.3201	1.9334	1.5557
0.21	1.2337	1.1127	1.0739	0.71	2.0340	1.4563	1.2854	1.21	3.3535	1.9450	1.5620
0.22	1.2461	1.1185	1.0776	0.72	2.0544	1.4645	1.2902	1.22	3.3872	1.9567	1.5683
0.23	1.2586	1.1243	1.0813	0.73	2.0751	1.4727	1.2950	1.23	3.4212	1.9685	1.5747
0.24	1.2712	1.1302	1.0850	0.74	2.0959	1.4810	1.2999	1.24	3.4556	1.9803	1.5811
0.25	1.2840	1.1361	1.0888	0.75	2.1170	1.4893	1.3048	1.25	3.4903	1.9923	1.5876
0.26	1.2969	1.1420	1.0926	0.76	2.1383	1.4977	1.3097	1.26	3.5254	2.0043	1.5941
0.27	1.3099	1.1480	1.0964	0.77	2.1598	1.5062	1.3147	1.27	3.5608	2.0164	1.6007
0.28	1.3231	1.1540	1.1002	0.78	2.1815	1.5147	1.3197	1.28	3.5966	2.0286	1.6073
0.29	1.3364	1.1601	1.1040	0.79	2.2034	1.5233	1.3247	1.29	3.6328	2.0409	1.6139
0.30	1.3499	1.1662	1.1079	0.80	2.2255	1.5319	1.3297	1.30	3.6693	2.0533	1.6205
0.31	1.3634	1.1723	1.1118	0.81	2.2479	1.5406	1.3348	1.31	3.7062	2.0658	1.6272
0.32	1.3771	1.1785	1.1157	0.82	2.2705	1.5494	1.3399	1.32	3.7434	2.0783	1.6339
0.33	1.3910	1.1847	1.1197	0.83	2.2933	1.5582	1.3451	1.33	3.7810	2.0910	1.6406
0.34	1.4049	1.1910	1.1236	0.84	2.3164	1.5671	1.3502	1.34	3.8190	2.1038	1.6474
0.35	1.4191	1.1973	1.1276	0.85	2.3396	1.5761	1.3554	1.35	3.8574	2.1166	1.6542
0.36	1.4333	1.2037	1.1316	0.86	2.3631	1.5851	1.3606	1.36	3.8962	2.1296	1.6611
0.37	1.4477	1.2101	1.1356	0.87	2.3869	1.5941	1.3658	1.37	3.9353	2.1426	1.6680
0.38	1.4623	1.2165	1.1397	0.88	2.4109	1.6033	1.3711	1.38	3.9749	2.1557	1.6749
0.39	1.4770	1.2230	1.1437	0.89	2.4351	1.6125	1.3764	1.39	4.0148	2.1689	1.6819
0.40	1.4918	1.2296	1.1478	0.90	2.4596	1.6218	1.3817	1.40	4.0552	2.1823	1.6889
0.41	1.5068	1.2361	1.1519	0.91	2.4843	1.6311	1.3871	1.41	4.0959	2.1957	1.6959
0.42	1.5219	1.2428	1.1560	0.92	2.5093	1.6405	1.3925	1.42	4.1371	2.2092	1.7031
0.43	1.5372	1.2494	1.1602	0.93	2.5345	1.6500	1.3979	1.43	4.1787	2.2229	1.7103
0.44	1.5527	1.2562	1.1643	0.94	2.5600	1.6596	1.4033	1.44	4.2207	2.2366	1.7175
0.45	1.5683	1.2629	1.1685	0.95	2.5857	1.6692	1.4088	1.45	4.2631	2.2504	1.7247
0.46	1.5841	1.2697	1.1727	0.96	2.6117	1.6789	1.4143	1.46	4.3059	2.2643	1.7320
0.47	1.6000	1.2766	1.1770	0.97	2.6379	1.6886	1.4198	1.47	4.3492	2.2784	1.7393
0.48	1.6161	1.2835	1.1812	0.98	2.6644	1.6984	1.4253	1.48	4.3929	2.2925	1.7467
0.49	1.6323	1.2904	1.1855	0.99	2.6912	1.7083	1.4309	1.49	4.4371	2.3068	1.7541
0.50	1.6487	1.2974	1.1898	1.00	2.7183	1.7183	1.4365	1.50	4.4817	2.3211	1.7615

II. Table des valeurs de ψ

a.	$b=0.00$	$b=0.05$	$b=0.10$	$b=0.15$	$b=0.20$	$b=0.25$	$b=0.30$	$b=0.35$	$b=0.40$	$b=0.45$	$b=0.50$	$b=0.55$	$b=0.60$	$b=0.65$
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	1.017	1.018	1.019	1.020	1.020	1.021	1.022	1.023	1.024	1.025	1.025	1.026	1.027	1.028
0.10	1.034	1.036	1.038	1.039	1.041	1.043	1.045	1.046	1.048	1.050	1.052	1.053	1.055	1.057
0.15	1.052	1.055	1.057	1.060	1.063	1.065	1.068	1.071	1.073	1.076	1.079	1.082	1.084	1.087
0.20	1.070	1.074	1.077	1.081	1.085	1.088	1.092	1.096	1.099	1.103	1.107	1.110	1.114	1.118
0.25	1.089	1.093	1.098	1.103	1.107	1.112	1.117	1.121	1.126	1.131	1.135	1.140	1.145	1.149
0.30	1.108	1.114	1.119	1.125	1.130	1.136	1.142	1.148	1.153	1.159	1.165	1.171	1.176	1.182
0.35	1.128	1.134	1.141	1.148	1.154	1.161	1.168	1.175	1.182	1.189	1.196	1.203	1.209	1.216
0.40	1.148	1.156	1.163	1.171	1.179	1.187	1.195	1.203	1.211	1.219	1.227	1.235	1.244	1.252
0.45	1.169	1.177	1.186	1.195	1.205	1.214	1.223	1.232	1.241	1.251	1.260	1.269	1.279	1.288
0.50	1.190	1.200	1.210	1.220	1.231	1.241	1.252	1.262	1.273	1.283	1.294	1.305	1.315	1.326
0.55	1.212	1.223	1.234	1.246	1.258	1.269	1.281	1.293	1.305	1.317	1.329	1.341	1.353	1.365
0.60	1.234	1.247	1.259	1.272	1.285	1.298	1.311	1.325	1.338	1.351	1.365	1.378	1.392	1.406
0.65	1.257	1.271	1.285	1.299	1.314	1.328	1.343	1.357	1.372	1.387	1.402	1.417	1.432	1.447
0.70	1.281	1.296	1.311	1.327	1.343	1.359	1.375	1.391	1.407	1.423	1.440	1.457	1.473	1.490
0.75	1.305	1.322	1.339	1.356	1.373	1.390	1.408	1.425	1.443	1.461	1.479	1.498	1.516	1.535
0.80	1.330	1.348	1.366	1.385	1.404	1.423	1.442	1.461	1.481	1.500	1.520	1.540	1.560	1.581
0.85	1.355	1.375	1.395	1.415	1.436	1.457	1.477	1.499	1.520	1.541	1.563	1.584	1.606	1.629
0.90	1.382	1.403	1.425	1.447	1.469	1.491	1.514	1.536	1.559	1.583	1.606	1.630	1.654	1.678
0.95	1.409	1.432	1.455	1.479	1.503	1.527	1.551	1.576	1.601	1.626	1.651	1.677	1,703	1.729
1.00	1.437	1.461	1.486	1.512	1.538	1.563	1.590	1.616	1.643	1.670	1.697	1.725	1.753	1.781
1.05	1.465	1.492	1.519	1.546	1.573	1.601	1.629	1.658	1.687	1.716	1.745	1.775	1.805	1.836
1.10	1.494	1.523	1.552	1.581	1.610	1.640	1.671	1.701	1.732	1.763	1.795	1,827	1.859	1.892
1.15	1.525	1.555	1.586	1.617	1.649	1.681	1.713	1.746	1.779	1.812	1.846	1.881	1.915	1.950
1.20	1.556	1.588	1.621	1.654	1.688	1.722	1.757	1.792	1.827	1.863	1.899	1,936	1.973	2.011
1.25	1.588	1.622	1.657	1.692	1.728	1.765	1.802	1.839	1.877	1.915	1.954	1.993	2.033	2.073
1.30	1.621	1.657	1.694	1.732	1.770	1.809	1.848	1.888	1.928	1.969	2.011	2.053	2.095	2.138
1.35	1.654	1.693	1.733	1.773	1.813	1.854	1.896	1.938	1.981	2.025	2.069	2,114	2.159	2.205
1.40	1.689	1.730	1,772	1.814	1.857	1.901	1.945	1.990	2.036	2.082	2.129	2,177	2.225	2.274
1.45	1.725	1.768	1.813	1.858	1.903	1.950	1.997	2.044	2.093	2.142	2.192	2.242	2.293	2.345
1.50	1.762	1.808	1.854	1.902	1.950	1.999	2.049	2.100	2.151	2.203	2.256	2.310	2.364	2.419

$\psi'(a', b)$ QUAND $F'(a') = F(a)$.

b=0.80	b=0.85	b=0.90	b=0.95	b=1.00	b=1.05	b=1.10	b=1.15	b=1.20	b=1.25	b=1.30	a.	a'.	DIFFÉRENCES.	CORRECTION à multiplier par $b(1+b)$ (négative).
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.00	0.000		0.000
1.031	1.031	1.032	1.033	1.034	1.035	1.036	1.037	1.037	1.038	1.039	0.05	0.033	33	0.000
1.062	1.064	1.066	1.067	1.069	1.071	1.073	1.075	1.076	1.078	1.080	0.10	0.067	34	0.000
1.095	1.098	1.101	1.103	1.106	1.109	1.112	1.114	1.117	1.120	1.123	0.15	0.101	34	0.000
1.129	1.133	1.137	1.140	1.144	1.148	1.151	1.155	1.159	1.163	1.167	0.20	0.134	33	0.000
1.164	1.169	1.173	1.178	1.183	1.188	1.193	1.198	1.203	1.207	1.212	0.25	0.168	34	0.000
1.200	1.206	1.212	1.218	1.224	1.230	1.236	1.242	1.248	1.254	1.260	0.30	0.202	34	0.000
1.238	1.245	1.252	1.259	1.266	1.273	1.281	1.288	1.295	1.303	1.310	0.35	0.236	34	0.001
1.277	1.285	1.294	1.302	1.310	1.319	1.328	1.336	1.345	1.353	1.362	0.40	0.270	34	0.001
1.317	1.327	1.337	1.346	1.356	1.366	1.376	1.386	1.396	1.406	1.416	0.45	0.304	34	0.001
1.359	1.370	1.382	1.393	1.404	1.415	1.427	1.438	1.450	1.461	1.473	0.50	0.338	34	0.001
1.403	1.415	1.428	1.440	1.453	1.466	1.479	1.492	1.505	1.518	1.531	0.55	0.372	35	0.002
1.447	1.462	1.476	1.490	1.504	1.519	1.533	1.548	1.563	1.578	1.593	0.60	0.407	34	0.002
1.494	1.509	1.525	1.541	1.557	1.573	1.590	1.606	1.623	1.639	1.656	0.65	0.441	35	0.002
1.542	1.559	1.577	1.594	1.612	1.630	1.648	1.666	1.684	1.703	1.721	0.70	0.476	35	0.003
1.591	1.610	1.630	1.649	1.669	1.688	1.708	1.728	1.749	1.769	1.790	0.75	0.511	34	0.003
1.643	1.664	1.685	1.706	1.728	1.749	1.771	1.793	1.816	1.838	1.860	0.80	0.545	35	0.004
1.696	1.719	1.743	1.766	1.789	1.813	1.837	1.861	1.886	1.910	1.935	0.85	0.580	35	0.004
1.751	1.776	1.802	1.827	1.853	1.879	1.905	1.931	1.958	1.985	2.012	0.90	0.615	35	0.005
1.809	1.836	1.863	1.891	1.919	1.967	1.975	2.004	2.033	2.062	2.091	0.95	0.650	35	0.005
1.868	1.897	1.927	1.957	1.987	2.017	2.048	2.079	2.111	2.142	2.174	1.00	0.685	36	0.006
1.929	1.960	1.992	2.025	2.057	2.090	2.124	2.157	2.191	2.225	2.260	1.05	0.721	35	0.007
1.992	2.027	2.061	2.096	2.131	2.167	2.203	2.239	2.276	2.313	2.350	1.10	0.756	36	0.007
2.058	2.095	2.132	2.170	2.207	2.246	2.284	2.324	2.363	2.403	2.443	1.15	0.792	35	0.008
2.127	2.166	2.206	2.246	2.287	2.328	2.370	2.412	2.454	2.497	2.540	1.20	0.827	36	0.009
2.197	2.339	2.282	2.325	2.369	2.413	2.458	2.503	2.549	2.594	2.641	1.25	0.863	36	0.010
2.270	2.315	2.361	2.407	2.454	2.501	2.549	2.597	2.646	2.696	2.746	1.30	0.899	35	0.011
2.346	2.394	2.443	2.492	2.542	2.593	2.644	2.695	2.748	2.801	2.854	1.35	0.934	36	0.012
2.424	2.475	2.527	2.580	2.633	2.687	2.742	2.797	2.853	2.909	2.966	1.40	0.970	36	0.013
2.505	2.560	2.616	2.672	2.728	2.786	2.844	2.903	2.963	3.023	3.084	1.45	1.006	37	0.014
2.589	2.648	2.707	2.766	2.827	2.888	2.950	3.013	3.076	3.141	3.206	1.50	1.043		0.015

III. Table des valeurs de χ''

z	$b=0.00$	$b=0.05$	$b=0.10$	$b=0.15$	$b=0.20$	$b=0.25$	$b=0.30$	$b=0.35$	$b=0.40$	$b=0.45$	$b=0.50$	$b=0.55$	$b=0.60$	$b=0.65$
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	1.051	1.054	1.056	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	1.072	1.074	1.077	1.080	1.082	1.085
0.10	1.105	1.110	1.116	1.121	1.126	1.132	1.137	1.142	1.147	1.153	1.158	1.163	1.168	1.174
0.15	1.162	1.170	1.178	1.186	1.194	1.202	1.210	1.219	1.227	1.235	1.243	1.251	1.259	1.267
0.20	1.221	1.233	1.244	1.255	1.266	1.277	1.288	1.299	1.310	1.321	1.332	1.343	1.354	1.365
0.25	1.284	1.296	1.312	1.327	1.341	1.345	1.369	1.383	1.398	1.412	1.426	1.440	1.454	1.469
0.30	1.350	1.367	1.385	1.402	1.420	1.437	1.455	1.472	1.490	1.507	1.525	1.542	1.560	1.577
0.35	1.419	1.440	1.461	1.482	1.503	1.524	1.545	1.566	1.587	1.608	1.629	1.650	1.671	1.692
0.40	1.492	1.516	1.541	1.566	1.590	1.615	1.639	1.666	1.689	1.713	1.738	1.762	1.687	1.812
0.45	1.568	1.597	1.625	1.654	1.682	1.710	1.739	1.767	1.796	1.824	1.853	1.881	1.909	1.938
0.50	1.649	1.681	1.714	1.746	1.779	1.811	1.843	1.876	1.908	1.941	1.973	2.006.	2,038	2.070
0.55	1.733	1.770	1.807	1.843	1.880	1.917	1.953	1.990	2.027	2.063	2.100	2.137	2.173	2.210
0.60	1.822	1.863	1.904	1.945	1.987	2.028	2.069	2.110	2.151	2.192	2.232	2.274	2.315	2.357
0.65	1.916	1.961	2.007	2.053	2.099	2.144	2.190	2.236	2.282	2.328	2.373	2.419	2.465	2.511
0.70	2.014	2.064	2.115	2.166	2.217	2.267	2.318	2.369	2.419	2.470	2.521	2.571	2.622	2.673
0.75	2.117	2.173	2.229	2.285	2.340	2.396	2.452	2.508	2.564	2.620	2.676	2.731	2.787	2.843
0.80	2.226	2.287	2.348	2.407	2.471	2.532	2.593	2,655	2.716	2.777	2.838	2.900	2.961	3.022
0.85	2.340	2.407	2.474	2.541	2.608	2.675	2.742	2.809	2.876	2.943	3.010	3.077	3.143	3.210
0.90	2.460	2.533	2.606	2.679	2.752	2.825	2.898	2.971	3.043	3.116	3.189	3.262	3.335	3.408
0.95	2.586	2.665	2.744	2.824	2.903	2.982	3.061	3.141	3.220	3.299	3.379	3.458	3.537	3.616
1.00	2.718	2.804	2.890	2.976	3,062	3.148	3.234	3.320	3.406	3.492	3.577	3.663	3.749	3.835

$\chi(a', b)$ QUAND $F'a' = e^a$,

b=0.80	b=0.85	b=0.90	b=0.95	b=1.00	b=1.05	b'=1.10	b=1.15	b=1.20	b=1.25	b=1.30	a.	a'	DIFFÉRENCES.
.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.00	0.000	
													0.099
.092	1.095	1.097	1.100	1.103	1.105	1.108	1.110	1.113	1.115	1.118	0.05	0.099	
													0.098
.189	1.195	1.200	1.205	1.210	1.216	1.221	1.226	1.231	1.237	1.242	0.10	0.197	
													0.096
.291	1.299	1.308	1.316	1.324	1.332	1.340	1.348	1.356	1.364	1.372	0.15	0.293	
													0.095
.399	1.410	1.421	1.432	1.443	1.454	1.465	1.476	1.487	1.498	1.509	0.20	0.388	
													0.093
.511	1.525	1.540	1.554	1.568	1.582	1.597	1.611	1.625	1.629	1.653	0.25	0.481	
													0.092
.630	1.647	1.665	1.682	1.700	1.717	1.735	1.752	1.770	1.787	1.805	0.30	0.573	
													0.090
.754	1.775	1.796	1.817	1.838	1.859	1.880	1.901	1.922	1.943	1.964	0.35	0.663	
													0.090
.885	1.910	1.935	1.959	1.984	2.008	2.033	2.057	2.082	2.107	2.131	0.40	0.753	
													0.088
.023	2.051	2.080	2.108	2.137	2.165	2.194	2.222	2.250	2.279	2.307	0.45	0.841	
													0.088
.168	2.200	2.233	2.265	2.297	2.330	2.362	2.395	2.427	2.460	2.492	0.50	0.929	
													0.086
.320	2.357	2.393	2.430	2.467	2.503	2.540	2.577	2.613	2.650	2.687	0.55	1.015	
													0.085
.480	2.521	2.562	2.603	2.644	2.685	2.726	2.768	2.809	2.850	2.891	0.60	1.100	
													0.084
.648	2.694	2.740	2.785	2.831	2.877	2.923	2.968	3.014	3.060	3.106	0.65	1.184	
													0.084
.825	2.875	2.926	2.977	3.028	3.078	3.129	3.180	3.230	3.281	3.332	0.70	1.268	
													0.082
.011	3.066	3.122	3.178	3.234	3.290	3.346	3.402	3.457	3.513	3.569	0.75	1.350	
													0.082
.206	3.267	3.329	3.390	3.451	3.512	3.574	3.635	3.696	3.758	3.819	0.80	1.432	
													0.081
.411	3.478	3.545	3.612	3.679	3.746	3.813	3.880	3.947	4.014	4.081	0.85	1.513	
													0.081
.627	3.700	3.773	3.846	3.919	3.992	4.065	4.138	4.211	4.284	4.357	0.90	1.593	
													0.079
.854	3.933	4.013	4.092	4.171	4.251	4.330	4.409	4.489	4.568	4.647	0.95	1.672	
													0.079
.093	4.179	4.205	4.351	4.437	4.523	4.608	4.694	4.780	4.866	4.952	1.00	1.751	

APPENDICE.

EXPOSÉ DES RECHERCHES FAITES SUR LE MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS L'AIR, EN SUPPOSANT LA RÉSISTANCE DU MILIEU PROPORTIONNELLE AU CARRÉ DE LA VITESSE DU MOBILE.

43. EXPOSÉ.

Les expériences qui ont été faites pour déterminer la loi de la résistance que l'air fait éprouver aux projectiles en mouvement, ont montré que cette résistance est représentée par deux termes, l'un proportionnel au carré, l'autre proportionnel au cube de la vitesse : le second de ces termes a une valeur assez grande pour qu'aux vitesses dont sont généralement animés les boulets, son influence ne soit pas moindre que celle du premier terme. Il n'est donc pas négligeable.

Lorsque les vitesses sont faibles et que les distances sont peu considérables, les angles de tir peu élevés, lorsqu'en même temps les projectiles sont de fort calibre, la vitesse éprouve peu de variation depuis le commencement du trajet jusqu'à la fin, de sorte que l'on pourrait, avec une exactitude suffisante, représenter la résistance par un seul terme proportionnel au carré de la vitesse, à la condition, cependant, de déterminer le coefficient de cette résistance dans chaque cas particulier. Cette condition n'existe pas dans le cas du tir habituel des boulets. Il en est de même dans le cas du tir des bombes sous de grands angles de projection; parce que, l'action de la pesanteur sur le projectile se joignant à celle de la résistance de l'air pour en retarder la vitesse dans la branche ascendante, la vitesse varie beaucoup depuis le

point de départ jusqu'au sommet de la courbe; elle varie d'autant plus que l'angle de projection est plus élevé au-dessus de l'horizon et que la vitesse initiale est plus considérable. On ne peut donc pas, dans ces derniers cas, regarder la résistance de l'air comme proportionnelle au carré de la vitesse dans toute l'étendue de la trajectoire, même en adoptant un coefficient particulier pour chaque cas.

Or, c'est en se fondant sur la loi simple du carré de la vitesse que les divers géomètres ont traité le problème de la balistique. Les résultats de leurs savantes recherches deviennent par cette raison moins susceptibles d'application; néanmoins, sous le rapport analytique, surtout, ils conservent encore une partie de leur valeur à cause de l'analogie qu'ils présentent dans bien des cas. Aussi croyons-nous devoir donner une analyse succincte de ces travaux. Nous le faisons avec d'autant plus de raison que quelques-uns de ces travaux dus à une haute analyse sont encore inédits, que d'autres méthodes peuvent recevoir de nouveaux perfectionnements, que les notations que nous avons adoptées rendent la plupart de ces formules d'une expression beaucoup plus simple, et que les tables que nous avons calculées les rendent d'une application beaucoup plus facile, qu'enfin certaines méthodes nous ont paru pouvoir être encore perfectionnées.

44. DIVERSES MÉTHODES D'APPROXIMATION.

Les méthodes employées par les géomètres sont de trois espèces. Par les unes on arrive à des relations exactes entre certaines quantités qui appartiennent à la trajectoire, et au moyen desquelles on ne peut arriver aux relations dont on a besoin qu'en calculant numériquement les diverses parties de la trajectoire. L'approximation peut être augmentée à volonté, mais en multipliant le nombre des parties et les calculs numériques. Telle est la méthode des quadratures et la méthode d'Euler.

Par d'autres méthodes, on obtient les valeurs dont on a be-

soin en séries développées suivant les puissances des quantités données; les formules sont d'autant meilleures qu'elles sont plus convergentes, et on obtient une exactitude d'autant plus grande qu'on emploie un plus grand nombre de termes. Ces méthodes ont été successivement employées par Lambert, Borda, Tempelhoff et, en dernier lieu, par Français.

Les méthodes d'une troisième espèce consistent à remplacer les expressions qui se refusent à l'intégration par des expressions approchées qui les rendent intégrables, de sorte qu'on arrive à des expressions en termes finis entre les quantités que l'on a besoin de considérer; mais ces valeurs ne sont qu'approchées et l'on n'est pas le maître d'augmenter le degré de l'approximation. L'excellence de cette méthode dépend d'un choix heureux de l'expression introduite, de telle sorte qu'on ait à la fois une exactitude suffisante à l'objet qu'on se propose et que les calculs soient assez faciles dans les applications numériques. Telle est la méthode ingénieuse imaginée par Borda, dans laquelle est entré après lui Bezout, et qui a été ensuite perfectionnée par Legendre et Français.

En exposant les résultats de ces recherches analytiques, nous indiquerons sommairement la marche des calculs; quant à quelques démonstrations et aux développements, nous renvoyons aux ouvrages que nous citerons[1]. Pour qu'il soit plus facile de saisir les rapports que les résultats présentent entre eux, nous adopterons pour tous des notations communes et nous traduirons, en consé-

[1] Les ouvrages principaux qui ont traité de la balistique sont les suivants:

Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque, par Euler; inséré dans l'Histoire de l'Académie royale des sciences et lettres de Berlin, année 1753, pages 321 et suivantes.

Mémoire sur la résistance des fluides, avec la solution du problème balistique, par Lambert; inséré dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1767, pages 102 à 188; réimprimé au Journal des armes spéciales, en 1845, avec des notes de M. Rieffel.

Sur la courbe décrite par les boulets et les bombes, en ayant égard à la résistance de l'air, par le chev. Borda; inséré dans les Mém. de l'Académie des sciences de Paris, pour l'année 1769; réimprimé au Journal des armes spéciales, 1846.

Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie, tome IV, par Bezout, de l'A-

quence, les formules données par les divers auteurs. Nous exposerons d'abord les propriétés générales de la trajectoire.

45. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA TRAJECTOIRE.

Soit O (fig. 5), le point de départ du projectile, V sa vitesse initiale suivant OA, φ l'angle de projection au-dessus du plan horizontal, h la hauteur due à cette vitesse, P le poids du projectile, x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque M de la trajectoire ; soit s la longueur de l'arc OM, t le temps employé à le par-

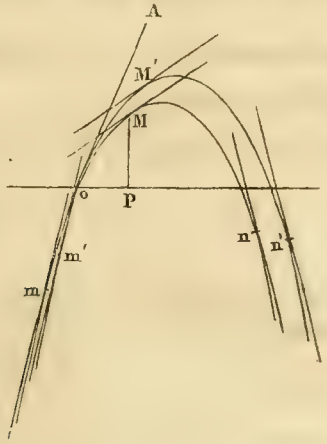


FIG. 5.

cadémie royale des sciences, en 1788. — *Mouvement des projectiles*, pages 138 à 197 de l'édition de 1788, et appendice, p. 438.

Dissertation sur la question de balistique proposée par l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Prusse pour le prix de 1782, par Legendre.

Mémoire sur le problème balistique, ou sur le mouvement d'un corps dans un milieu résistant en raison du carré des vitesses, par de Tempelhoff; inséré dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour les années 1788 et 1789, pages 216 à 299; ou *Le bombardier prussien*, par de Tempelhoff, capitaine d'artillerie au service de S. M. le roi de Prusse. Berlin, 1791.

Traité du mouvement des projectiles appliqué aux bouches à feu, par Jean-Louis Lombard, professeur aux écoles d'artillerie d'Auxonne, 1796.

Recherches sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistants, par F. Français, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de la Fère, an XIII. Ouvrage manuscrit, appartenant à la bibliothèque de l'école d'application de l'artillerie et du génie, à Metz, et dont copie a été adressée à l'Institut de France.

Balistique. — Indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement

courir, v la vitesse en ce point, z la hauteur due à cette vitesse, θ l'inclinaison de la tangente à la trajectoire ou de la direction du mouvement du projectile en ce point, nous ferons $p = \frac{dy}{dx}$. On aura donc $p = \text{tang } \theta$, $\cos\theta = \frac{dx}{ds}$, $\sin\theta = \frac{dy}{ds}$ et $v = \frac{ds}{dt}$; soit encore g la pesanteur ou la vitesse acquise par un corps après la première seconde de sa chute dans le vide. La résistance ρ sera représentée par nv^2; dans cette expression $n = A\pi R^2$ et $A = \frac{k\delta}{2g}$, δ étant la densité de l'air et k un coefficient déterminé par l'expérience; la masse du mobile étant $\frac{P}{g}$, la force retardatrice ρ' due à la résistance de l'air sera $\rho\frac{g}{P}$ ou $\frac{1}{2c}v^2$, en faisant $2c = \frac{P}{ng} = \frac{P}{A\pi R^2 g}$ et en remplaçant P par $\frac{4}{3}\pi R^3 D$, on aura $2c = \frac{8}{3}\frac{RD}{k\delta}$.

En partant des deux équations du mouvement,

$$d.\frac{dx}{dt} = -\frac{v^2}{2c}\frac{dx}{ds}dt \quad \text{et} \quad d.\frac{dy}{dt} = -\frac{v^2}{2c}\frac{dy}{ds}dt - gdt.$$

Faisant $dy = pdx$, et supposant dx constant, ces équations deviendront, comme on l'a fait voir (10),

$$(a) \qquad dxdp = -gdt^2 \qquad \text{et} \qquad cd^2p = dpds \qquad (b),$$

des projectiles de l'artillerie, précédée de l'analyse nécessaire, par d'Obenheim, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Strasbourg, 1814.

Traité de mécanique, par S. D. Poisson. — *Mouvement des projectiles dans le vide et dans un milieu résistant.*

Cours de balistique, à l'usage des élèves de l'École d'application de l'artillerie et du génie, par Persy, professeur. — Lithographie de l'École d'application. Octobre 1833.

Note sur la formule employée par Lombard pour le tir de but en blanc et pour la formation des tables de tir, par Bellencontre, lieutenant-colonel d'artillerie. — Voir aussi l'Aide-mémoire d'artillerie de 1844, p. 642.

Formules balistiques et tables de tir, par M. Chiniac, chef d'escadron d'artillerie. — Voir aussi l'Aide-mémoire d'artillerie, 1844, p. 642.

Théorie mathématique du tir à ricochet et tables balistiques générales, par Otto; traduit de l'allemand par Rieffel, et *Journal des armes spéciales*, année 1844.

Mémoire sur la trajectoire des projectiles de l'artillerie, par le comte de Grœvenitz; traduit de l'allemand par Rieffel, et *Journal des armes spéciales*, années 1844 et 1845.

La seconde de ces équations est celle de la trajectoire ; la première donnera la vitesse et le temps du mouvement. La densité de l'air et, par conséquent $\frac{1}{c}$ étant constants, l'équation $cd^2p = dpds$ aura pour intégrale $\frac{dp}{dx} = Be^{\frac{s}{c}}$. Pour déterminer la constante B, on prendra l'équation $dpdx = -gdt^2$ qui donne $\frac{dp}{dx} = -g\frac{dt^2}{dx^2}$; et comme au point de projection la vitesse horizontale est $\frac{dx}{dt} = V\cos\varphi$, on aura $B = -\frac{g}{V^2\cos^2\varphi} = -\frac{1}{2h\cos^2\varphi}$, donc

$$(1)\ldots\ldots \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{s}{c}}}{2h\cos^2\varphi}$$

On aura aussi, en divisant membre à membre avec l'équation (a),

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2gh\cos^2\varphi\, e^{\frac{s}{c}} \text{ ou } z = \frac{h\cos^2\varphi}{\cos^2\theta}e^{-\frac{s}{c}} \text{ et } v = \frac{V\cos\varphi}{\cos\theta}e^{-\frac{s}{2c}}$$

Le second membre de l'équation différentielle (1) qu'on vient de trouver étant multiplié par ds, et le premier par la valeur égale $dx\sqrt{1+p^2}$, puisque $p = \text{tang}\,\theta$, on aura

$$-e^{\frac{s}{c}}ds = 2h\cos^2\varphi\, dp\sqrt{1+p^2}$$

d'où, en intégrant et en appelant $\xi(\theta)$ l'intégrale $\int dp\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\log(p+\sqrt{1+p^2})$, laquelle changera de signe dans la branche descendante où p est négatif, on aura :

$$(2)\ldots\ldots\ldots -e^{\frac{s}{c}} = \frac{2h}{c}\cos^2\varphi\left\{\xi(\theta) - C\right\}.$$

La constante — C est déterminée par la condition qu'à l'origine du mouvement on ait $s = 0$ et $\theta = \varphi$, ou $p = \text{tang}\,\varphi$; on aura donc $C = \frac{c}{2h\cos^2\varphi} + \xi(\varphi)$.

Ainsi la trajectoire a pour équation

$$e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{2h\cos^2\varphi}{c}\left\{\xi(\varphi) - \xi(\theta)\right\}.$$

Si le mouvement avait lieu dans le vide, il faudrait faire $\frac{1}{c} = 0$, et on aurait, comme on sait, une parabole.

En mettant l'équation sous la forme

$$\frac{e^{\frac{s}{c}} - 1}{\frac{s}{c}} = \frac{2h\cos^2\varphi}{s}\left\{\xi(\varphi) - \xi(\theta)\right\}.$$

Remarquant que pour $\frac{1}{c} = 0$, le premier membre, après son développement connu (m. 16), se réduit à l'unité, et en nommant s' l'arc correspondant de la parabole, on aura

$$s' = 2h\cos^2\varphi\left\{\xi(\varphi) - \xi(\theta)\right\}.$$

On aura donc

$$e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{s'}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{s}{c} = \log\left(1 + \frac{s'}{c}\right);$$

relations très-remarquables entre les deux arcs s de la trajectoire et s de la parabole, qui se terminent en deux points où les inclinaisons sont respectivement égales.

46. ASYMPTOTE.

Si l'on veut savoir ce que devient la courbe du côté de la branche ascendante, il faudra faire s et s' négatifs, ce qui donnera

$$\frac{s}{c} = -\log\left(1 - \frac{s'}{c}\right).$$

Or, si on prend sur la parabole le point m', pour lequel $s' = c$,

on aura $s = -c \log 0$, c'est-à-dire s infini; donc ce n'est qu'à l'infini que l'inclinaison de la trajectoire devient égale à celle du point m'; donc il y a une asymptote dont l'inclinaison est égale à celle de la tangente en m'; l'inclinaison de cette asymptote sera donnée par la relation

$$-c = 2h\cos^2\varphi \left\{ \xi(\varphi) - \xi(\theta) \right\} \text{ ou } \xi(\theta) = \frac{c}{2h\cos^2\varphi} + \xi(\varphi)^1.$$

Si l'on prend du côté de la branche descendante l'arc parabolique On' de plus en plus grand, l'arc correspondant On de la trajectoire augmentera aussi, mais beaucoup moins rapidement. Donc On étant infini, On' le sera aussi. Mais l'infini logarithmique étant du dernier ordre, on voit que la courbe Bn ne tardera pas à se confondre avec une verticale, et qu'elle doit avoir, par conséquent, une asymptote verticale.

Pour le prouver, éliminons s entre les équations (1) et (2), on aura

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{c}\left\{ \frac{1}{2} p\sqrt{1+p^2} + \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) + \text{const.} \right\}$$

Or, quand on intégrera entre deux valeurs très-grandes de p, on pourra négliger l'unité et $\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$ devant p, alors on aura simplement

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{2c}; \text{ d'où l'on tire } x = \text{const} - \frac{2c}{p};$$

donc, à partir d'un point pour lequel p est déjà très-grand, lorsqu'on fait p infini, la valeur de x est finie. Donc la branche descendante jouit d'une asymptote verticale.

[1] La solution numérique de ce problème sera très-facile au moyen des tables des fonctions $\xi(\theta)$ que nous avons données.

47. RAYON DE COURBURE.

L'expression du rayon de courbure est, dans l'hypothèse de dx constant, en le représentant par γ,

$$\gamma = -\frac{dx\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

En substituant la valeur de $e^{\frac{1}{c}}$ dans celle de $\frac{dp}{dx}$, on trouve celle de dx,

$$dx = -\frac{c\,dp}{C-\xi(\theta)};$$

de là

$$\gamma = \frac{c\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{C-\xi(\theta)}.$$

Dans la branche descendante, la valeur de $\xi(\theta)$ sera négative, et, par conséquent, la valeur de γ sera plus grande, pour les mêmes valeurs absolues de p; de plus, la valeur de γ ne sera infinie que pour p égal à l'infini; ce qu'on sait déjà; et dans la branche ascendante, où $\xi(\theta)$ est positif, γ sera infini pour $c = \xi(\theta)$; ce qu'on a fait voir aussi.

Le point de plus grande courbure se détermine en égalant à zéro la différentielle de γ, ce qui donne, en se rappelant que $\xi(\theta) = \int \sqrt{1+p^2}\,dp$,

$$\frac{1}{3}\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-p} + \xi(\theta) = C \text{ ou } -\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta} + \xi(\theta) = C.$$

Cette équation, qui ne sera satisfaite que pour des valeurs de p négatives, donnera la valeur de p, à laquelle correspond le minimum du rayon de courbure.

48. VITESSE.

La vitesse du mobile en un point quelconque a été donnée en fonction de s; en substituant dans cette expression la valeur de s tirée de l'équation (2), on aura

$$z = \frac{c\,(1+p^2)}{2\left\{C - \xi(\theta)\right\}} \quad \text{ou} \quad v^2 = \frac{g\,c\,(1+p^2)}{\frac{c}{2\,h\cos^2\varphi} + \xi(\varphi) - \xi(\theta)}.$$

Au sommet de la trajectoire, où l'on a $p = 0$ et par suite $\xi(\theta) = 0$, on aura simplement,

$$v^2 = \frac{g\,c}{\frac{c}{2\,h\cos^2\varphi} + \xi(\varphi)}.$$

A partir du sommet, la vitesse va en décroissant par l'effet de la résistance de l'air; mais à une certaine distance du sommet, la pesanteur commence à augmenter cette vitesse, de sorte que son effet compense celui de la résistance. La vitesse est alors un minimum. On déterminera ce point en différentiant la valeur de la vitesse prise sous la forme $z = \frac{c\,(1+p^2)}{2\left\{C-\xi(\theta)\right\}}$ et en posant $dz = 0$; de là résulte, à cause de $d.\xi(\theta) = \sqrt{1+p^2}\,dp$, la valeur de p donnée par la relation

$$\frac{1}{2}\,\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-p} + \xi(\theta) = C, \text{ ou, } -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta} + \xi(\theta) = C,$$

laquelle n'est satisfaite que pour une valeur négative de θ, c'est-à-dire que le point où la vitesse est un minimum est dans la branche descendante.

En comparant entre elles les équations qui donnent respectivement le point du minimum de rayon de courbure et celui du minimum de vitesse, on peut voir que le premier membre est infini pour $\theta = o$ et qu'il décroît quand θ augmente ; il en résulte

que la fonction de θ qui se rapporte au rayon de courbure contenant le coefficient $\frac{1}{3}$ atteindra plus rapidement la valeur de C que celle qui se rapporte au minimum de vitesse et qui contient le coefficient $\frac{1}{n}$; par conséquent, le point de la trajectoire où le rayon de courbure est un minimum est plus près du sommet que celui où la vitesse est un minimum.

Au delà du point où la vitesse est un minimum, cette vitesse augmente, mais pas indéfiniment, et elle se rapproche continuellement de celle pour laquelle la résistance de l'air serait égale au poids du corps, en même temps que la direction du mouvement se rapproche de la verticale; cette limite de la vitesse est donnée par la relation

$$\frac{v^2}{2c} = g \quad \text{ou} \quad z = c.$$

MÉTHODE DES QUADRATURES ET MÉTHODE D'EULER.

49. MÉTHODE DES QUADRATURES ET MÉTHODE D'EULER.

Des deux équations du mouvement, Euler[1] déduit la relation que nous avons donnée (2) $\frac{dpdx}{dt^2} + g = 0$ (1), et ensuite, par diverses transformations, il obtient :

$$(2)\ldots\ldots \quad \frac{2\,g\,dt^2}{dx^2} = 2\frac{dp}{dx} = 2\,\mathrm{K} + \frac{2}{c}\int dp\,\sqrt{1+p^2};$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{-dp}{\mathrm{K} - \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+p^2}}; \quad dy = \frac{-p\,dp}{\mathrm{K} - \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+p^2}}; \quad ds = \frac{-dp\sqrt{1+p^2}}{\mathrm{K} - \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+p^2}};$$

(3)...

$$dt = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{-dp}{\sqrt{\mathrm{K} - \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+p^2}}}; \quad v^2 = \frac{g(1+p^2)}{\mathrm{K} - \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+p^2}}.$$

[1] *Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air*, par Euler; Histoire de l'Académie de Berlin, année 1753.

L'expression $\int dp\sqrt{1+p^2}$ est celle d'un arc de parabole; il a pour valeur, comme on l'a fait voir, $\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$ et il a été représenté par la fonction $\xi(\theta)$, qui s'évanouit pour $\theta=0$. Au point de départ où $\theta=\varphi$, elle devient $\xi(\varphi)$, et en remplaçant K par $\frac{C}{c}$, on aura plus simplement :

$$x=c\int\frac{dp}{C-\xi(\theta)};\quad y=c\int\frac{pdp}{C-\xi(\theta)};\quad s=c\int\frac{dp\sqrt{1+p^2}}{C-\xi(\theta)};\quad t=\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{2g}}\int\frac{dp}{\sqrt{C-\xi(\theta)}};$$

$$v^2=\frac{cg(1+p^2}{C-\xi(\theta)}$$

ces intégrales prises de manière à s'évanouir pour $\theta=0$; d'où la vitesse au sommet $v^2=\frac{cg}{C}$. Dans la branche descendante, θ change de signe, et la fonction $\xi(\theta)$ conserve la même valeur au signe près.

50. MÉTHODE DES QUADRATURES.

On peut déterminer par les quadratures tout ce qu'il est nécessaire de connaître dans la trajectoire et la tracer par points[1].

L'abscisse d'un point quelconque de la trajectoire est égale à la somme des valeurs infiniment petites de $dx=\frac{-dp}{C-\xi(\theta)}$, comprise depuis $p=\text{tang}\,\varphi$ jusqu'à la valeur de p, qui répond au point que l'on considère. On aura la valeur de x par approximation, en partageant l'intervalle des valeurs extrêmes de p en un très-grand nombre de parties, égales pour plus de simplicité; calculant ensuite les valeurs de $\frac{1}{C-\xi(\theta)}$, multipliées par la valeur très-petite Δp des valeurs consécutives de p, que l'on substituera à la différence infiniment petite dp, et la somme des valeurs de Δx ainsi obtenues approchera d'autant plus d'être exacte, que Δp sera plus petit. En continuant le calcul jusqu'à ce qu'on soit parvenu à $p=o$, on aura, aussi exactement qu'on voudra, les abscisses

[1] Voir le Traité de mécanique de Poisson.

de tous les points de la branche ascendante de la trajectoire, et la dernière sera celle du sommet. Au delà de ce point, dans la branche descendante, les valeurs de p deviendront négatives, et la continuation du même calcul donnera les abscisses des points de cette branche. Par un procédé semblable, appliqué à la valeur de dy, on aura les ordonnées correspondantes aux valeurs successives de p, et on pourra construire la courbe par points. On obtiendra de même la valeur du temps t. La vitesse, en chaque point, sera donnée directement par la valeur de $v^2 = \frac{c\,g\,(1+p^2)}{C-\xi(\theta)}$. Il en sera de même de celle de s, comme on va le voir.

51. MÉTHODE D'EULER.

Remarquant avec Euler que $dp\sqrt{1+p^2} = d.\xi(\theta)$, on aura

$$ds = c\,\frac{d.\xi(\theta)}{C-\xi(\theta)} \text{ d'où } s = c\log.\left(\frac{C-\xi(\theta)}{C}\right)$$

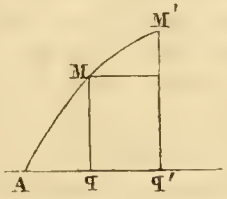
sans constante, expression fort commode pour décrire la courbe; car, dit Euler, « calculant pour un grand nombre de valeurs de p, celles de s, on trouvera autant de portions de courbe, et sachant de chacune l'inclinaison à l'horizon, on en tirera aisément les parties de l'abscisse et de l'ordonnée qui leur conviennent; lesquelles étant ajoutées ensemble, donneront tant l'abscisse que l'ordonnée entière, qui répondent à chaque point de la courbe. Ensuite, ayant la vitesse à chaque point de la courbe par la formule $v^2 = \frac{cg(1+p^2)}{C-\xi(\theta)}$, chaque particule de la courbe divisée par v donnera le temps que le corps met à la parcourir; pourvu qu'on prenne les particules de la courbe assez petites, on obtiendra assez exactement, tant la figure de la courbe que le mouvement du corps. » C'est là ce qui constitue essentiellement la méthode d'Euler. Pour cette méthode, une table des valeurs de la fonction $\xi(\theta)$ étant très-utile, Euler en a calculé une de degrés en degrés. Il distingue les courbes en espèces déterminées par les va-

leurs de C; les autres ne dépendant de c que pour les dimensions, elles seront semblables.

52.

Pour construire, d'après la méthode d'Euler, un arc MM′

Fig. 6.



(fig. 6) aux extrémités duquel les inclinaisons sont respectivement φ et φ', et les tangentes p et p', on aura $AM = c \log \frac{C-\xi(\varphi)}{C}$, et $AM' = c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C}$; donc $MM' = c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C-\xi(\varphi)}$; l'inclinaison moyenne de l'arc étant $\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, la portion qq' de l'abscisse sera $c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C-\xi(\varphi)} \cos \frac{\varphi+\varphi'}{2}$, et la portion de l'ordonnée correspondante sera $c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C-\xi(\varphi)} \sin \frac{\varphi+\varphi'}{2}$, pourvu que les différences de φ à φ' soient assez petites.

On calculera de même les vitesses en M et M′ qui sont $v = \sqrt{gc \frac{1+p^2}{C-\xi(\varphi)}}$ et $v' = \sqrt{gc \frac{1+p'^2}{C-\xi(\varphi')}}$; la vitesse moyenne entre les deux étant $\frac{v+v'}{2}$, le temps employé à parcourir l'arc sera $\frac{1}{\frac{1}{2}(v+v')} c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C-\xi(\varphi)}$. Euler fait ensuite l'application de ces formules à une espèce de trajectoire en calculant numériquement les arcs de 5° en 5°[1].

[1] Les autres espèces de trajectoires ont été calculées par arcs de moindre étendue, par le comte de Grœvenitz et par M. Otto. *Mémoire sur la trajectoire et théorie mathématique du tir à ricochet*, au Journal des armes spéciales, années 1844 et 1845.

53. CORRECTION DE LEGENDRE.

L'erreur que l'on commet par la méthode d'Euler tient à ce que la projection des arcs partiels est déterminée comme si ces arcs étaient des portions de ligne droite; en opérant ainsi, on prend les projections trop grandes et on obtient des portées et des élévations trop considérables. Legendre a corrigé cette méthode en déterminant la projection des arcs de trajectoire comme s'ils étaient des arcs de cercle, et il trouve[1] que pour cela les projections doivent être multipliées par le rapport du sinus du demi-angle que l'on considère à ce demi-angle lui-même, de sorte que les portions d'abscisses et d'ordonnées seront données respectivement par les formules

$$c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C-\xi(\varphi)} \cos \frac{\varphi+\varphi'}{2} \frac{\sin \frac{\varphi-\varphi}{2}}{\frac{\varphi-\varphi'}{2}} \quad \text{et} \quad c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C-\xi(\varphi)} \sin \frac{\varphi+\varphi'}{2} \frac{\sin \frac{\varphi-\varphi'}{2}}{\frac{\varphi-\varphi'}{2}}.$$

Ici $\varphi - \varphi'$ représente l'arc dont le rayon est égal à l'unité; le rapport $\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}$ diffère de l'unité, lorsque l'arc est petit, de $\frac{1}{6}\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)^2$; cette valeur est de $\frac{1}{3150}$ lorsque $\varphi - \varphi'$ est de 5 degrés[2].

54. CORRECTION PROPOSÉE.

La correction introduite par Legendre donne une plus grande exactitude à la méthode d'Euler, parce que, quand on considère les projections horizontales ou les portées, au rapport d'un arc de trajectoire d'un certain nombre de degrés à sa projection, il est plus exact de substituer le rapport analogue dans un arc de cercle dont les inclinaisons aux extrémités sont les mêmes que

[1] *Dissertation balistique* par Legendre, p. 14, et *Mécanique philosophique* de Prony, ou *Journal de l'école polytechnique*, 11e cahier, *Mémoire de Moreau*, p. 222.

[2] Plus exactement $\frac{1}{3193}$.

ce rapport dans une ligne droite qui aurait une inclinaison moyenne entre celles des extrémités. Mais il est facile de voir que si, au lieu d'un arc de cercle ou d'une ligne droite, on prenait un arc de parabole osculatrice à l'une des extrémités de l'arc, on obtiendrait un rapport beaucoup plus approché. Or nous avons donné ce rapport représenté par α, qui, lorsque les inclinaisons extrêmes φ et φ' ont respectivement p et p' pour tangentes, est égal à $\frac{\xi(\varphi)-\xi(\varphi')}{p-p'}$. Ainsi, la valeur plus approchée des projections horizontales des arcs serait

$$c \log \frac{C-\xi(\varphi')}{C-\xi(\varphi)} \quad \frac{p-p'}{\xi(\varphi)-\xi(\varphi'')}.$$

Quant aux ordonnées, nous avons trouvé pour $\frac{s}{y}$ le rapport

$$\frac{\frac{s}{y}}{\frac{\xi(\varphi)-\xi(\varphi')}{\frac{1}{2}(\tang^2\varphi-\tang^2\varphi')}} = \frac{\frac{s}{x}}{\frac{1}{2}(\tang\varphi-\tang\varphi')},$$

d'où

$$\frac{y}{s} = \tfrac{1}{2}(\tang\varphi+\tang\varphi')\,\frac{x}{s}.$$

55. DEGRÉ D'EXACTITUDE DES DIVERSES MÉTHODES.

Comparons entre eux les rapports donnés par les trois méthodes pour juger de leur exactitude; en faisant le calcul pour l'arc de 60° à 55°, pour celui de 45° à 40°, pour celui de 25° à 20°, et pour celui de 5° à 0°, nous aurons respectivement pour ces quatre angles et pour les différences, avec la correction proposée,

Désignation des arcs.....	60° à 55°.	Diff.	45° à 40°.	Diff.	25° à 20.°	Diff.	5° à 0°.	Diff.
Méthode d'Euler, $\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}$	0,537300	2674	0,737272	1465	0,923880	597	0,999048	318
Méth. de Legendre, $\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}$	0,537130	2504	0,737038	1211	0,923587	304	0,998731	1
Méthode proposée, $\frac{p-p'}{\xi(\varphi)-\xi(\varphi')}$....	0,534626	0	0,735827	0	0,923283	0	0,998730	0

En comparant entre eux les résultats de ces trois méthodes, on voit que celle de Legendre ne diffère pas sensiblement de la méthode proposée lorsque les inclinaisons son petites, mais que l'exactitude diminue à mesure qu'on s'éloigne du sommet de la trajectoire. Dans la méthode d'Euler, la différence est beaucoup plus grande pour les petits arcs; elle est encore double pour les arcs de 25° à 20°; $\frac{5}{6}$ pour l'arc de 45° à 40° et $\frac{16}{15}$ pour celui de 60° à 55°; comparées à la quantité cherchée, les résultats de la méthode d'Euler diffèrent des valeurs absolues, respectivement de $\frac{1}{3130}$, $\frac{1}{1548}$, $\frac{1}{509}$, $\frac{1}{200}$; ces corrections sous les très-grands angles ne sont pas à négliger.

Cette observation fait voir que pour appliquer convenablement la méthode d'Euler, même avec la correction de Legendre, il ne faudrait pas prendre les arcs d'un pareil nombre de degrés, quelle que soit leur inclinaison, mais qu'il faut plus resserrer les divisions pour les angles élevés que pour les arcs de faible inclinaison, comme nous l'avons fait pour l'application du tir sous les grands angles, lorsque la résistance de l'air est exprimée par deux termes.

En opérant pour les ordonnées comme pour les projections horizontales, on aura les résultats contenus dans le tableau suivant :

Désignation des arcs.....	60° à 55°.	Diff.	45° à 40°.	Diff.	25° à 20°.	Diff.	5° à 0°.	Diff.
Méthode d'Euler, $\sin\frac{\varphi+\varphi'}{3}$.....	0,843391	1177	0,675590	1072	0,382683	608	0,043619	70
Méth. de Legendre, $\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')}$	0,843124	1444	0,675376	1286	0,382561	730	0,043606	83
Mét. prop. $\frac{\tan g\varphi-\tan g\varphi'}{\xi(\varphi)-\xi(\varphi')}\frac{\tan g\varphi+\tan g\varphi'}{2}$	0,844568	0	0,576662	0	0,383291	0	0,043689	0

En regardant, d'après ce qu'on a déjà dit, la méthode proposée comme celle qui donne la plus grande exactitude, et en y rapportant en conséquence les autres, on verra que la correction de Legendre est moins exacte que la méthode d'Euler : pour l'arc de

60° à 55° elle s'en écarte de $\frac{3}{9}$; pour les autres arcs elle s'en écarte de $\frac{1}{5}$ environ; l'erreur de la méthode d'Euler est respectivement de $\frac{1}{718}$, $\frac{1}{682}$, $\frac{1}{632}$, $\frac{1}{620}$ des parties d'ordonnées.

Pour mettre hors de doute la plus grande exactitude de la méthode proposée sur celles d'Euler et de Legendre, il suffira de considérer le cas où la vitesse serait très-faible et le projectile très-lourd, cas où la trajectoire ne différerait pas sensiblement d'une parabole: dans ce cas, la méthode d'Euler, et celle de Legendre, donneraient des abscisses et, par conséquent, des portées trop grandes et des ordonnées trop petites; la méthode proposée, au contraire, donnerait exactement les abscisses et les portées.

MÉTHODE DES SÉRIES.

56. MÉTHODE PAR SÉRIES.

Par la seconde méthode qu'on a appliquée à la solution du problème balistique, on obtient les quantités cherchées en séries procédant suivant les puissances successives des quantités données par la question. L'excellence de la méthode et le degré d'approximation qu'on peut obtenir dépendent du degré de convergence des séries et du nombre de termes qu'on calcule.

57. RÉSULTATS DE LAMBERT.

Lambert[1] est entré le premier dans cette voie; après être arrivé par des moyens analogues à ceux d'Euler à l'expression de dx en fonction de p, déjà obtenue

$$dx = \frac{-dp}{C - \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+p^2}},$$

il fait voir que, cette fraction étant résolue en une série procé-

[1] *Histoire de l'Académie royale de Berlin* pour 1765; *Mémoire sur la résistance des fluides avec la solution du problème balistique*, p. 102 à 188.

dant suivant les puissances de $\int dp\sqrt{1+p^2}$, on arrive à la valeur de x en fonction de l'inclinaison et des puissances paires de la vitesse; il obtient une série semblable pour l'expression de la durée du trajet, et montre que la valeur de $y = pdx$ n'offrirait pas de termes moins compliqués.

Pour arriver à une relation directe entre y et x, regardant dx comme constant, et remarquant que dy croîtra de la quantité due à l'action de la gravité, ce qui donne $d^2y = gdt^2$, et que puisque $dx^2 = v^2\cos^2\theta\, dt^2$, on a $\frac{dx^2}{d^2y} = \frac{v^2\cos^2\theta}{g}$; on a aussi la relation que nous avons obtenue:

$$\frac{d^2p}{dp} = \frac{ds}{g} \text{ ou } \frac{dy^2}{d^2y} = \frac{ds}{c} \text{ ou } cd^2y = d^2yds.$$

En exprimant la valeur de y par un développement procédant suivant les puissances de x,

$$y = \beta x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \varepsilon x^4 - \mu x^5 - \text{etc.},$$

on trouve, en considérant une abscisse infiniment petite, que β doit être la tangente de l'angle de projection; γ se détermine par l'équation $\frac{d^2y}{dv^2} = -\frac{g}{v^2\cos^2\theta}$, et par celle tirée de l'équation ci-dessus $\frac{d^2y}{dx^2} = -2\gamma - 6\delta x - \text{etc.}$, lesquelles, puisqu'on a à la fois $x = 0$ et $v = V$ donnant $\gamma = \frac{g}{2V^2\cos^2\varphi}$. En prenant les différentielles de dy, d^2y, d^3y, celle de $\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$ et celle de $\frac{ds}{dx}$, puis faisant le produit de d^3y et de ds, l'égalant, terme à terme, à celui de cd^3y, on a:

$$y = x\tang\varphi - \frac{g}{2V^2}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^2 - \frac{g}{6cV^2}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^3 - \frac{g}{24c^2V^2}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^4 - \frac{g}{120c^3V^2}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^5 - \text{etc.}$$
$$- \frac{g^2\sin\varphi}{24cV^4}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^4 + \frac{g^2\sin\varphi}{30V^4c^2}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^5 - \text{etc}$$
$$- \frac{g^3\cos^2\varphi}{120cV^6}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^5 - \text{etc.}$$

C'est la relation qu'il s'agissait d'obtenir et qui représente la trajectoire.

En remplaçant dans cette expression V^2 par $2gh$, mettant $\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}$ en facteur commun, nous obtiendrons

$$y = x\tan\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3}\frac{x}{c.\cos\varphi} + \frac{1}{3.4.}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^2 + \frac{1}{3.4.5}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^3 + \text{etc.} \\ \quad - \frac{\sin\varphi}{2.3.4}\frac{x^2}{c.h\cos^2\varphi} - \frac{\sin\varphi}{2.3.5}\frac{x^3}{hc^2\cos^3\varphi} - \text{etc.} \\ \quad + \frac{\cos^2\varphi}{2.3.5.8}\frac{x^3}{c.h^2\cos^3\varphi} + \text{etc.} \\ \quad + \text{etc.}\ldots\ \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

C'est par le facteur entre parenthèses que cette expression de y diffère de ce qui aurait lieu sans la résistance de l'air : la première ligne de ce facteur n'est autre que $\frac{e^{\frac{x}{c.\cos\varphi}} - \frac{x}{c.\cos\varphi} - 1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^2}$, que nous avons représenté par $F\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)$.

En conservant cette fonction seule et en négligeant les autres termes du facteur, on aurait l'équation d'un très-petit arc de la trajectoire ; on la déduirait aussi de celle que nous avons obtenue pour un arc plus grand, si l'on remplaçait par le rapport moyen α de l'arc à sa projection le rapport du premier élément à sa projection ou $\frac{x}{\cos\varphi}$. Les termes autres que le premier sont relatifs à la plus grande étendue de l'arc.

Pour obtenir la portée horizontale, il faut faire $y = 0$ et tirer la valeur de x. Lambert obtient par le retour des suites, et en faisant pour simplifier, $\frac{2\sin\varphi V^2}{cg} = \zeta$ et $\frac{cg}{V^2} = m$,

$$\frac{x}{c.\cos\varphi} = \zeta - \frac{1}{3}\zeta^2 + \frac{5}{36}\zeta^3 + \frac{17}{270}\zeta^4 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{12}m\sin\varphi\zeta^3 - \frac{19}{180}m\sin\varphi\zeta^4 + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{60}m^2\cos^2\varphi\zeta^4 + \text{etc.}$$

Cette suite est peu convergente, à moins que V^2 ne soit beaucoup plus petit que c ou que φ ne soit très-petit, puisque $\zeta = \frac{2\sin\varphi V^2}{c.g}$. Suivant Lambert, elle est applicable au tir sous les petits angles au-dessus de l'horizon comme dans le tir des canons [1].

Lambert, par la différentiation de la valeur de y relativement à x, trouve la valeur en un point quelconque de l'inclinaison de la trajectoire, laquelle est, en appelant ξ la valeur de $\frac{x}{c.\cos\varphi}$,

$$\tang\theta = \tang\varphi - \frac{m\xi}{\cos\varphi} - \frac{m\xi^2}{2\cos\varphi} - \frac{m\xi^3}{2.3\cos\varphi} - \frac{m\xi^4}{2.3.4\cos\varphi} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{m^2\xi^3\tang\varphi}{2.3} + \frac{4m^2\xi^4\tang\varphi}{2.3.4} + \text{etc.}$$
$$- \frac{m^3\cos\varphi\,\xi^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Cette formule, par les mêmes substitutions que précédemment, devient, en faisant $V^2 = 2gh$, d'où $m = \frac{c}{2h}$,

$$\tang\theta = \tang\varphi - \frac{x}{2h\cos^2\varphi}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{c.\cos\varphi} + \frac{1}{2.3}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^3 + \text{etc.} \\ \quad - \frac{c\sin\varphi}{1\ 2h}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right) - \frac{c\sin\varphi}{8h}\left(\frac{x}{c.\cos.\varphi}\right)^3 - \text{etc.} \\ \quad + \frac{c^2\cos^2\varphi}{96h^2}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^3 + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

[1] En remarquant que ζ est facteur commun du deuxième membre, et que ce facteur, multiplié par $c\cos\varphi$, devient $2\sin\varphi\cos\varphi\frac{V^2}{g}$ ou la portée dans le vide, que nous appellerons X', remarquant alors que $\zeta = \frac{X'}{c.\cos\varphi}$ et que $m = \frac{cg}{V} = \frac{2\sin\varphi}{\zeta}$, on aura

$$X = X'\left\{\begin{array}{lll} 1 - \frac{1}{3}\frac{X'}{c.\cos\varphi} & + \frac{5}{36}\left(\frac{X'}{c.\cos\varphi}\right)^2 & + \frac{17}{270}\left(\frac{X'}{c.\cos.\varphi}\right)^3 - \text{etc.} \\ + \frac{1}{6}\sin^2\varphi\,\frac{X'}{c.\cos\varphi} & - \frac{19}{90}\sin.^2\varphi\left(\frac{X'}{c.\cos\varphi}\right)^2 & + \text{etc.} \\ - \frac{1}{60}\sin^2 2\varphi\,\frac{X'}{c.}\cos\varphi & + \text{etc.} & + \text{etc.} \end{array}\right.$$

La première ligne est le développement relatif à un petit arc ou à un arc plus grand lorsque

Sous cette forme, on voit que le premier terme $\frac{x}{2h\cos^2\varphi}$ donne l'expression de l'inclinaison qui aurait lieu sans la résistance de l'air; la partie entre parenthèses est donc le facteur qui tient compte de cette résistance. Dans celui-ci, la première ligne n'est autre que $\frac{e^{\frac{x}{c\cos\varphi}}-1}{\frac{x}{c.\cos\varphi}}$ que nous avons représenté par $F'\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)$ et qui donne l'inclinaison lorsqu'on ne considère qu'un arc de très-peu d'étendue, ou d'étendue plus grande lorsqu'on remplace, par le rapport de l'arc à sa projection, la quantité $\frac{x}{\cos\varphi}$ qui ne se rapporte qu'au premier élément.

Lambert obtient aussi pour la durée du trajet

$$t=\frac{c}{V}\left(\xi+\frac{\xi^2}{4}+\frac{1}{24}\xi^3+\frac{1}{192}\xi^4+\text{etc.}\right.$$
$$-\frac{m\sin\varphi}{12}\xi^3-\frac{5m\sin\varphi}{96}\xi^4-\text{etc.}$$
$$\left.+\frac{m^2\cos^2\varphi}{48}\xi^4\right)+\text{etc.}$$

Cette formule, par les substitutions des valeurs de ξ et de m, devient

$$t=\frac{x}{V\cos\varphi}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{x}{2c\cos\varphi}+\frac{1}{2.3}\left(\frac{x}{2c.\cos\varphi}\right)^2+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{x}{2c.\cos\varphi}\right)^3+\text{etc.}\right.$$
$$-\frac{c\sin\varphi}{2.3h}\left(\frac{x}{2c.\cos\varphi}\right)^2-\frac{5}{2.3.4}\frac{c\sin\varphi}{4}\left(\frac{x}{2c.\cos\varphi}\right)^3+\text{etc.}$$
$$\left.+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{c\cos\varphi}{h}\right)^2\left(\frac{x}{2c.\cos\varphi}\right)^3+\text{etc.}\right\}.$$

Mise sous cette forme, on voit que, comme dans ce qui pré-

le terme α de nos formules est remplacé par $\frac{1}{\cos\varphi}$: les termes autres que le premier tiennent compte de la plus grande étendue de l'arc; mais ils sont incomplets. Lambert paraît n'avoir pas remarqué que la valeur de m contenant ζ au dénominateur, il en résultait que, dans les termes où entre cette quantité, la puissance de ζ se trouvait diminuée. La série est ainsi mal ordonnée; les termes, à partir du second, sont incomplets et cette formule de Lambert ne peut pas servir.

cède, le premier facteur est la durée qui aurait lieu sans la résistance de l'air; que le deuxième facteur donne l'influence de cette résistance; dans celui-ci la première ligne n'est autre que $\dfrac{e^{\frac{x}{2c.\cos\varphi}}-1}{\frac{x}{2c.\cos\varphi}}$, que nous avons représenté par $\mathrm{F}'\left(\dfrac{x}{2c.\cos\varphi}\right)$, et qui, à lui seul, donne la durée $t=\dfrac{x}{V\cos\varphi}\,\mathrm{F}'\left(\dfrac{x}{2c.\cos\varphi}\right)$, relative à un arc de très-peu d'étendue ou à un arc plus grand lorsqu'on remplace, par le rapport moyen de l'arc à sa projection, la quantité $\dfrac{1}{\cos\varphi}$, qui n'est relative qu'au premier élément.

58. RÉSULTATS DE BORDA.

Borda[1], en partant des deux valeurs de x et de y, $x=\int\dfrac{c\,dp}{fdp\sqrt{1+p^2}}$ et $y=\int\dfrac{cp\,dp}{fdp\sqrt{1+p^2}}$, a aussi cherché à exprimer y par une fonction des puissances successives de l'abscisse x, et au moyen des coefficients indéterminés, il a trouvé la valeur suivante :

$$y=x\tang\varphi-\frac{1}{4h\cos^2\varphi}x^2-\frac{1}{12ch\cos^3\varphi}x^3$$
$$+\frac{1}{24}\left(\frac{\sin\varphi}{4ch^2\cos^3\varphi}-\frac{1}{2c^2h\cos^4\varphi}\right)x^4+\frac{1}{120}\left(\frac{\sin^2\varphi}{c^2h^3\cos^5\varphi}-\frac{1}{2c^3h\cos^5\varphi}-\frac{1}{8ch^3\cos^2\varphi}\right)x^5+\text{etc.}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$y=x\tang\varphi-\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\left\{1+\frac{1}{3}\frac{x}{c.\cos\varphi}+\frac{1}{3.4}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^2+\frac{1}{3.4.5}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^3+\text{etc.}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\varphi}{2.3.4}\frac{x^2}{ch\cos^2\varphi}-\frac{\sin\varphi}{2.3.5}\frac{x^3}{c^2h\cos^3\varphi}-\text{etc.}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos^2\varphi}{2.3.5.8}\frac{x^3}{ch^2\cos^3\varphi}+\text{etc.}\right\}.$$

[1] Sur la courbe décrite par les boulets et les bombes, en ayant égard à la résistance de l'air, par Borda. (*Mémoires de l'Académie des sciences* de Paris pour 1769.)

Cette expression est la même que celle que nous avons trouvée en transformant celle de Lambert, et elle donne lieu aux mêmes observations.

59. RÉSULTATS DE TEMPELHOF.

Tempelhof[1] a traité la question du mouvement des projectiles dans le cas où l'on suppose la densité de l'air variable, soit suivant une fonction de l'inclinaison de la trajectoire, soit suivant la longueur de l'arc parcouru, soit enfin avec l'élévation du projectile au-dessus de la terre, et il a adopté, dans ce dernier cas, la loi de Mariotte, dans laquelle d étant la densité variable avec l'élévation y et D la densité à la surface, les hauteurs étant exprimées en toises, on a $y = 10000 \log \frac{d}{D}$; mais il ne donne pas les développements nécessaires pour les applications. Il traite ensuite le cas où la densité est supposée constante. Partant de la relation finie qu'on obtient entre la grandeur d'un arc et ses inclinaisons aux deux extrémités, il cherche par la méthode des coefficients indéterminés la série qui exprime x et y en fonction de e^{ε}, de l'angle de départ φ et de la vitesse initiale. Ces formules étant très-compliquées, et d'ailleurs l'arc n'étant pas la longueur qu'on a à considérer dans les applications, nous ne donnerons pas ces formules. Nous aurons, d'ailleurs, à en rapporter d'autres de ce genre beaucoup plus simples. Tempelhof donne encore d'autres formules relatives à la portée sur un plan horizontal et à l'angle de chute, que nous ne rapportons pas pour les mêmes raisons.

60. RÉSULTATS DE FRANÇAIS.

Français[2], dans des recherches non publiées sur le mouvement

[1] *Mémoire sur le problème balistique, ou sur le mouvement d'un corps dans un milieu résistant en raison du carré de la vitesse*, par de Tempelhof. (*Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1788 et 1789.*) Ce mémoire a été publié sous le nom de *Bombardier prussien.*

[2] *Recherches sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistants*, par F. Français;

des projectiles, s'est attaché de préférence aux méthodes d'analyse qui ne négligent rien, conservent dans toute leur intégrité les données et les formes, et qui ne sont approximatives que par l'impuissance où l'on se trouve de revêtir certaines expressions de formes finies. C'est par le calcul des dérivations, à la naissance duquel il a assisté et même coopéré, et où il a trouvé, dit-il, des ressources inespérées, qu'il a traité la question balistique. Il dit que cette méthode lui a permis d'arriver à des formules qui, non-seulement n'auraient pu être trouvées par l'analyse ordinaire, mais qui ne pourraient pas même être figurées.

Au calcul des dérivations, Français a associé une espèce particulière de différentiation, qui lui a permis de tirer presque sans peine des formules remarquables, qu'aucune autre méthode ne saurait donner aussi immédiatement et d'une manière aussi facile. Français s'est borné à la seule hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse.

Des deux équations du mouvement, Français déduit les deux équations connues :

$$(1)\ldots\ldots\ dp.dx + g dt^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (2)\ldots\ldots\ dp\,ds - c\,d^2p = 0.$$

L'équation (2), mise sous la forme $d.\log\frac{dp}{dx} = \frac{ds}{c}$, donne, en intégrant, $\frac{dp}{dx} = \mathrm{B}\,e^{\frac{s}{c}}$, B étant une constante dont on trouve la valeur $\mathrm{B} = -\frac{1}{2h\cos^2\varphi}$, par la condition de satisfaire aux données relatives au point de départ; ce qui donne, en faisant, pour simplifier, les expressions $\frac{1}{c} = i$,

$$(3)\ldots\ldots\ \frac{dp}{dx} = -\frac{e^{is}}{2h\cos^2\varphi}.$$

an XIII. Manuscrit appartenant à la bibliothèque de l'École d'application de l'artillerie et du génie, à Metz, et dont copie a été adressée à l'Institut de France.

Puisque $p = \text{tang}\,\theta$, et $\frac{ds}{dx} = (\cos\theta)^{-1}$, on aura $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\cos^3\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}$, valeur qui, substituée dans l'équation (3), donne

$$\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = -\frac{e^{is}\,ds}{2h\cos^2\varphi} = -\frac{1}{2ih\cos^2\varphi}\,d.e^{is}, \quad \text{et faisant } \frac{1}{2ih\cos^2\varphi} = m,$$

on aura

$$\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = -m\,de^{is},$$

et, en intégrant,

$$\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = -me^{is} + C.$$

Si la première intégrale est prise de manière à disparaître lorsque $s = 0$ ou lorsque $\theta = \varphi$, il faudra que $C = m$, d'où

$$(4)\ldots\ldots \quad \int\frac{d\varphi}{\cos^3\theta} = m\,(1-e^{is}),$$

dont il faut tirer une valeur de s en fonction de θ, et ensuite les valeurs de x et de y. Mais, avant d'aller plus loin, nous devons expliquer ici la valeur des notations qu'emploie Français.

61. NOTATION EMPLOYÉE PAR FRANÇAIS, ET VALEUR.

Si $f\varphi$ est une fonction de φ, la différentielle de cette fonction, dans laquelle, après l'opération, la différentielle $d\varphi$ serait remplacée par une certaine fonction qui sera ici $\cos^3\varphi$, sera représentée par $\mathfrak{d}f\varphi$; d'après cela, $\mathfrak{d}f\varphi = \frac{df\varphi}{d\varphi}\cos^3\varphi$.

En différentiant de la même manière cette première dérivée, et remplaçant de nouveau $d\varphi$ par $\cos^3\varphi$, on aura $\mathfrak{d}^2f\varphi$; répétant la même opération sur $\mathfrak{d}^2f\varphi$, on aura $\mathfrak{d}^3f\varphi$, et ainsi de suite. De plus, introduisant la cédille sous le signe $\mathfrak{d}$ pour exprimer 1.2, 1.2.3, 1.2 3.4, on écrira

$$\underset{c}{\mathfrak{d}^2}f\varphi \text{ pour } \frac{1}{1.2}\,\mathfrak{d}^2f\varphi; \quad \underset{c}{\mathfrak{d}^3}f\varphi \text{ pour } \frac{1}{1.2.3}\,\mathfrak{d}^3f\varphi.$$

En opérant de cette manière pour $f\varphi = \sin\varphi$ et $f\varphi = \cos\varphi$, on trouve les résultats ci-après, qui serviront dans tout ce qui sera dit dans cette partie des recherches de Français.

$$
\begin{aligned}
(5)\quad & \mathfrak{S}\sin\varphi = \cos^{4}\varphi,\\
& \mathfrak{S}^{2}\sin\varphi = -4\cos^{5}\varphi\sin\varphi.\\
& \mathfrak{S}^{3}\sin\varphi = -4\cos^{8}\varphi\,(1-7\sin^{2}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{4}\sin\varphi = 8\cos^{10}\varphi\sin\varphi\,(11-35\sin^{2}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{5}\sin\varphi = 8\cos^{13}\varphi\,(11-226\sin^{2}\varphi+455\sin^{4}\varphi),\\
& \mathfrak{S}^{6}\sin\varphi = -64\cos^{14}\varphi\sin\varphi\,(73-623\sin^{2}\varphi+910\sin^{4}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{7}\sin\varphi = -64\cos^{16}\varphi(73-2964\sin^{2}\varphi+15141\sin^{4}\varphi-17290\sin^{6}\varphi).\\
& \qquad \text{etc., etc,}
\end{aligned}
$$

On obtiendra de même :

$$
\begin{aligned}
(6)\quad & \mathfrak{S}\cos\varphi = -\cos^{3}\varphi\sin\varphi.\\
& \mathfrak{S}^{2}\cos\varphi = -\cos^{5}\varphi\,(1-4\sin^{2}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{3}\cos\varphi = -\cos^{7}\varphi\sin\varphi\,(13-28\sin^{2}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{4}\cos\varphi = \cos^{9}\varphi\,(13-188\sin^{2}\varphi+280\sin^{4}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{5}\cos\varphi = -\cos^{11}\sin\varphi\,(493-3188\sin^{2}\varphi+3640\sin^{4}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{6}\cos\varphi = -\cos^{13}\varphi\,(493-15480\sin^{2}\varphi+62832\sin^{4}\varphi-58240\sin^{6}\varphi).\\
& \mathfrak{S}^{7}\cos\varphi = \cos^{15}\varphi\sin\varphi\,(37369-483528\sin^{2}\varphi+1417584\sin^{4}\varphi-1106560\sin^{6}\varphi).\\
& \qquad \text{etc., etc.}
\end{aligned}
$$

62. VALEURS DE x ET DE y EN FONCTION DE LA LONGUEUR DES ARCS.

Au moyen de cette différentiation particulière, Français est arrivé aux résultats suivants :

$$
(7)\quad \begin{cases} y = \sin\varphi\,.s - m\mathfrak{S}\sin\varphi\int(e^{is}-1)ds + m^{2}\mathfrak{S}^{2}\sin\varphi\int(e^{is}-1)^{2}ds - m^{3}\mathfrak{S}^{3}\sin\varphi\int(e^{is}-1)^{3}ds + \text{etc.} \\ x = \cos\varphi.s - m\mathfrak{S}\cos\varphi\int(e^{is}-1)ds + m^{2}\mathfrak{S}^{2}\cos\varphi\int(e^{is}-1)^{2}ds - m^{3}\mathfrak{S}^{3}\cos\varphi\int(e^{is}-1)^{3}ds + \text{etc.} \end{cases}
$$

Dans ces expressions, les intégrales doivent être prises de manière à s'évanouir avec s ; or, il est facile de faire voir que si Δ est

la caractéristique des différences finies se rapportant à la seule variabilité de i, dont la différence $\Delta i = i$, on a :

$$\int (e^{is}-1)ds = i\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\}$$

$$\int (e^{is}-1)^2 ds = 2i\left\{\frac{e^{2is}-2is-1}{(2i)^2}-\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} = 2i\Delta\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\}$$

$$\int (e^{is}-1)^3 ds = 3i\left\{\frac{e^{3is}-3is-1}{(3i)^3}-2\frac{e^{2is}-2is-1}{(2i)^2}+\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} = 3i\Delta^2\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\},$$

etc., etc.

Les équations deviennent donc :

$$(8)\quad \begin{cases} y = \sin\varphi.s - m\mathfrak{S}\sin\varphi.i\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} + m^2\mathfrak{S}^2\sin\varphi.2i\Delta\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} - m^3\mathfrak{S}^3\sin\varphi.3i\Delta^2\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} + \text{etc.} \\ x = \cos\varphi.s - m\mathfrak{S}\cos\varphi.i\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} + m^2\mathfrak{S}^2\cos\varphi.2i\Delta\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} - m^3\mathfrak{S}^3\cos\varphi.3i\Delta^2\left\{\frac{e^{is}-is-1}{i^2}\right\} + \text{etc.} \end{cases}$$

En introduisant, au lieu de l'expression $\frac{e^{is}-is-1}{i^2}$, la fonction que nous avons désignée par la caractéristique F, et qui est $F(is) = \frac{e^{is}-is-1}{\frac{1}{2}(is)^2}$, et dont nous avons calculé des tables, on aura les valeurs de y et de x ainsi exprimées, en rappelant que $is = \frac{s}{c}$,

$$(9)\quad \begin{cases} y = s\left\{\sin\varphi - \frac{s}{2c}\left(m\mathfrak{S}\sin\varphi.F\left(\frac{s}{c}\right) - 2m^2\mathfrak{S}^2\sin\varphi\Delta F\left(\frac{s}{c}\right) + 3m^3\mathfrak{S}^3\sin\varphi\Delta^2 F\left(\frac{s}{c}\right) - \text{etc.}\right)\right\} \\ x = s\left\{\cos\varphi - \frac{s}{2c}\left(m\mathfrak{S}\cos\varphi F\left(\frac{s}{c}\right) - 2m^2\mathfrak{S}^2\cos\varphi\Delta F\left(\frac{s}{c}\right) + 3m^3\mathfrak{S}^3\cos\varphi\Delta^2 F\left(\frac{s}{c}\right) - \text{etc.}\right)\right\} \end{cases}$$

Les équations (7), (8), (9) sont des équations à la trajectoire exprimées en y et s, ou en x et s. Il est très-remarquable que, par l'emploi de la caractéristique $\mathfrak{S}$, l'ordonnée y soit exprimée en sin φ comme x l'est en cos φ; c'est une symétrie qu'on aura lieu de remarquer encore plusieurs fois, et que les méthodes employées jusque-là n'avaient pas permis de reconnaître.

Quoique Français ait énoncé que ses formules étaient trop compliquées pour les applications, on peut voir cependant qu'a-

vec la simplification qu'a introduite la fonction F que nous avons rencontrée dans la plupart des formules de balistique, et au moyen des tables que nous avons calculées, les opérations sont bien simplifiées. En effet, pour calculer les divers degrés de $\Delta F\left(\frac{s}{c}\right)$, il suffira de calculer le rapport $\frac{s}{c}$, de le multiplier successivement par 2.3.4.5, de chercher dans les tables les valeurs $F\left(\frac{s}{c}\right)$, $F\left(\frac{2s}{c}\right)$, $F\left(\frac{3s}{c}\right)$, $F\left(\frac{4s}{c}\right)$, d'en prendre les différences qui seront $\Delta F\left(\frac{s}{c}\right)$, $\Delta F\left(\frac{2s}{c}\right)$, $\Delta F\left(\frac{3s}{c}\right)$; les différences de ces quantités donneront $\Delta^2 F\left(\frac{s}{c}\right)$, $\Delta^2 F\left(\frac{2s}{c}\right)$.....; les différences entre celles-ci donneront $\Delta^3 F\left(\frac{s}{c}\right)$, et ainsi de suite. On opérerait de même pour d'autres valeurs de $\frac{s}{c}$ deux, trois..... fois aussi grandes, et en choisissant la valeur de s de façon que $\frac{s}{c}$ soit contenu dans les tables, et que, par suite, les multiples de cette quantité y soient aussi, le calcul de $F\left(\frac{s}{c}\right)$, $\Delta F\left(\frac{s}{c}\right)$..... $F\left(\frac{2s}{c}\right)$, $\Delta F\left(\frac{2s}{c}\right)$..... se réduirait à des opérations extrêmement simples.

Quant aux fonctions de sinus et de cosinus exprimées par les caractéristiques $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^2$....., il faudrait les calculer une fois pour toutes les applications, et pour les six ou sept premiers ordres, et pour quelques angles variant par exemple de 5 en 5 degrés[1]. Au moyen de ces tables, qui serviraient pour tous les problèmes, la détermination des abscisses et des ordonnées ne présenterait pas beaucoup de difficultés.

On arrive encore à une expression très-simple des coordonnées des divers points de la trajectoire au moyen de l'angle asymptotique, c'est-à-dire de l'angle que fait avec l'horizon l'asymptote à la branche ascendante de la trajectoire; cet angle étant désigné par λ, on a

[1] Nous avons calculé ces tables pour quelques angles et pour les cinq premiers ordres.

$$(10)\ldots\quad \sin\lambda = \sin\varphi + m\vartheta\sin\varphi + m^2\vartheta^2\sin\varphi + m^3\vartheta^3\sin\varphi + \text{etc.}^1.$$

et

$$(11)\begin{cases} y = \sin\lambda\,.\,s - \vartheta\sin\lambda.\,\dfrac{m}{i}\left(e^{is}-1\right) + \dfrac{1}{2}\underset{c}{\vartheta^2}\sin\lambda.\,\dfrac{m^2}{i}\left(e^{2is}-1\right) - \dfrac{1}{3}\underset{c}{\vartheta^3}\sin\lambda\,\dfrac{m^3}{i}\left(e^{3is}-1\right) + \text{etc.} \\ x = \cos\lambda.s - \vartheta\cos\lambda.\,\dfrac{m}{i}\left(e^{is}-1\right) + \dfrac{1}{2}\underset{c}{\vartheta^2}\cos\lambda.\,\dfrac{m^2}{i}\left(e^{2is}-1\right) - \dfrac{1}{3}\underset{c}{\vartheta^3}\cos\lambda\,\dfrac{m^3}{i}\left(e^{3is}-1\right) + \text{etc.} \end{cases}$$

Nous pouvons donner à ces formules une expression beaucoup plus simple par l'emploi de la fonction $F'(is) = \dfrac{e^{is}-1}{is}$ et écrire :

$$y = s\left(\sin\lambda - \vartheta\sin\lambda.mF'\left(\frac{s}{c}\right) + \vartheta^2\sin\lambda.\,m^2F'\left(\frac{2s}{c}\right) - \underset{c}{\vartheta^3}\sin\lambda.\,m^3F'\left(\frac{3s}{c}\right) + \text{etc.}\right)$$

$$x = s\left(\cos\lambda - \vartheta\cos\lambda.\,mF'\left(\frac{s}{c}\right) + \underset{c}{\vartheta^2}\cos\lambda.\,m^2F'\left(\frac{2s}{c}\right) - \underset{c}{\vartheta^3}\cos\lambda.\,m^3F'\left(\frac{3s}{c}\right) + \text{etc.}\right)$$

63. VALEURS DE Y ET DE X EN FONCTION DE L'INCLINAISON.

Français est arrivé aussi à des expressions des coordonnées de la trajectoire en fonction de l'inclinaison de la trajectoire en chaque point.

On a vu qu'on avait $\int \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = m\left(e^{is}-1\right)$

en désignant par $\xi(\varphi)$ la valeur de l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\cos^3\theta}$ prise de manière qu'elle s'évanouisse avec $\varphi = 0$; c'est-à-dire faisant

$$\xi(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\log\text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right);$$

l'arc s étant compris entre le point de départ où l'inclinaison est φ et celui où l'inclinaison est θ, on aura

$$m\left(1-e^{is}\right) = \xi(\theta) - \xi(\varphi);\quad \text{on en tire } e^{is} = 1 + \frac{1}{m}\left(\xi(\varphi) - \xi(\theta)\right),$$

[1] La valeur de λ se calcule très-simplement, comme on l'a fait voir (4), au moyen de la table des fonctions $\xi(\varphi)$.

et $s = c\log\left\{1+\frac{1}{m}(\xi(\varphi)-\xi(\theta))\right\}$ et d'après les équations (11), on aura

$$(13)\quad\begin{cases} y=c\left\{\sin\lambda.\log\left\{1+\frac{1}{m}(\xi(\varphi)-\xi(\theta))\right\}-\vartheta\sin\lambda(\xi(\varphi)-\xi(\theta))+\frac{1}{2c}\vartheta^2\sin\lambda\left\{(m+\xi(\varphi)-\xi(\theta))^2-m^2\right\}\right. \\ \qquad\left.-\frac{1}{3c}\vartheta^3\sin\lambda\left\{(m+\xi(\varphi)-\xi(\theta))^3-m^3\right\}+\text{etc.}\right\} \\ x=c\left\{\cos\lambda\log\left\{1+\frac{1}{m}(\xi(\varphi)-\xi(\theta))\right\}-\vartheta\cos\lambda(\xi(\varphi)-\xi(\theta))+\frac{1}{2c}\vartheta^2\cos\lambda\left\{(m+\xi(\varphi)-\xi(\theta))^2-m^2\right\}\right. \\ \qquad\left.-\frac{1}{3c}\vartheta^3\sin\lambda\left\{(m+\xi(\varphi)-\xi(\theta))^3-m^3\right\}+\text{etc.}\right\} \end{cases}$$

Ces formules fournissent des expressions assez simples de la hauteur du jet Y et de l'amplitude de la branche ascendante X; en faisant $\theta=0$, et partant $\xi(\theta)=0$, on aura

$$(14)\quad\begin{cases} Y=c\left\{\sin\lambda\log\left(1+\frac{1}{m}\xi(\varphi)\right)-\vartheta\sin\lambda\,\xi(\varphi)+\frac{1}{2c}\vartheta^2\sin\lambda\left\{(m+\xi(\varphi))^2-m^2\right\}\right. \\ \qquad\left.-\frac{1}{3c}\vartheta^3\sin\lambda\left\{(m+\xi(\varphi))^3-m^3\right\}+\text{etc.}\right\} \\ X=c\left\{\cos\lambda\log\left(1+\frac{1}{m}\xi(\varphi)\right)-\vartheta\cos\lambda\xi(\varphi)+\frac{1}{2c}\vartheta^2\cos\lambda\left\{(m+\xi(\varphi))^2-m^2\right\}\right. \\ \qquad\left.-\frac{1}{3c}\vartheta^3\cos\lambda\left\{(m+\xi(\varphi))^3-m^3\right\}+\text{etc.}\right\} \end{cases}$$

64. ÉQUATION DE LA TRAJECTOIRE.

Après avoir établi différentes formules pour calculer les coordonnées et les abscisses de la trajectoire au moyen de l'arc s ou de l'arc tangentiel θ, Français arrive à la partie la plus épineuse du problème, l'établissement de l'équation de la trajectoire en x et en y. S'il est au-dessus des forces de l'analyse, telle qu'on la possède, d'arriver à une équation finie, on peut cependant avoir l'expression de la trajectoire en séries, sous plusieurs formes très-différentes, dont nous ne donnerons ici que les plus remarquables et celles qui peuvent présenter le plus d'utilité.

Pour y arriver, il faut éliminer s ou φ, entre les valeurs de y

et de x qui les contiennent. En employant à cet effet les formules du calcul des dérivations, Français est arrivé à l'expression suivante :

$$(14).\ y = \operatorname{tang}\varphi \cdot x$$
$$- \frac{1}{1.2}\frac{1}{2h}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^2$$
$$- \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{2h.c}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^3$$
$$- \frac{1}{1.2.3.4}\left\{\frac{1}{2h.c^2} - \frac{1}{(2h)^2 c}\sin\varphi\right\}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^4$$
$$- \frac{1}{1.2.3.4.5}\left\{\frac{1}{2h.c^3} + \frac{1}{(2h)^3 c} - \frac{4}{(2h)^2 c^2}\sin\varphi - \frac{1}{(2h)^3 c}\sin^2\varphi\right\}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^5$$
$$- \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\left\{\frac{1}{2h.c^4} + \frac{7}{(2h)^3 c^2} - \left(\frac{11}{(2h)^2 c^3} - \frac{3}{(2h)^4 c}\right)\sin\varphi - \frac{3}{(2h)^3 c^2}\sin^2\varphi - \frac{3}{(2h)^4 c}\sin^3\varphi\right\}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^6$$
$$- \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\left\{\frac{1}{2h.c^5} + \frac{32}{(2h)^3 c^3} - \frac{3}{(2h)^5 c} - \left(\frac{26}{(2h)^2 c^4} - \frac{18}{(2h)^4 c^2}\right)\sin\varphi + \left(\frac{2}{(2h)^2 c^3} + \frac{18}{(2h)^3 c}\right)\sin^2\varphi - \frac{18}{(2h)^3 c^2}\sin^3\varphi - \frac{15}{(2h)^5 c}\sin^4\varphi\right\}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^7$$

— etc., etc.

Français donne encore les termes en $\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^8 \left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^9 \left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^{10}$ que nous ne transcrivons pas à cause de leur longueur.

Borda, comme nous l'avons dit (15), a donné les cinq premiers termes de cette expression de y qui, suivant lui, suffisent pour déterminer les portées des pièces d'artillerie, lorsque les vitesses n'excèdent pas 65 mètres par seconde.

Cette formule, lorsqu'on fait sortir le terme $\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}$, donne pour terme de la première ligne verticale le développement de la fonction $F\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)$, que nous avons fait ressortir des formules de Lambert et de Borda, et elle prend la forme suivante :

$$y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\left[F\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right) + \frac{1}{3.4}\cdot\frac{c}{2h}\sin\varphi\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^2 + \frac{1}{3.4.5}\left\{\left(\frac{c}{2h}\right)^2 - \frac{4c}{2h}\sin\varphi - \left(\frac{c}{2h}\right)^2\sin^2\varphi\right\}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^3\right.$$

$$+\frac{1}{3.4.5.6}\left\{7\left(\frac{c}{2h}\right)^3-\left(11\frac{c}{2h}-3\left(\frac{c}{2h}\right)^3\right)\sin\varphi-3\left(\frac{c}{2h}\right)^3\sin^2\varphi-3\left(\frac{c}{2h}\right)^3\sin^3\varphi\right\}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^4$$

$$+\frac{1}{3.4.5.6.7}\left\{32\left(\frac{c}{2h}\right)^2-3\left(\frac{c}{2h}\right)^4-\left(26\frac{c}{2h}-18\left(\frac{c}{2h}\right)^3\right)\sin\varphi+\left(2\left(\frac{c}{2h}\right)^2+18\left(\frac{c}{2h}\right)^4\right)\sin^2\varphi\right.$$
$$\left.-18\left(\frac{c}{2h}\right)^3\sin^3\varphi-15\left(\frac{c}{2h}\right)^4\sin^4\varphi\right\}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^5$$

$$+\frac{1}{3.4.5.6.7.8}\left\{122\left(\frac{c}{2h}\right)^2-33\left(\frac{c}{2h}\right)^4-\left(57\frac{c}{2h}-36\left(\frac{c}{2h}\right)^3+45\left(\frac{c}{2h}\right)^5\right)\sin\varphi\right.$$
$$+\left(58\left(\frac{c}{2h}\right)^2+180\left(\frac{c}{2h}\right)^4\right)\sin^2\varphi-\left(70\left(\frac{c}{2h}\right)^3-150\left(\frac{c}{2h}\right)^5\right)\sin^3\varphi$$
$$\left.-147\left(\frac{c}{2h}\right)^4\sin^4\varphi-105\left(\frac{c}{2h}\right)^5\sin^5\varphi\right\}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^6$$

$$+\frac{1}{3.4.5.6.7.8.9}\left\{423\left(\frac{c}{2h}\right)^2-201\left(\frac{c}{2h}\right)^4+45\left(\frac{c}{2h}\right)^6-\left(120\left(\frac{c}{2h}\right)+216\left(\frac{c}{2h}\right)^3+696\left(\frac{c}{2h}\right)^5\right)\sin\varphi\right.$$
$$+\left(345\left(\frac{c}{2h}\right)^2+1146\left(\frac{c}{2h}\right)^4-675\left(\frac{c}{2h}\right)^6\right)\sin^2\varphi-\left(280\left(\frac{c}{2h}\right)-2208\left(\frac{c}{2h}\right)^5\right)\sin^3\varphi$$
$$\left.-\left(945\left(\frac{c}{2h}\right)^4-1575\left(\frac{c}{2h}\right)^6\right)\sin^4\varphi-1512\left(\frac{c}{2h}\right)^5\sin^5\varphi-945\left(\frac{c}{2h}\right)^6\sin^6\varphi\right\}\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^7$$
$$+\text{ etc., etc.}\Big]$$

Français a encore calculé le terme en $\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^5$ que nous ne transcrivons pas.

65.

Français, par une application différente du calcul des dérivations, est arrivé à une formule qui est très-remarquable, et qui contient aussi ce terme que nous venons de signaler; en l'isolant, on obtient[1] :

$$(15)\ldots\ y=\text{tang}\varphi.x-\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\left(\frac{e^{\frac{x}{c.\cos\varphi}}-\frac{x}{c.\cos\varphi}-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)^2}\right)$$

$$+\frac{c^4}{2.3.4(2h)^2}\left(1-e^{-\frac{x}{c.\cos\varphi}}\right)^4\left[\sin\varphi+\frac{1}{5}\left\{14\sin\varphi-\cos^2\varphi\frac{c}{2h}\right\}\left(1-e^{-\frac{x}{c.\cos\varphi}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5.6}\left\{156\sin\varphi-2\left[9+\frac{2}{\cos^2\varphi}\right]\cos^2\varphi\frac{c}{2h}-3\sin\varphi\cos^2\varphi\left(\frac{c}{2h}\right)^2\right\}\left(1-e^{-\frac{x}{c.\cos\varphi}}\right)^2\right.$$

[1] Français a obtenu une autre équation (63) dont les deux premiers termes sont les mêmes,

$$+\frac{1}{5.6.7}\left\{1692\sin\varphi-2\left[118+\frac{59}{\cos^2\varphi}\right]\cos^3\varphi\frac{c}{2h}-81\sin\varphi\cos^3\varphi\left(\frac{c}{2h}\right)^2\right.$$
$$\left.+3\left[5-\frac{4}{\cos^2\varphi}\right]\cos^4\varphi\left(\frac{c}{2h}\right)^3\right\}\left(1-e^{-\frac{x}{c.\cos\varphi}}\right)^2$$
$$+\frac{1}{5.6.7.8}\left\{18936\sin\varphi-2\left[1401+\frac{1210}{\cos^2\varphi}\right]\cos^2\varphi\frac{c}{2h}-2\left[770-\frac{17}{\cos^2\varphi}\right]\sin\varphi.\cos^2\varphi\left(\frac{c}{2h}\right)^2\right.$$
$$\left.+9\left[63-\frac{50}{\cos^2\varphi}\right]\cos^4\varphi\left(\frac{c}{2h}\right)^3+15\left[7-\frac{4}{\cos^2\varphi}\right]\sin\varphi\cos^4\varphi\left(\frac{c}{2h}\right)^4\right\}\left(1-e^{-\frac{x}{c.\cos\varphi}}\right)^4$$
$$+\text{etc., etc.}\Big]$$

Nous remarquerons d'abord que dans cette expression le facteur de $\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}$ n'est autre que la fonction $F\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)$, par laquelle diffère de l'équation dans le vide celle d'un très-petit arc de la trajectoire dans l'air, ou celle d'un arc plus grand, lorsqu'on remplace le rapport α de l'arc à sa projection par celui $\frac{1}{\cos\varphi}$ du premier élément; nous remarquerons ensuite que, en représentant en général par $F'(a)$ la valeur de $\frac{e^a-1}{a}$, on aura :

$$\left(1-e^{-\frac{x}{c.\cos\varphi}}\right)=\frac{e^{\frac{x}{c.\cos\varphi}}-1}{e^{\frac{x}{c.\cos\varphi}}}=\frac{x}{c.\cos\varphi}.\frac{F'\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)}{e^{\frac{x}{c.\cos\varphi}}}.$$

D'après ce que nous avons dit, comme d'après le développement des valeurs de $F'\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right)$ et $e^{\frac{x}{c.\cos\varphi}}$, on reconnaîtra d'abord que la première est toujours plus petite que la seconde, et que leur rapport est d'autant plus petit que $\frac{x}{c.\cos\varphi}$ est plus grand, et ensuite que ce rapport est très-peu au-dessous de l'unité quand

et qui est ordonnée suivant les puissances de c. Otto a aussi obtenu (*Théorie mathématique du tir à ricochet*, traduit de l'allemand par M. Rieffel) une série ordonnée de la même manière, et dont il donne le terme général. N'ayant connu cet ouvrage qu'après la rédaction de cet appendice, nous ne pouvons entrer ici dans d'autres détails.

$\frac{x}{c.\cos\varphi}$ est petit. Le terme $\frac{x}{c.\cos\varphi}$ étant ainsi en dehors, on voit que la quantité comprise dans les crochets [...] est ordonnée par rapport à $\frac{x}{c.\cos\varphi}$; quant à la partie en dehors, elle contient le deuxième terme $\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}$, et elle a pour valeur :

$$\frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}\cdot\frac{x^2}{2.3.4hc.\cos^2\varphi}\left(\frac{F'\frac{x}{c.\cos\varphi}}{\frac{x}{c.\cos\varphi}}\right)^4$$

66. PORTÉE HORIZONTALE.

Français a cherché aussi la portée sur un plan horizontal ; en la représentant par X, il obtient :

$$(16)\ldots X=2h\sin(2\varphi)\Big\{1-\frac{2}{3}\frac{2h\sin\varphi}{c}+\frac{5}{9}\left(\frac{2h\sin\varphi}{c}\right)^2-\left(\frac{68}{135}-\frac{1}{5}\left(\frac{c}{2h}\right)^2\right)\left(\frac{2h\sin\varphi}{c}\right)^3$$
$$+\left(\frac{193}{105}-\frac{32}{45}\left(\frac{c}{2h}\right)^2\right)\left(\frac{2h\sin\varphi}{c}\right)^4-\left(\frac{262}{567}-\frac{94}{189}\left(\frac{c}{2h}\right)^2-\frac{4}{105}\left(\frac{c}{2h}\right)^4\right)\left(\frac{2h\sin\varphi}{c}\right)^5$$
$$+\left(\frac{19349}{42525}+\frac{3008}{4725}\left(\frac{c}{2h}\right)^2-\frac{2}{175}\left(\frac{c}{2h}\right)^4\right)\left(\frac{2h\sin\varphi}{c}\right)^6-\text{etc., etc.}\Big\}$$

Dans cette expression, $2h\sin 2\varphi$ n'est autre que la portée dans le vide X′ et $\frac{2h\sin\varphi}{c}$ est égal à $\frac{X'}{c.\cos\varphi}$. Cette formule est peu convergente, à moins que $\frac{2h\sin\varphi}{c}$ ou le rapport $\frac{X}{c.\cos\varphi}$ ne soit lui-même peu considérable [1].

Français a aussi trouvé une expression de la vitesse qui produit, sous un angle donné, une portée donnée sur un plan

[1] Lambert a donné cinq termes, que nous avons rapportés (14), de la portée horizontale; ils ne sont pas complets. La note au bas de la page fait voir pourquoi ils ne s'accordent pas avec ceux de Français, dont le développement est exact.

horizontal; cette portée étant représentée par X, il a trouvé :

$$\frac{c}{2h}=X\frac{\sin\varphi}{\frac{X}{c.\cos\varphi\,e^{\frac{X}{c.\cos\varphi}}-X-c.\cos\varphi}}$$

$$+\frac{1}{4}X^2\left(\frac{\sin\varphi}{\frac{X}{c.\cos\varphi\,e^{\frac{X}{c.\cos\varphi}}-X-c.\cos\varphi}}\right)^3\left\{c.\cos\varphi\left(e^{\frac{X}{c.\cos\varphi}}+5\right)\left(e^{\frac{X}{c.\cos\varphi}}-1\right)-2X\left(2e^{\frac{X}{c.\cos\varphi}}+1\right)\right\}+\text{etc., etc.}$$

Dans cette expression, le premier terme, qui entre dans tous les suivants, peut prendre une forme plus simple en y introduisant la fonction F; car alors on a

$$X\frac{\sin\varphi}{c.\cos\varphi.e^{\frac{X}{c.\cos\varphi}}-X-c.\cos\varphi}=\frac{2\sin\varphi}{\frac{X}{c.\cos\varphi}F\left(\frac{X}{c.\cos\varphi}\right)}\text{; on a aussi }\frac{e^{\frac{X}{c.\cos\varphi}}-1}{\frac{X}{c.\cos\varphi}}=F'\left(\frac{X}{c.\cos\varphi}\right);$$

et en faisant, pour simplifier les expressions, $\frac{X}{c.\cos\varphi}=\alpha$, on aura:

$$(17)\ \frac{c}{2h}=\frac{2\sin\varphi}{\alpha F(\alpha)}+\frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\varphi}{\alpha F(\alpha)}\right)^3\left\{(e^\alpha+5)F'(\alpha)-2(2e^\alpha+1)\right\}$$

$$+\frac{1}{72}\left(\frac{2\sin\varphi}{\alpha F(\alpha)}\right)^5\left\{(5e^{2\alpha}+32e^\alpha+59)(F'(\alpha))^2-2(16e^{2\alpha}+97e^\alpha-17+18\alpha e^\alpha)F'\alpha+12(9e^{2\alpha}-1+3\alpha e^\alpha)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sin^2\varphi}[(e^{2\alpha}-8e^\alpha-17)(F'\alpha)^2-(e^{2\alpha}-26e^\alpha-23)F'\alpha-6(3e^\alpha+1)]\right\}$$

$$+\frac{1}{576}\left(\frac{2\sin\varphi}{\alpha F(\alpha)}\right)^7\left\{(13e^{3\alpha}+63e^{2\alpha}+135e^\alpha+149)(F'\alpha)^3\right.$$

$$-2(46e^{3\alpha}+369e^{2\alpha}+600e^\alpha-475+36\alpha e^{2\alpha}+468\alpha e^\alpha+48\alpha^2e^\alpha)(F'\alpha)^2$$

$$+4(100e^{3\alpha}+828e^{2\alpha}-705e^\alpha+47+306\alpha e^{2\alpha}+198\alpha e^\alpha+48\alpha^2e^\alpha)F'(\alpha)$$

$$-24(64e^{3\alpha}-42e^{2\alpha}-10e^\alpha+3+48\alpha e^{2\alpha}-6\alpha e^\alpha+4\alpha^2e^\alpha)$$

$$-\frac{2}{\sin^2\varphi}[(5e^{3\alpha}-27e^{2\alpha}-243e^\alpha-275)(F'\alpha)^3-4(4e^{3\alpha}-72e^{2\alpha}-291e^\alpha-46-36\alpha e^\alpha)(F'\alpha)^2$$

$$\left.-(13e^{3\alpha}+765e^{2\alpha}+969e^\alpha-127+288\alpha e^\alpha)F'\alpha+12(2e^{3\alpha}+42e^{2\alpha}+4e^\alpha-3+12\alpha e^\alpha)]\right\}$$

$$+\text{etc., etc.}$$

Cette formule offre la solution de cet important problème : Étant donné l'angle de projection φ, le coefficient de la résis-

tance c et la portée horizontale X, déterminer la vitesse initiale.

Lorsque le tir a lieu sous de très-petits angles, alors $\sin\varphi$ est très-petit, et l'on peut négliger la troisième puissance et les puissances supérieures de $\sin\varphi$ devant la première; $\cos\varphi$ étant sensiblement égal à l'unité, la formule se réduit à

$$\frac{c}{2h}=\frac{2\sin\varphi}{\alpha F(\alpha)} \text{ ou } \frac{c\,2\sin\varphi\cos\varphi}{X\,F\left(\frac{X}{c}\right)}; \quad \text{d'où} \quad h=\frac{X}{2\sin 2.\varphi}\,F\left(\frac{X}{c.}\right),$$

ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé directement pour ce cas particulier.

Si la portée X est peu considérable, si en même temps le projectile est lourd, c'est-à-dire si c est très-grand, et pourvu que l'angle de projection ne soit pas très-grand lui-même, alors $\frac{X}{c.\cos\varphi}$ ou α est une très-petite fraction; alors aussi e^{α}, $F'(\alpha)$, $F(\alpha)$ peuvent être regardés comme égaux à l'unité: il en résulte que dans chacun des termes entre parenthèses, facteurs des diverses puissances de $\sin\varphi$, les termes facteurs de α^2, de α, de $\frac{1}{\sin^2\varphi}\alpha$ et de $\frac{1}{\sin^2\varphi}$, ainsi que les autres termes, se réduisent chacun en particulier à zéro; de sorte que la formule se réduit à $\frac{c}{2h}=\frac{2\sin\varphi}{\frac{X}{c.\cos\varphi}}$ ou $h=\frac{X}{2\sin 2\varphi}$, ce qui est la vitesse qu'on obtiendrait dans le vide. Cela devait être; mais il n'était pas inutile de s'en assurer, vu les nombreux multiplicateurs numériques qui se trouvent dans cette formule; appelant h' cette valeur de $h=\frac{X}{2\sin 2\varphi}$, dans ce cas particulier du milieu non résistant, la formule peut prendre une expression plus simple; remarquant que $\frac{2\sin\varphi}{\frac{X}{c.\cos\varphi}F\alpha}=\frac{c}{2h'F\alpha}$, on aura

$$\frac{c}{2h}=\frac{c}{2h'F\alpha}\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{c}{2hF(\alpha)}\right)^2\right\}\cdots\left\{+\frac{1}{72}\left(\frac{c}{2h'F(\alpha)}\right)^4\right\}\cdots\left\{+\frac{1}{576}\left(\frac{c}{2h'F(\alpha)}\right)^6\right\}\cdots\left\{+\text{etc.}\right\};$$

d'où

$$(18)\quad h=\frac{h'\,\mathrm{F}\alpha}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{c}{2h'\,\mathrm{F}(\alpha)}\right)^2\left\{\dots\right\}+\frac{1}{72}\left(\frac{c}{2h'\,\mathrm{F}(\alpha)}\right)^4\left\{\dots\right\}+\frac{1}{576}\left(\frac{c}{2h'\,\mathrm{F}(\alpha)}\right)^6\left\{\dots\right\}+\text{etc.}}$$

Dans cette formule, on n'a pas écrit les termes qui devraient être renfermés entre parenthèses; ils doivent être pris dans la formule précédente.

67. LONGUEUR DE L'ARC DONT LA PROJECTION EST DONNÉE.

Français a trouvé pour la longueur d'un arc de la trajectoire, compris entre l'origine et un point dont l'abscisse est x, la relation suivante, dans laquelle α est une quantité arbitraire.

$$\begin{aligned}(19)\quad s=&\frac{1}{\alpha\cos\varphi}\left(e^{\alpha x}-1\right)\\&-\frac{1}{1.2}\left\{\frac{1}{\alpha\cos\varphi}+\frac{im}{\alpha^2}\sin\varphi\right\}\left(e^{\alpha x}-1\right)^2\\&+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{2}{\alpha\cos\varphi}+\frac{im}{\alpha^2}\sin\varphi\left(3-\frac{i}{\alpha\cos\varphi}\right)+\frac{i^2m^2}{\alpha^3}\cos^3\varphi\right\}\left(e^{\alpha x}-1\right)^3\\&+\text{etc., etc.,}\end{aligned}$$

jusqu'à la puissance 6$^{\text{me}}$, après quoi il donne la loi de formation des termes.

Pour simplifier, faisons $\alpha=\frac{1}{c\cos\varphi}$, remarquons que $\frac{i}{\alpha\cos\varphi}=i$ et que $\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}=\mathrm{F}'\frac{x}{c\cos\varphi}$ on aura:

$$\begin{aligned}s=&\frac{x}{\cos\varphi}\,\mathrm{F}'\left(\frac{x}{c\cos\varphi}\right)\\&-\frac{x^2}{1.2.c}\left\{\frac{1}{\cos^2\varphi}m\sin\varphi\right\}\left(\mathrm{F}'\frac{x}{c\cos\varphi}\right)^2\\&+\frac{x^3}{1.2.3\,c^2}\left\{\frac{2}{\cos^3\varphi}+2\,m\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+m^2\cos^3\varphi\right\}\left(\mathrm{F}'\frac{x}{c\cos\varphi}\right)^3\\&-\frac{x^4}{1.2.3.4\,c^3}\left\{\frac{6}{\cos^4\varphi}+\frac{6\,m\sin\varphi}{\cos^3\varphi}+m^2\cos^4\varphi\left(4+\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)-3m^3\cos^4\varphi\sin\varphi\right\}\left(\mathrm{F}'\frac{x}{c\cos\varphi}\right)^4\\&+\frac{x^5}{1.2.3.4.5\,c^4}\left\{\frac{24}{\cos^5\varphi}+\frac{24\,m\sin\varphi}{\cos^4\varphi}+6m^2\cos\varphi\left(3-\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)-17m^3\cos^3\varphi\sin\varphi\right.\end{aligned}$$

$$-m^4\left(15-\frac{12}{\cos^2\varphi}\right)\Big\}\left(F'\frac{x}{c\cos\varphi}\right)^5$$

$$-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6\,c^5}\left\{\frac{120}{\cos^6\varphi}+\frac{120m\sin\varphi}{\cos^5\varphi}+12\,m^2\left(8-\frac{3}{\cos^2\varphi}\right)\right.$$

$$+4m^3\cos^2\varphi\sin\varphi\left(18-\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)$$

$$\left.-m^4\cos^6\varphi\left(58-\frac{93}{\cos^2\varphi}\right)+5m^5\cos^8\sin\varphi\left(21-\frac{12}{\cos^2\varphi}\right)\right\}\left(F'\frac{x}{c\cos\varphi}\right)^6$$

$$+\text{ etc., etc.}$$

68. DURÉE DU TRAJET.

Partant de la formule $dxdp+gdt^2=0$, qui, combinée avec $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=-im\,e^{is}\,ds$, donne $\frac{dt}{ds}=\left(\frac{im}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\,e^{\frac{is}{2}}$, Français trouve une expression de la durée du trajet. En conservant aux dérivées exprimées par la caractéristique $\mathfrak{S}$ la même valeur que précédemment (18), il obtient la formule suivante:

$$(20)\quad t=2\left(\frac{cm}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\varphi\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)\right.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{m}{c}\,\mathfrak{S}\cos\varphi\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^2$$

$$-\frac{1}{3}\frac{m}{c}\left\{\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}\cos\varphi-\frac{m}{c}\mathfrak{S}^2\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^3$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{m}{c}\right)^2\left\{\frac{2}{2}\mathfrak{S}^2\cos\varphi-\frac{m}{c}\mathfrak{S}^3\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^4$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{m}{c}\right)^2\left\{\frac{1.2}{2.4}\mathfrak{S}^2\cos\varphi-\frac{3}{2}\frac{m}{c}\mathfrak{S}^3\cos\varphi+\left(\frac{m}{c}\right)^2\mathfrak{S}^4\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^5$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{m}{c}\right)^3\left\{\frac{2.3}{2.4}\mathfrak{S}^3\cos\varphi-\frac{4}{2}\frac{m}{c}\mathfrak{S}^4\cos\varphi+\left(\frac{m}{c}\right)^2\mathfrak{S}^5\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^6$$

$$-\frac{1}{7}\left(\frac{m}{c}\right)^3\left\{\frac{1.2.3}{2.4.6}\mathfrak{S}^3\cos\varphi-\frac{3.4}{2.4}\frac{m}{c}\mathfrak{S}^4\cos\varphi+\frac{5}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^2\mathfrak{S}^5\cos\varphi\right.$$

$$\left.-\left(\frac{m}{c}\right)^3\mathfrak{S}^6\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^7$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{m}{c}\right)^4\left\{\frac{2.3.4}{2.4.6}\mathfrak{S}^4_c\cos\varphi-\frac{4.5}{2.4}\frac{m}{c}\mathfrak{S}^5_c\cos\varphi+\frac{6}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^2\mathfrak{S}^6_c\cos\varphi\right.$$
$$\left.-\left(\frac{m}{c}\right)^3\mathfrak{S}^7_c\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^8$$
$$+\frac{1}{9}\left(\frac{m}{c}\right)^4\left\{\frac{1.2.3.4}{2.4.6.8}\mathfrak{S}^4_c\cos\varphi-\frac{3.4.5}{2.4.6}\frac{m}{c}\mathfrak{S}^5_c\cos\varphi+\frac{5.6}{2.4}\left(\frac{m}{c}\right)^2\mathfrak{S}^6_c\cos\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{7}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^3\mathfrak{S}^7_c\cos\varphi+\left(\frac{m}{c}\right)^4\mathfrak{S}^8_c\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^9$$
$$-\frac{1}{10}\left(\frac{m}{c}\right)^5\left\{\frac{1.3.4.5}{2.4.6.8}\mathfrak{S}^5_c\cos\varphi-\frac{4.5.6}{2.4.6}\frac{m}{c}\mathfrak{S}^6_c\cos\varphi+\frac{6.7}{2.4}\left(\frac{m}{c}\right)^2\mathfrak{S}^7_c\cos\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{8}{2}\left(\frac{m}{c}\right)^3\mathfrak{S}^8_c\cos\varphi+\left(\frac{m}{c}\right)^4\mathfrak{S}^9_c\cos\varphi\right\}\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)^{10}$$
$$+\text{ etc., etc.}\Big]$$

La loi de ces termes est facile à saisir.

Si l'on veut exprimer le temps de la montée suivant la branche ascendante, on changera $e^{\frac{s}{2c}}$ en $\left(1+\frac{\xi(\varphi)}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$. On aurait de même le temps employé depuis le point de départ jusqu'au point où l'inclinaison est de même grandeur qu'au point de départ, mais en sens opposé, en changeant $e^{\frac{s}{2c}}$ en $\left(1+\frac{2\xi(\varphi)}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$.

La formule qui précède peut recevoir des modifications qui la rendent plus comparable avec celle qui est relative au vide ou à celle que nous avons obtenue pour les petits arcs. Pour cela, on remarquera que le premier terme $2\left(\frac{cm}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\left(e^{\frac{s}{2c}}-1\right)$ se transforme en $\frac{s}{V}F'\left(\frac{s}{2c}\right)$; faisant subir cette transformation aux autres termes, on aura :

$$(21)\ldots\ t=\frac{s}{V}F'\frac{s}{2c}\Big[1-\frac{1}{2\cos\varphi}\frac{m}{c}\frac{s}{2c}\mathfrak{S}\cos\varphi\,F'\left(\frac{s}{2c}\right)-\frac{1}{3\cos\varphi}\frac{m}{c}\left(\frac{s}{2c}\right)^2\Big\}\ldots\Big\{\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^2$$
$$+\frac{1}{4\cos\varphi}\left(\frac{m}{c}\right)^2\left(\frac{s}{2c}\right)^3\Big\}\ldots\Big\{\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^3+\frac{1}{5\cos\varphi}\left(\frac{m}{c}\right)^3\left(\frac{s}{2c}\right)^4\Big\}\ldots\Big\{\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^4$$

$$- \frac{1}{6\cos\varphi}\left(\frac{m}{c}\right)^3\left(\frac{s}{2c}\right)^5\left\{\ldots\right\}\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^5 - \frac{1}{7\cos\varphi}\left(\frac{m}{c}\right)^3\left(\frac{s}{2c}\right)^6\left\{\ldots\right\}\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^6$$
$$+ \frac{1}{8\cos\varphi}\left(\frac{m}{c}\right)^4\left(\frac{s}{2c}\right)^7\left\{\ldots\right\}\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^7 - \frac{1}{9\cos\varphi}\left(\frac{m}{c}\right)^4\left(\frac{s}{2c}\right)^8\left\{\ldots\right\}\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^8$$
$$+ \frac{1}{10\cos\varphi}\left(\frac{m}{c}\right)^5\left(\frac{s}{2c}\right)^9\left\{\ldots\right\}\left(F'\left(\frac{s}{2c}\right)\right)^9 + \text{etc..., etc...}\Big]$$

Dans cette expression, le terme en dehors des crochets est la durée relative au mouvement qui aurait lieu en ligne droite, sans l'effet de la pesanteur; le terme entre crochets, qui renferme l'angle de projection et le coefficient de la résistance de l'air, donne la différence de durée due à l'effet de la pesanteur. Le terme $\frac{m}{c}$ est égal à $\frac{1}{2h\cos^2\varphi}$. Tels sont les principaux résultats auxquels est arrivé Français : il en a obtenu beaucoup d'autres que nous ne rapportons pas, de crainte de dépasser les bornes que nous nous sommes posées; ils sont très-remarquables par leur symétrie, par les nombreux termes calculés et par les lois de formation des termes, ce que les formules proposées jusqu'à lui n'avaient pas encore donné. Presque toutes ont pu être encore rendues d'une expression plus simple et plus facile à calculer, au moyen des fonctions que nous avons désignées et des tables que nous avons calculées.

MÉTHODES D'APPROXIMATION.

69. PRINCIPE DES DIVERSES MÉTHODES D'APPROXIMATION.

La méthode d'Euler et les formules qui représentent par des séries plus ou moins convergentes les valeurs qu'on peut se proposer de déterminer dans les problèmes de balistique exigeant des calculs très-longs, les géomètres ont cherché une autre voie et ont tâché d'obtenir des formules plus faciles et donnant en même temps une approximation suffisante.

70. MÉTHODE DE BORDA.

Borda[1], considérant que l'équation $\frac{d^2p}{dp} = \frac{ds}{c}$ se refuse à l'intégration, a eu l'idée de prendre pour la valeur de c, dans laquelle entre la densité de l'atmosphère, une fonction de l'inclinaison telle, que l'intégration devînt possible et qu'en même temps la densité n'éprouvât pas d'anomalies trop considérables. C'est une voie dans laquelle sont entrés après lui plusieurs géomètres, et en particulier Legendre et Français, qui y ont apporté de grands perfectionnements. La fonction qui a conduit Borda aux expressions les plus simples est celle-ci, $\frac{\alpha}{\sqrt{1+p^2}}$, dans laquelle α est une quantité arbitraire; remplaçant donc la densité de l'air δ par $\delta\frac{\alpha}{\sqrt{1+p^2}}$ ou $\frac{1}{c}$ par $\frac{1}{c}\frac{\alpha}{\sqrt{1+p^2}}$, il détermine α de manière qu'au point de projection où $p = \operatorname{tang}\varphi$ la densité soit la densité véritable, c'est-à-dire qu'on ait $\frac{\alpha}{\sqrt{1+p^2}} = 1$, d'où résulte $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}$. On voit par là que la densité de l'air, variable en chaque point, est égale à $\delta\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$.

Par la substitution de $\frac{1}{c}\frac{1}{\cos\varphi\sqrt{1+p^2}}$ à $\frac{1}{c}$, l'équation ci-dessus, en remarquant que $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ devient $\frac{d^2p}{dp} = \frac{1}{c}\frac{ds}{\cos\varphi\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{c}\frac{dx}{\cos\varphi}$, et par l'intégration Borda obtient pour l'équation de la trajectoire

$$y = x\left(\operatorname{tang}\varphi + \frac{c}{2h\cos\varphi}\right) - \frac{c^2}{2h}\left(e^{\frac{x}{c.\cos\varphi}} - 1\right).$$

La force retardatrice $\frac{1}{c}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$ est supposée exacte au point de

[1] *Mémoire de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1769*, sur la courbe décrite par les boulets et les bombes, en ayant égard à la résistance de l'air, par Borda.

départ; mais elle est trop grande dans la partie supérieure, là où la vitesse est plus faible; elle redevient exacte dans la branche descendante au point où la courbe a la même inclinaison qu'au départ, puis elle est supposée trop petite dans la partie qui suit jusqu'au point de chute, et quoique Borda ait pensé que par là les erreurs étaient assez bien compensées, cependant l'amplitude et la hauteur du jet sont trop petites. Mais si l'on calcule séparément la branche descendante, en partant de la vitesse au sommet déterminée directement, on diminue l'erreur sur l'amplitude totale.

Cette formule de Borda peut être ramenée à celle que nous avons déjà donnée, en y introduisant la fonction désignée par F: elle devient ainsi :

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi} \operatorname{F}\left(\frac{x}{c.\cos\varphi}\right).$$

71. FORMULE DE BEZOUT.

Bezout[1] est arrivé à des équations de même forme que celles qui résultent de la méthode précédente, mais par des considérations compliquées; elles reviennent à remplacer par une quantité constante une quantité variable avec l'inclinaison des diverses parties de la trajectoire, c'est-à-dire qu'il représente par a la quantité

$$1 + \frac{\frac{2}{3}\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{15}\operatorname{tang}^4\frac{\theta}{2} + \frac{4}{105}\operatorname{tang}^6\frac{\theta}{2} + \text{etc.}}{1 - \operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}}$$

et qu'il choisit pour θ la plus grande valeur qu'elle peut avoir, c'est

[1] *Cours de mathématique à l'usage du corps royal d'artillerie*, Mouvement des projectiles, p. 128 à 197 de l'édition de 1788, et appendice, p. 438.

à-dire φ. L'équation qu'il obtient peut se ramener à la forme suivante :

$$y = x \operatorname{tang} \varphi - \frac{x^2}{4h \cos^2 \varphi} \mathrm{F}\left(\frac{ax}{c}\right).$$

Il montre ensuite que la quantité a est équivalente à

$$\frac{1}{2} \operatorname{sec.} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{cot.} \varphi \log. \left(45° + \frac{1}{2} \varphi\right),$$

et il donne une table de ces valeurs.

Bezout propose un moyen d'avoir égard au changement de densité de l'atmosphère; mais par ce moyen l'erreur sur l'amplitude est plus grande que quand on suppose la densité invariable.

72. MÉTHODE DE LEGENDRE.

Legendre[1] a proposé plusieurs méthodes d'approximation pour obtenir l'équation de la trajectoire, en faisant une supposition sur la variation de la densité de l'air.

La principale est fondée sur cette formule $\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$, de façon que dans l'équation $\frac{d^2p}{dp} = \frac{ds}{c}$, on remplace $\frac{1}{c}$ par $\frac{1}{c}\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$ ou δ par $\delta \frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$, ce qui la transforme en celle-ci

$$\frac{d^2p}{dp} = (1+\alpha p^2)\frac{dx}{c},$$

et il détermine α de manière qu'au point de départ, où $p = \operatorname{tang} \varphi$, la densité soit exactement celle qu'on doit avoir, c'est-à-dire qu'il fait $\frac{1+\alpha \operatorname{tang}^2 \varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 \varphi}} = 1$, d'où $\alpha = \frac{\cos \varphi}{1+\cos \varphi}$.

Par cette méthode, la densité supposée est égale à la densité

[1] *Dissertation sur la question de balistique*, proposée par l'Académie des sciences et belles-lettres de Prusse, pour le prix de 1782, par Legendre.

réelle aux trois points où l'on a $p = \text{tang}\,\varphi$, $p = o$ et $p = -\text{tang}\,\varphi$; dans les autres positions, elle sera plus petite que la véritable. Le minimum aura lieu au point où $p^2 = \frac{1-2\alpha}{\alpha} = \frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}$, et le rapport de la densité supposée à la densité réelle sera $\sqrt{1-\text{tang}^4\frac{1}{2}\varphi}$, quantité en général peu différente de l'unité; car lorsque φ est successivement 30°, 45°, 60°, ce rapport est respectivement inférieur à l'unité de $\frac{1}{400}$, $\frac{1}{67}$, $\frac{1}{18}$.

Cela posé, l'équation $cdp^2 = dpds$, en y remplaçant ds par $dx\sqrt{1+p^2}$ devient,

$$c\,d^2p = (1+\alpha p^2)\,dxdp;$$

de cette équation il tire l'équation de la trajectoire, en faisant

$$B = \frac{c}{2h\cos^3\varphi} + \text{tang}\,\varphi + \frac{\alpha}{3}\text{tang}^3\varphi,$$

déterminant C par l'équation cubique

$$\frac{\alpha}{3}C^3 + C - B = o$$

et en faisant

$$\sqrt{\frac{3}{4}C^2 + \frac{3}{\alpha}} = m.$$

Déterminant enfin les valeurs des angles A et P par les relations

$$\text{tang}\,A = \frac{\text{tang}\,\varphi + \frac{1}{2}C}{m} \text{ et tang}\,P = \frac{p+\frac{1}{2}C}{m},$$

on aura

$$x = \frac{1}{1+C^2\alpha}\left\{\log\frac{C-P}{C-\text{tang}\,\varphi} + \log\frac{\cos P}{\cos A} + \frac{3C}{2m}(A-P)\right\},$$

et

$$y = Cx - \frac{3}{\alpha m}(A-P).$$

On observera : 1° que C doit être calculé avec précision au moyen

des fausses positions; 2° que les logarithmes indiqués sont hyperboliques, et que A — P, désignant la longueur absolue d'un arc, devra, après avoir été estimé en degrés, être multiplié par $\frac{\pi}{180}$. On aura ainsi les valeurs de x et de y pour autant de valeurs de p que l'on voudra.

Cette méthode, et plusieurs autres que Legendre développe, ont le mérite d'une grande exactitude; mais on ne saurait disconvenir qu'elles n'ont pas la simplicité nécessaire pour les applications, et qu'elles conduisent à des calculs trop pénibles.

Legendre fait une application numérique, et il compare sa formule à celle de Borda; mais les données de l'exemple qu'il choisit sortent des limites de la pratique, car il prend [1] $h = 10\,c$ et l'angle de projection de 45°; or, pour des bombes de $0^m\,32$ et $0^m\,22$ de diamètre, la valeur $h = 10\,c$ indiquerait des vitesses d'environ 460^m et de 360^m par seconde; il ne peut d'ailleurs être appliqué aux canons, qu'on ne tire pas sous des angles aussi grands.

Cet exemple était très-propre, sans doute, à faire ressortir l'exactitude relative de sa méthode sur celle de Borda; mais il induirait en erreur sur leurs valeurs réelles, considérées sous le rapport des applications au tir des projectiles.

73. MÉTHODE DE FRANÇAIS.

Français[2], tout en reconnaissant le mérite de la fonction de densité employée par Legendre, lui reproche de manquer d'homogénéité ou d'égalité de dimensions, par rapport à p, entre le numérateur et le dénominateur; de sorte que, p étant infini, la fonction $\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$ le devient elle-même. Par cette considération, il lui préfère celle-ci :

$$\frac{1+\alpha p^3}{\sqrt{1+b\,p^2}\,\sqrt{1+p^2}}$$

[1] Ouvrage cité, page 21.

[2] *Recherches sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistants*, par Français; manuscrit de l'École d'application, an XIII, p. 134.

Si l'on y supposait $a = b = 1$, elle serait rigoureusement égale à l'unité. La condition principale à remplir étant que l'équation $cd^2p = dpds$ devienne intégrable, après qu'on l'aura multipliée membre à membre par l'équation $1 = \frac{1 + ap^2}{\sqrt{1+bp^2}\sqrt{1+p^2}}$, on y satisfait en faisant $b = \frac{1}{2}a$.

Posant pour seconde condition que cette fonction soit rigoureusement égale à l'unité pour $p = \operatorname{tang}\varphi$, on y satisfait en supposant

$$a = 1 \frac{3 - \sqrt{9 - 8\sin^2\varphi}}{4\sin^2\varphi}.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle de la trajectoire $\frac{1}{r}$ par $\frac{1}{c}\frac{1 + ap^2}{\sqrt{1+\frac{1}{2}ap^2}\sqrt{1+p^2}}$ et ds par $dx\sqrt{1+p^2}$, on aura

$$cd^2p = \frac{1 + ap^2}{\sqrt{1+\frac{1}{2}ap^2}}\,dx\,dp,$$

d'où l'on tire par l'intégration la valeur de $\frac{dp}{dx}$, puis celle de dy et de dx, et enfin celle de x et de y. En faisant

$$K = \frac{c}{2h\cos^2\varphi} + \operatorname{tang}\varphi\sqrt{1+\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}^2\varphi}$$

représentant par β un angle constant, tel que $\cot 2\beta = K\sqrt{2a}$, et par ζ et γ des angles variables, tels qu'on ait

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{p\sqrt{\frac{1}{2}a} + \sqrt{1+\frac{1}{2}ap^2}}{\sqrt{\operatorname{tang}\beta}}$$

et

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{\frac{1}{2}a} + \sqrt{1+\frac{1}{2}a\operatorname{tang}^2\varphi}}{\sqrt{\operatorname{tang}\beta}}$$

on aura :

$$x = c\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin 2\beta}\left\{2(\zeta-\gamma)\operatorname{tang}\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\log\frac{\cos(\beta+\zeta)\cos(\beta-\gamma)}{\cos(\beta-\zeta)\cos(\beta+\gamma)}\right\}$$

$$y = cK\sin 2\beta\left\{\frac{2}{\cos 2\beta}\log\frac{\operatorname{tang}\zeta}{\operatorname{tang}\gamma}+\log\frac{\cos(\beta-\zeta)\cos(\beta+\zeta)}{\cos(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)}\right\}$$

On a ainsi les coordonnées x et y en fonction de la variable p.

La supposition de $\sin\beta = \cos\zeta$ rend les valeurs de x et de y infinies négatives. Cette hypothèse répond à une asymptote de la branche ascendante. Français fait remarquer que l'angle asymptotique qu'on en déduit ne diffère de l'angle obtenu par les formules exactes que de quelques secondes dans les cas les plus défavorables, ce qui atteste un grand degré d'approximation : il trouve de même l'existence d'une asymptote verticale dans la branche descendante et sa distance finie du point de départ. Il trouve aussi les relations qui, dans cette hypothèse de la densité, donnent la portée horizontale, l'angle de chute et la durée du trajet.

74. COMPARAISON ENTRE LES DEGRÉS D'APPROXIMATION DES MÉTHODES DE LEGENDRE ET DE FRANÇAIS.

On jugera du degré d'exactitude des méthodes de Legendre et de Français en s'arrêtant au cas discuté par Legendre, $\varphi = 45°$. pour lequel on a, dans son hypothèse, $\alpha = 0{,}414214$, et dans celle de Français, $a = 0{,}618034$. Les valeurs de ces deux fonctions pour des valeurs de φ de 5° en 5° sont contenues dans le tableau suivant.

TABLEAU DES VALEURS COMPARATIVES DES FONCTIONS DE LEGENDRE ET DE FRANÇAIS POUR DIVERSES INCLINAISONS.

VALEURS DE φ.	VALEURS DES FONCTIONS de LEGENDRE : $\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$.	VALEURS DES FONCTIONS de FRANÇAIS : $\frac{1+ap^2}{\sqrt{1+\frac{a}{2}p^2}\sqrt{1+f^2}}$.	VALEURS DE φ.	VALEURS DES FONCTIONS de LEGENDRE : $\frac{1+\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}}$.	VALEURS DES FONCTIONS de FRANÇAIS : $\frac{1+ap^2}{\sqrt{1+\frac{a}{2}p^2}\sqrt{1+f^2}}$.
0°	1.000000	1.000000	45°	1.000000	1.000000
5°	0.999353	0.999956	50	1.020931	1.006233
10°	0.997491	0.998944	55°	1.058152	1.015487
15°	0.994652	0.997779	60°	1.121320	1.028007
20°	0.991256	0.996439	65°	1.227673	1.043584
25°	0.987937	0.995312	70°	1.411430	1.061403
30°	0.985699	0.994479	75°	1.752011	1.079879
35°	0.985510	0.994750	80°	2.487081	1.096151
40°	0.989456	0.996332	85°	4.803613	1.107638
45°	1.000000	1.000000	90°	Infini.	1.111785

Les valeurs minima des fonctions de Legendre et de Francais ont lieu respectivement pour $\varphi = 32° 45' 54''$ et pour $\varphi = 31° 43' 3''$, et sont respectivement 0,985188 et 0,994412. On voit par là que, dans l'intervalle de 0° à 45°, la première ne diffère de l'unité que de $\frac{1}{67}$, la seconde n'en diffère que de $\frac{1}{179}$. Au delà de 45° la fonction de Legendre va en augmentant jusqu'à l'infini; celle de Francais ne dépasse jamais l'unité de plus de $\frac{1}{9}$. Celle-ci l'emporte donc sur la première pour l'exactitude, et elle marche de pair pour la simplicité.

75. MODIFICATION PROPOSÉE.

Les formules de Legendre et de Français seraient susceptibles de recevoir encore un peu plus d'exactitude. En effet, les valeurs de α et de a ayant été déterminées de façon que la densité soit

égale à la densité réelle au point de départ, il en résulte que, dans tout le cours de la trajectoire, la densité supposée est inférieure à la densité véritable de quantités dont le maximum a été respectivement de $\frac{1}{67}$ et $\frac{1}{179}$; si on prend la moyenne de toutes les valeurs calculées de 5° en 5°, on trouve, d'après le tableau qui précède, 0,993135 pour les premières et 0,997399 pour les secondes : ces quantités correspondent aux valeurs du tableau comprises entre 40° et 45°, et qui seraient environ $41° \frac{1}{2}$. Si donc on déterminait α et a par la condition que la densité s'accordât avec la densité réelle pour les valeurs correspondantes de p, elle s'accorderait encore pour les angles d'environ 17°. La valeur moyenne de la fonction serait ramenée à très-peu près à l'unité, et les plus grandes différences ne seraient plus qu'environ la moitié de ce qu'elles sont dans les méthodes de Legendre et de Français. La méthode gagnerait ainsi beaucoup en approximation.

76. MÉTHODE DE PERSY.

Pour résoudre plus facilement la question, M. Persy[1] propose de remplacer $\frac{1}{c}$ par $\frac{1}{c}\frac{\alpha+\beta p}{\sqrt{1+p^2}}$ et de déterminer α et β de façon que la densité soit représentée par $\frac{1}{c}$ à l'origine et par $\frac{\cos\varphi}{c}$ au sommet, ce qui donne $\alpha=\cos\varphi$ et $\beta=\sin\varphi$: alors la densité est représentée par

$$\frac{\cos(\varphi-\theta)}{c}.$$

Par là, la densité est un maximum lorsque $\theta=\varphi$, et le maximum est $\frac{1}{c}$; elle diminue avec θ jusqu'à ce que $\theta=o$, c'est-à-dire dans la branche ascendante jusqu'au sommet; mais dans la branche descendante, où θ est négatif, la densité deviendrait trop petite :

[1] *Cours de balistique à l'usage des élèves de l'École d'application de l'artillerie et du génie*, par Persy; lithographie de l'École d'application, 1833.

elle serait nulle au point où l'inclinaison est $90^\circ - \varphi$, et négative au delà; alors il faut changer le sens des coordonnées verticales et calculer séparément la branche descendante. D'après cette supposition, l'équation de la trajectoire deviendra $\frac{d^2p}{dx} = (\alpha + \beta p)\, dp$, qui par l'intégration, et en faisant $\alpha + \beta p = q$, donnera

$$\frac{A\,x}{\alpha} = \log B^2 \frac{q - \frac{A}{\alpha}}{q + \frac{A}{\alpha}}, \qquad \alpha x + \beta y = \log C^2 \left(q^2 - \frac{A^2}{\alpha^2}\right).$$

Ces équations, par l'élimination de q, donneraient l'équation de chaque branche de la trajectoire, lesquelles différeront par les valeurs de A, B, C, et qui sont:

$$A = \sqrt{1 + \frac{\sin\varphi}{h}}, \qquad B^2 = \frac{1+A}{1-A}; \qquad C^2 = \frac{\alpha^2}{1-A^2}.$$

Pour déterminer ce qui est relatif au sommet, on aurait, en désignant par x' l'abscisse, Y l'ordonnée et h' la hauteur due à la vitesse

$$h' = \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{(A+\cos^2\varphi)\,(A-\cos^2\varphi)}; \qquad x' = \frac{\cos\varphi}{A}\log\frac{(A+1)\,(A-\cos^2\varphi)}{(A-1)\,(A+\cos^2\varphi)};$$
$$Y = \frac{1}{\sin\varphi}\log\frac{(A+\cos^2\varphi)\,(A-\cos^2\varphi)}{(A+1)\,(A-1)} - \frac{x'}{\operatorname{tang}\varphi}.$$

A l'égard de la branche descendante, dont le sommet est l'origine, on changera le signe de y et de p, et en accentuant les constantes on aura:

$$A' = \cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - \frac{\sin\varphi}{h'}}, \qquad B'^2 = \frac{\alpha^2+A}{\alpha^2-A}; \qquad C'^2 = \frac{\alpha}{\alpha^4 - A'^4}.$$

77.

Plusieurs auteurs ont encore traité la question du mouvement des projectiles dans l'air pour le tir sous les grands angles; ce sont : Lombard[1], Moreau[2], Poisson[3], d'Obenheim[4]; mais comme ils n'ont pas employé de méthodes nouvelles, nous n'avons pas à nous en occuper ici.

D'après ce qu'on vient d'exposer, les recherches des géomètres sur la loi du mouvement des projectiles, dans la supposition que la résistance de l'air est proportionnelle au carré des vitesses, paraîtront sans doute assez complètes; si elles n'ont pas amené à des formules à la fois simples et exactes, dans le cas général, cela tient à la nature de la question, et, il ne paraît pas possible, au moins dans l'état actuel de l'analyse, d'arriver à une équation finie de la trajectoire, ni à l'expression semblable des principales relations dont on aurait besoin. Cependant, les méthodes d'approximation seraient assez exactes pour qu'on puisse s'en contenter dans les applications les plus précises, si ce n'était encore la longueur des calculs numériques.

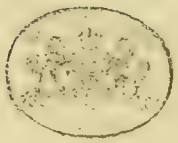
Si ces recherches n'ont pas présenté jusqu'à présent l'accord désirable avec les résultats de l'expérience, ce n'est pas dans les formules qu'il faut en chercher la cause, mais plutôt dans l'hypothèse de la proportionnalité de la résistance de l'air au carré de la vitesse et dont des recherches récentes ont montré l'inexactitude en général, en n'exceptant que le cas du tir des projectiles de fort calibre sous des angles peu élevés et avec des vitesses peu considérables, et sans doute à quelques forces dont on ne tient pas compte. C'est dans l'hypothèse de l'expression plus exacte de

[1] *Traité du mouvement des projectiles appliqué aux bouches à feu*, par J. L. Lombard, 1796.

[2] *Mémoire sur la théorie du mouvement des projectiles dans les milieux résistants*, par Moreau, inséré dans le Journal de l'École polytechnique, 11ᵉ cahier, 1802.

[3] *Traité de mécanique*, par S. D. Poisson. Mouvement des projectiles dans le vide et dans l'air.

[4] *Indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement des projectiles et analyse nécessaire*, par d'Obenheim, 1814.

la résistance de l'air, avec un terme proportionnel au carré et un terme proportionnel au cube de la vitesse, que doivent être dirigées les recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air, et c'est ce que nous avons fait dans le mémoire qui précède cet appendice.

FIN DU TOME DIXIÈME.